Exercices calculs et automatismes

20 Liste de diviseurs

Méthode Comment faire pour dresser, à l'aide d'un tableau, la liste des diviseurs positifs des entiers naturels a suivants ?

a) $a = 150$
b) $a = 230$

21 Nombre de diviseurs

Choisir la bonne réponse.

1. Le nombre de diviseurs positifs de 810 est :
a 16 b 18 c 20 d 22

2. Le nombre de diviseurs positifs de 252 est :
a 16 b 18 c 20 d 22

22 Diviseur d'un carré

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

	V	F
Un carré parfait admet un nombre impair de diviseur.	☐	☐

23 Critère de divisibilité

À quelle condition un nombre est-il divisible par 6 ? par 18 ?

24 Divisibilité par le produit

Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses ? Justifier.

	V	F
Si un nombre est divisible par 6 et 9 alors, ce nombre est divisible par 54.	☐	☐
Si un nombre est divisible par 9 et 14, alors ce nombre est divisible par 126.	☐	☐

25 Recherche de diviseurs communs

Soit k un entier naturel. On pose $a = 5k + 4$ et $b = 3k + 1$.
Méthode Comment faire pour déterminer les diviseurs communs possibles pour a et b par une combinaison linéaire ?

26 Division euclidienne

Dans chaque cas, écrire la division euclidienne de a par b.

a) $a = 193$ et $b = 16$
b) $a = 18$ et $b = 50$
c) $a = -20$ et $b = 7$
d) $a = -354$ et $b = 17$

27 Égalité et division euclidienne

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

	V	F
L'égalité : $-37 = 5(-7) - 2$ correspond à la division euclidienne de -37 par 5.	☐	☐

28 Diviseur et division euclidienne

Dans la division euclidienne de deux entiers naturels, le dividende est 63 et le reste 17.
Donner toutes les valeurs possibles du quotient et du diviseur.

29 Restes possibles

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Dans une division euclidienne, le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7.
Les valeurs de x possibles sont :
a 0, 1, 2 b 21 c 22 et 23 d 21, 22, 23

30 D'une division euclidienne à une autre

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13.
Le reste de la division de a par 6 est :
a 7 b 13 c 1 d on ne sait pas.

31 Recherche de deux entiers

La différence entre deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34.
Quels sont ces deux entiers ?

32 Congruence

Pour chaque valeur de a donnée, trouver un entier relatif x tel que : $a \equiv x\ (7)$ et $-3 \leqslant x < 4$.

a) $a = 11$ **b)** $a = 24$
c) $a = 62$ **d)** $a = 85$
e) $a = -12$ **f)** $a = 32$
g) $a = 98$ **h)** $a = -47$

33 Déterminer un reste

Méthode Comment faire pour montrer que : $2^5 \equiv -1\ (11)$?
Quels sont alors les restes dans la division euclidienne par 11 de 13^{12} et $(-2)^{19}$?

34 Reste ou pas

Les affirmations suivantes sont-elle vraies ou fausses ? Justifier.

	V	F
a) $12^{15} \equiv 1\ (11)$	☐	☐
b) $77^{15} \equiv 1\ (13)$	☐	☐
c) $10^7 \equiv -1\ (9)$	☐	☐
d) $99^{100} \equiv 1\ (10)$	☐	☐

35 Divisibilité et congruence

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

	V	F
$(6^n - 1)$ est divisible par 5.	☐	☐

Exercices d'application

Résoudre une équation et utiliser la divisibilité

Méthode 1 Méthode 2 p. 83

36 Histoire des maths

1. Dans un tableau, dresser la liste des diviseurs de 220.

2. Un diviseur propre d'un entier est un diviseur autre que lui-même. Vérifier que la somme des diviseurs propres de 220 est 284.

3. Déterminer les diviseurs propres de 284 puis en faire la somme.

4. Qu'observe-t-on ? On dit que 220 et 284 sont amiables.

Euler (1707-1783), mathématicien suisse, donna une liste de 61 paires de nombres amiables. On ne connaît aucune paire de nombres amiables de parité différente.

37 Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles. Si l'on compte les bouteilles par 3, 5 ou 7, il en reste toujours 2.
Sachant que le nombre de bouteilles est compris entre 1 500 et 1 600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

38 **1.** Donner la liste des diviseurs de 20 dans $\mathbb{N}$.

2. En déduire tous les couples d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$4x^2 - y^2 = 20.$$

39 Déterminer les couples d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$5x^2 - 7xy = 17.$$

40 Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n - 4)$ divise $(3n - 17)$.

41 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on $(n + 8)$ divisible par n ?

42 Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{6n+12}{2n+1}$ est-elle un entier relatif ?

43 Soit n un entier relatif. Pour quelles valeurs de n la fraction $\dfrac{10n-4}{3n+1}$ est-elle un entier relatif ?

44 Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $(n - 7)$ divise $(n^2 - n - 27)$.

45 **1.** Montrer que si un entier naturel d divise $(12n + 7)$ et $(3n + 1)$ alors, il divise 3.

2. En déduire que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible.

46 Soit l'équation (E) : $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.

1. Montrer que :

$$xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32.$$

2. Déterminer les couples d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ qui vérifient (E).

47 Montrer que si n est un entier impair alors $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

48 Soit n un naturel. Démontrer que, quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ce nombre n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

49 On pose : $a_n = n^5 - n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que a_n est pair.

2. Montrer que a_n est divisible par 3.

3. En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que a_n est divisible par 5.

4. Pourquoi a_n est-il divisible par 20 ?

50 Démo

Démontrer par disjonction des cas que pour tout naturel n, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

51 Montrer que, si l'on soustrait à un entier naturel strictement inférieur à 100 la somme de ses chiffres, alors le résultat est divisible par 9.

52 Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que $(n + 1)$ divise $(n^2 + 5n + 4)$ et $(n^2 + 3n + 2)$.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $(n + 1)$.

3. En déduire que pour tout n, $(3n^2 + 15n + 19)$ n'est pas divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

Manipuler la division euclidienne

Méthode 3 p. 85

53 On considère l'égalité suivante :

$$23 \times 51 + 35 = 1\,208.$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont le quotient et le reste de la division de $-1\,208$ par 51 ?

2. Quels sont le quotient et le reste de la division de 1 208 par 23 ?

54 On considère l'égalité suivante :

$$842\,270 = 3\,251 \times 259 + 261.$$

Sans effectuer de division, répondre aux questions suivantes.

1. Quels sont le quotient et le reste de la division de 842 270 par 259 ?

2. Quels sont le quotient et le reste de la division de $-842\,270$ par 3 251 ?

55 Soit n et p sont deux entiers naturels. On sait que le reste dans la division euclidienne de n par 11 vaut 8 et que le reste dans la division euclidienne de p par 11 vaut 7.
Quel est le reste de $n + p$ dans la division euclidienne par 11 ?

56 Un entier naturel n est tel que si on le divise par 5 le reste vaut 3 et si on le divise par 6 le reste augmente de 1 et le quotient diminue de 1. Déterminer n.

57 La différence de deux entiers naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces entiers ?

58 On divise un entier naturel n par 152, puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Déterminer n.

59 Dans la division euclidienne de 1 620 par un entier naturel b non nul, le quotient est 23 et le reste r.
Déterminer les valeurs possibles pour b et r.

60 Si l'on divise A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

61 À la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.

Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches. Combien l'escalier compte-t-il de marches ?

Utiliser la congruence

Méthode 4 Méthode 5 p. 87

62 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(5^{3n} - 6^n)$ par 17 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

63 Déterminer le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7.

64 Déterminer le reste de la division euclidienne de $2\,012^{2\,012}$ par 11.

65 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(451 \times 6^{43} - 912)$ par 7.

66 Démontrer que 13 divise $(31^{26} + 5^{126})$.

67 Montrer que pour tout entier naturel n :
$(16^{2n+1} + 18^n)$ est divisible par 17.

68 Montrer que pour tout entier naturel n :
$(2^{4n+1} + 3^{4n+1})$ est divisible par 5.

69 **1.** Compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv \ldots (4)$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \ldots (4)$				

2. Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x + 3)^2 \equiv 1\ (4)$.

70 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
1. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1\ (d)$.

71 La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
« Si $ab \equiv 0\ (6)$ alors $a \equiv 0\ \ (6)$ ou $b \equiv 0\ (6)$. »

72 La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
« Si $2x \equiv 4\ (12)$ alors $x \equiv 2\ (12)$. »

73 On veut montrer que l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$ n'a pas de solution entière.
1. On suppose qu'il existe une solution $(x\,;y)$.
En raisonnant modulo 5, montrer que l'équation (E) peut se mettre sous la forme : $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$.
2. Recopier puis compléter les tableaux de congruence suivants.

$x \equiv \ldots (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots (5)$					

$y \equiv \ldots (5)$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \ldots (5)$					

3. Montrer que x et y sont multiples de 5.
4. Conclure.

74 On veut montrer que l'équation
(E) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ avec $n \in \mathbb{N}$
n'a pas de solution entière.
1. On suppose qu'il existe une solution $(x\,;y)$.
On raisonne modulo 7.
a) Montrer que $100 \equiv 2\ (7)$.
b) En déduire que l'équation (E) peut se mettre sous la forme : $3x^2 \equiv 2^n\ (7)$.
2. Recopier puis compléter le tableau de congruence suivant.

$x \equiv \ldots (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$3x^2 \equiv \ldots (7)$							

3. Étudier les restes dans la division de 2^n par 7.
4. Conclure.

Exercices d'entraînement

Déterminer une série de restes

Méthode 6 p. 88

75 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division par 5 de 2^n.
On pourra donner la réponse sous la forme d'un tableau de congruence.
2. En déduire le reste de la division par 5 de $1\,357^{2\,017}$.

76 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $3 \times 4^n + 2$ est-il divisible par 11 ?

77 **1.** Déterminer les restes de la division euclidienne de 5^n par 11 suivant les valeurs de n.
2. En déduire le reste de la division par 11 de $2\,018^{2\,019}$.

78 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n, le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
2. Démontrer alors que $2\,014^{2014} \equiv 7\ (9)$.

79 Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
Proposition 1 Le reste de la division euclidienne de $2\,018^{2\,020}$ par 7 est 2.
Proposition 2 $11^{2\,011}$ est congru à 4 modulo 7.

Conjecturer un critère de divisibilité

Méthode 7 p. 89

80 Démo
Soit n un entier naturel, on sépare son nombre de dizaines a et le chiffre des unités b.
On a alors : $n = 10a + b$.
1. Prouver que n est divisible par 17 si, et seulement si, $a - 5b$ est divisible par 17.
2. Montrer par ce procédé (que l'on peut réitérer) que les nombres : 816 et 16 983 sont divisibles par 17.

81 Un entier x est composé de $(n+1)$ chiffres notés : $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
On note alors : $x = \overline{a_n \ldots a_2\, a_1\, a_0}$.
1. Sachant que $10 \equiv -1\ \ (11)$, montrer que :
$$x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \ldots) - (a_1 + a_3 + \ldots)\ \ (11).$$
2. Énoncer un critère de divisibilité par 11.
3. Déterminer, pour chacun des entiers suivants, son reste dans la division par 11.
a) 123 456 789 **b)** 10 891 089
c) $\underbrace{5555 \ldots 5}_{\text{100 fois}}$ **d)** 147 856 103

82 Démo
1. a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $10^n \equiv 1\ (9)$.
b) On désigne par N un entier naturel écrit en base dix et on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.
c) En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = 2\,014^{2\,014}$.
On désigne par :
- B la somme des chiffres de A,
- C la somme des chiffres de B,
- D la somme des chiffres de C.

a) Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.
b) Sachant que $2\,014 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,504$.
c) Démontrer que $C \leqslant 45$.
d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
e) Démontrer que $D = 7$.

83 On appelle inverse de x modulo 5, un entier y tel que $xy \equiv 1\ (5)$.
1. Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 2$.
2. Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 3$ et $x = 4$.
3. Est-ce que $x = 5$ admet un inverse ? Pourquoi ?
4. À l'aide d'un tableau de congruence, déterminer suivant la valeur de x son inverse modulo 5.
5. À l'aide de ce tableau, résoudre les équations suivantes.
a) $2x \equiv 3\ (5)$ **b)** $9x \equiv 1\ (5)$

Écriture décimale

84 On décide de former des nombres dans le système décimal en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant puis on permute les deux premiers chiffres de gauche. Par exemple, à partir de 4 567 on obtient 5 467 ; à partir de 2 345 on obtient 3 245. Démontrer que tous les entiers naturels ainsi obtenus sont multiples de 11.

85 On considère un entier de 3 chiffres. On appelle *renversé* de cet entier le nombre qui s'écrit en échangeant les chiffres des centaines et des unités. Par exemple, le renversé de 158 est 851. Montrer que la différence entre un entier de 3 chiffres et son renversé est divisible par 9.

Travailler l'oral

86
Le 1er janvier 2012 était un dimanche. Déterminer :
a) le jour de la semaine du 1er janvier 2062.
b) le jour de la semaine du 10 mars 2041.
c) Le jour de la semaine du 11 avril 1953, jour de naissance de Andrew Wiles, célèbre pour avoir démontrer le grand théorème de Fermat.

87 Suite et terminaison décimale

On considère la suite (u_n) d'entiers :

$$u_0 = 14 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 6.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \equiv u_n$ (4).
En déduire que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2$ (4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (4).

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$2u_n = 5^{n+2} + 3.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$2u_n \equiv 28\ (100).$$

c) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

88 Suite et congruence

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. a) Démontrer par récurrence que :
pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.

b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.

c) En déduire que $u_{2\,022}$ est divisible par 7.

2. a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).

b) Sans justification, compléter le tableau suivant.

$m \equiv \dots$ (5)	0	1	2	3	4
$3m + 1 \equiv \dots$ (5)					

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.

d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division de u_n par 5 soit égal à 2 ?

89 Diviseur commun

Soit la suite (a_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{4^{2n+1} + 1}{5}.$$

1. Calculer a_2 et a_3.

2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n est égal à 1 ou à 3.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$a_{n+1} \equiv a_n$ (3).

c) Vérifier que $a_0 \equiv 1$ (3).
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n n'est pas divisible par 3.

d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1$.

90 Divisibilité

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.
M et N ont pour écriture en base 10 abc et bca.

Proposition 1 Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27.

Proposition 2 3 divise $(2^{2n} - 1)$ pour tout entier naturel n.

Proposition 3 Si $x^2 + x \equiv 0$ (6) alors $x \equiv 0$ (3).

91 Cube et terminaison décimale

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2\,009$ (10 000).

A ▸ 1. Quel est le reste de $2\,009^2$ dans la division par 16 ?

2. En déduire que $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009$ (16).

B ▸ Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2\,009^2 - 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1.$$

1. a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b) On rappelle le binôme de Newton à l'ordre 5 :
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.
Démontrer que : pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n\,[u_n^{\,4} + 5(u_n^{\,3} + 2u_n^{\,2} + 2u_n + 1)].$$

c) Démontrer par récurrence que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par $5^n + 1$.

2. a) Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1$ (625).

b) Démontrer alors que : $2\,009^{8\,001} \equiv 2\,009$ (625).

C ▸ On admet que l'on peut montrer que $2\,009^{8\,001} - 2\,009$ est divisible par 10 000. Déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

92 Puissances de 2, 3 ou 5

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où $a \in \mathbb{N}^*$.
Par exemple : $10 = 9 + 1^2$, $13 = 9 + 2^2$, etc.
On se propose d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 2^n \text{ où } a \in \mathbb{N} \text{ et } n \geqslant 4.$$

a) Montrer que si a existe, a est impair.

b) En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 3^n \text{ où } a \in \mathbb{N}, \text{ et } n \geqslant 3.$$

a) Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b) Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c) On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, avec $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 5^n \text{ où } a \in \mathbb{N}, \text{ et } n \geqslant 2.$$

a) En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation est impossible si n est impair.

b) On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2. c)** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

Exercices bilan

93 Rep-units

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, … sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.

Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$N_p = \underbrace{11 \dots 1}_{p \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul. L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.

A ▶ Divisibilité par 3 et 7

1. Divisibilité de N_p par 3.

a) Montrer que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1\ (3)$.

b) En déduire que $N_p \equiv p\ (3)$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que N_p soit divisible par 3.

2. Divisibilité de N_p par 7.

a) Compléter le tableau de congruences, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\}$ tel que $10^m \equiv a\ (7)$.

m	0	1	2	3	4	5	6
a							

b) Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $10^p \equiv 1\ (7)$ si, et seulement si, p est un multiple de 6. On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.

c) Justifier que :
pour tout entier naturel p non nul,

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9}.$$

d) On admet que :

7 divise N_p est équivalent à 7 divise $9N_p$.

En déduire que N_p est divisible par 7 si, et seulement si, p est un multiple de 6.

B ▶ Un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. Soit $n \geqslant 2$.
On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1, soit $n^2 \equiv 1\ (10)$.

a) Compléter le tableau de congruences.

$n \equiv\ (10)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv\ (10)$										

b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que :

$$n = 10m + 1 \quad \text{ou} \quad n = 10m - 1.$$

c) Conclure que $n^2 \equiv 1\ (20)$.

2. Soit $p \geqslant 2$. Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

3. En déduire que, pour $p \geqslant 2$, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

94 Date anniversaire

Algo

Dans cet exercice, on appelle j le numéro du jour de naissance dans le mois et m le numéro du mois de naissance dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai :
$j = 14$ et $m = 5$.

A ▶ Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'exécuter le programme de calcul (A) suivant.

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12.

Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37.

Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1er août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1er août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A). Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m\ (12)$.

b) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

B ▶ Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par :

$$z = 12j + 31m.$$

On donne l'algorithme incomplet suivant.

```
Variables : j, m entiers
Traitement
   pour m de 1 à … faire
      pour j de 1 à … faire
         z ← 12j + 31m
         si … … alors
            Afficher j, m
         Fin si
      Fin pour
   Fin pour
```

1. Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que : $12j + 31m = 503$.

2. Quelle est alors la date d'anniversaire correspondante ?

CONTRÔLE CONTINU

Préparer le BAC L'essentiel

Propriétés de l'ensemble $\mathbb{N}$

- **Principe du bon ordre**

Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.

On exhibe un élément d'une partie de $\mathbb{N}$ pour déduire un plus petit élément.

- **Principe de la descente infinie**

Toute suite dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante est finie.

On utilise ce principe pour montrer que la suite des restes des divisions successives dans l'algorithme d'Euclide finit par un reste nul.

- **Principe des tiroirs**

Si l'on range $(n+1)$ chaussettes dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contiendra au moins 2 chaussettes.

C'est ce qui permet de déduire par exemple un cycle de restes de 2^n dans la division par 9. Le cycle est au maximum un cycle de 9 restes.

Diviseur

Soit a et b deux entiers relatifs.

b divise a, noté $b|a$ si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que :

$$a = kb.$$

On dit aussi que a est un multiple de b.

Comme un entier ne possède qu'un nombre restreint de diviseurs, on cherchera à factoriser une équation ou un problème de divisibilité pour en déduire les solutions.

Congruence

- **Soit $n \geqslant 2$ et $a, b \in \mathbb{Z}$.**
  a et b sont congrus modulo n s'ils sont séparés par un multiple de n :
  $$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$$
- La congruence est une relation d'équivalence : réflexive, symétrique et transitive.

Opération sur les multiples

Si a divise b et c, alors a divise toute combinaison linéaire de b et de c soit

$$\alpha b + \beta c, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

Si un entier n divise a et b dépendant d'un paramètre k, alors on peut trouver une combinaison linéaire de a et de b ne dépendant plus de k qui est divisible par n.

Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On appelle division euclidienne de a par b, l'opération qui au couple $(a\,;b)$ associe le couple $(q\,;r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b$$

Compatibilité

Soit $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$.

La congruence est compatible avec :

l'addition : $a + c \equiv b + d\ (n)$

la multiplication : $ac \equiv bd\ (n)$

la puissance : $a^k \equiv b^k\ (n), k \in \mathbb{N}$.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Résoudre une équation et utiliser la divisibilité	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 3, 4, 36, 37
▶ Manipuler la division euclidienne	Méthode 3	5, 6, 53, 54
▶ Utiliser la congruence	Méthode 4, Méthode 5	10, 11, 12, 13, 62, 63
▶ Déterminer une série de restes	Méthode 6	14, 15, 75, 76
▶ Conjecturer un critère de divisibilité	Méthode 7	18, 19, 80, 81

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-e03-05

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

	A	B	C	D
95 Le nombre de diviseurs positifs de 700 est :	16	18	20	22
96 Le nombre de couples d'entier naturels vérifiant l'équation $5x^2 - 7xy = 17$ est :	0	2	1	4
97 Les entiers n tels que $2x - 3$ divise $n + 5$ sont :	$\{-5\,;1\,;2\,;8\}$	$\{-5\,;1\,;5\,;9\}$	$\{-13\,;-1\,;2\,;13\}$	$\{-13\,;-1\,;1\,;13\}$
98 Il existe un entier k pour lequel $9k + 2$ et $7k + 3$ ont pour diviseur commun d tel que :	$d = 13$	$d = 2$	$d = 3$	$d = 6$
99 Le reste de la division euclidienne de -453 par 13 est :	2	5	9	11
100 On donne : $17\,648 = 17 \times 1\,037 + 19$. Le reste de la division euclidienne de 17 648 par 17 est :	19	2	17	1 037
101 On donne $17\,648 = 17 \times 1\,037 + 19$. Le reste de la division euclidienne de $-17\,648$ par 17 est :	2	19	-2	15
102 L'ensemble des solutions de $3x \equiv 6\ (9)$ est :	$x \equiv 2\ (9)$	$x \equiv 5\ (9)$	$x \equiv 8\ (9)$	$x \equiv 2\ (3)$
103 Pour tout entier naturel naturel n, $2^{3n} - 1$ est divisible par :	5	6	7	8
104 Le chiffre des unités de $3^{1\,000}$ est :	1	3	7	9
105 Le reste de $2\,016^{2\,016}$ dans la division par 5 est :	1	2	3	4
106 Le nombre $2\,021^{2\,021}$ est congru modulo 7 à :	15	17	-3	4

107 Diviseurs

1. Trouver tous les diviseurs positifs de 700. Combien y en a-t-il ?

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$; pour quelles valeurs de n le nombre $\dfrac{6n+9}{2n+1}$ est-il un entier relatif ?

Méthode 2 p. 83

108 Équations

Trouver tous les couples d'entiers naturels $(x\ ;\ y)$ qui vérifient :

a) $x(y+1) = 14x$ **b)** $(x+2y)(2x-3y)=15$
c) $x^2 - y^2 = 20$ **d)** $2x^2 = 4y + 1$

Méthode 1 p. 83

109 Divisibilité

Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$(n-2)$ divise $(2n+3)$.

Méthode 2 p. 83

110 Diviseurs communs (1)

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on pose $a = 3k + 2$ et $b = 5k - 7$.

1. Montrer que si d divise a et b alors d divise 31. On citera le théorème utilisé.

2. Quels sont les diviseurs communs positifs possibles à a et b ?

Méthode 1 p. 83

111 Diviseurs communs (2)

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on donne : $a = 9k - 4$ et $b = 5k - 3$.

Déterminer les valeurs possibles d'un diviseur d commun à a et b.

Méthode 1 p. 83

112 Divisibilité

Soit k un entier relatif et $A = (2k+1)^2 - 1$.

1. Factoriser A.

2. Montrer que A est divisible par 8 pour tout entier relatif k.

Méthode 1 p. 83

113 Division euclidienne : vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

1. Proposition 1 Si le reste dans la division d'un entier n par 66 est 5 alors 5 est le reste de n dans la division par 11.

2. Proposition 2 Si le reste dans la division d'un entier n par 11 est 5 alors 5 est le reste de n dans la division par 66.

Méthode 3 p. 85

114 Division euclidienne

La somme de deux entiers naturels a et b est égale à 1 400. Le reste de la division euclidienne de a par b est 16.

1. Traduire l'énoncé. Quelle condition a-t-on sur b ?

2. Montrer que b est un diviseur de 1 384.

3. En utilisant le fait que 173 est premier, déterminer les valeurs possibles pour a et b.

Méthode 2 p. 83

115 Restes

Soit b un entier naturel non nul. Le quotient dans la division euclidienne de 524 par b est 15. Quels sont les restes possibles ?

Méthode 3 p. 85

116 Quotient

Trouver tous les entiers naturels qui ont un reste égal au cube de leur quotient dans la division euclidienne par 64.

Méthode 2 p. 83

117 Congruence

Démo

Soit $n \geqslant 2$ et les entiers relatifs a, b, c, d tels que :

$$a \equiv b\ (n) \text{ et } c \equiv d\ (n).$$

Montrer que : $a + c \equiv b + d\ (n)$.

Méthode 4 p. 87

118 Restes et congruence

1. Montrer que : $3^3 \equiv -1\ (7)$.

2. En déduire que $1\,515^{2\,004} - 1$ est divisible par 7 et que le reste de $3^{2\,018}$ par 7 est 2.

Méthode 3 p. 85

119 Pièces d'un puzzle

En rangeant les n pièces de son puzzle, Raja constate que :

- si elle les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces ;
- si elle les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces ;
- si elle les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièces ;
- et si elle les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièce.

Sa mère affirme qu'alors $(2n - 11)$ est divisible par 5, 7, 9 et 11.

1. A-t-elle raison ?

2. Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2 000 ?

Méthode 4 p. 87

120 Résolution d'équations

Résoudre les équations suivantes.

a) $7 - x \equiv 5\ (3)$ **b)** $x^2 + x + 3 \equiv 0\ (5)$

Méthode 5 p. 87

121 Tableau de congruence

Soit l'équation (E) : $x^2 - x + 4 \equiv 0\ (6)$.

1. Recopier puis remplir le tableau de congruence suivant.

$x \equiv \ldots(6)$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ldots(6)$						
$-x + 4 \equiv \ldots(6)$						
$x^2 - x + 4 \equiv \ldots(6)$						

2. Résoudre alors l'équation (E).

Méthode 5 p. 87

122 Cycle de restes

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Établir le cycle des restes de 4^n dans la division par 7.

2. En déduire le reste de $2\,020^{2\,019}$ dans la division par 7.

Méthode 4 p. 87

Exercices vers le supérieur

123 Le numéro INSEE ou de sécurité sociale

Algo

Le numéro de sécurité sociale est une succession de 13 chiffres suivie d'une clé de 2 chiffres. Par exemple 2 84 07 17 300 941 clé 46.

On pose alors A le nombre composé des 13 chiffres et K la clé de contrôle constitué par les deux derniers chiffres.
Dans notre l'exemple, on a donc :
$A = 2\,84\,07\,17\,300\,941$ et $K = 46$.
Soit r le reste de la division de A par 97.
La clé de contrôle est alors $K = 97 - r$.
Pour rendre exécutable le calcul sur une calculatrice, on décompose A en deux séries de nombres. B correspond au 7 premiers chiffres en partant de la gauche et C aux six derniers.
On a alors : $A = 10^6 \times B + C$.

1. Démontrer que : $A \equiv 27B + C\ (97)$.
2. Vérifier alors que la clé de l'exemple est 46.
3. Écrire une fonction `cle(B,C)` en **Python** qui permet, en rentrant B et C, de calculer la clé K.
Rentrer cette fonction sur la calculatrice.
Tester en cherchant la clé du numéro de sécurité sociale suivant : 1 62 06 74 086 017.
4. Montrer que si dans le nombre complet en incluant la clé (15 chiffres), un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée, et qu'il en est de même si deux chiffres consécutifs sont permutés.

124 Écriture décimale et divisibilité

Démo

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$
1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. a) Démontrer par récurrence que :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 3u_n = 10^{n+1} - 7$$
b) En déduire l'écriture décimale de u_n.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
4. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ (11).$$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.
5. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1\ (17)$.
b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{16k+8} est divisible par 17.

125 Carré parfait

Algo

Montrer, sans utiliser de calculatrice et à l'aide des congruences, que 1 295 377 n'est pas un carré parfait.

126 Système de congruences

On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 1\ (5) \end{cases}$

1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors $(n - 11)$ est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

127 Base 12 et divisibilité

On note 0, 1, 2 , … , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base12. Par exemple :
$$\begin{aligned} \overline{\beta\alpha 7}^{12} &= \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 \\ &= 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 \\ &= 1711 \text{ en base } 10 \end{aligned}$$
1. a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 par $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 par :
$N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
Dans la suite, un entier N s'écrira en base 12 par :
$N = \overline{a_n \ldots a_1\, a_0}^{12}$.

2. a) Démontrer que $N \equiv a_0\ (3)$.
En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.
Confirmer avec son écriture en base 10.
3. a) Démontrer que :
$$N \equiv a_n + \ldots + a_1 + a_0\ \ (11).$$
En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.
Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x\,4\,y}^{12}$.
Déterminer les valeurs de x et y pour lesquelles N est divisible par 33. Déterminer alors les nombres N possibles avec leurs écritures en base 10.

128 Division euclidienne

Calculer le reste des divisions suivantes :
a) $3^{2\,089}$ par 25
b) $55^{234\,567}$ par 7
c) $4321^{1\,234} + 1234^{4\,321}$ par 7

129 Divisibilité

Démo

Soit $a \in \mathbb{N}$, montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2.
On pourra raisonner par récurrence.

130 Résolution d'équation (1)

On considère l'équation (E) : $17x^2 - 31y^2 = 22$ où x et y sont des entiers relatifs.
En utilisant les congruences modulo 8, montrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

131 Résolution d'équation (2)

On veut résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$:
$$x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \quad (12).$$
1. Déterminer la forme canonique de :
$$x^2 - 4x + 3.$$
2. Compléter le tableau suivant.

$t^1 \equiv \ldots (12)$	0	1	2	3	4	5	6
$t^2 \equiv \ldots (12)$							

3. En déduire les solutions de $t^2 \equiv 1$ (12).
4. Conclure.

132 Équations

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.
a) $6x \equiv 3$ (4)
b) $3x \equiv 4$ (7)
c) $4x \equiv 10$ (26)
d) $2x \equiv 5$ (11)

133 Systèmes

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x \equiv 3\,(5) \\ x \equiv 1\,(6) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x \equiv 3\,(4) \\ 4x \equiv 1\,(3) \end{cases}$

134 Équation du second degré

On admet qu'un nombre premier p divise le produit ab si, et seulement si, p divise a ou b.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 - 2x + 2 \equiv 0$ (17).

135 Divisibilité

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$:
a) l'entier $5^{2n} + 5^n + 1$ est-il divisible par 3 ?
b) l'entier $2^{2n} + 2^n + 1$ est-il divisible par 7 ?

136 Forme d'un carré et d'un cube

1. Montrer que le carré d'un entier non multiple de 5 est de la forme : $5n + 1$ ou $5n - 1$.
2. Montrer que le cube d'un entier non multiple de 7 est de la forme : $7n + 1$ ou $7n - 1$.

137 Carré parfait

Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.

138 Divisibilité

1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 6 divise $(5n^3 + n)$.
2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $(4^{2n} + 2^{2n} + 1)$.

139 Décomposition de (8n + 7)

On veut montrer que le nombre $(8n + 7)$ n'est jamais la somme de trois carré parfait.
1. Quelle est la parité de $(8n + 7)$?
2. En déduire en raisonnant modulo 8, que la somme de trois carrés ne peut être congru à 7.
3. Conclusion.

140 Somme de trois cubes

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

141 Congruence puissance n

On rappelle la formule du binôme de Newton :
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 2$, montrer que :
$$a \equiv b\ (n) \Rightarrow a^n \equiv b^n\ (n^2).$$

142 Solutions rationnelles

Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
Le but de cet exercice est de montrer que $P(x) = 0$ n'a pas de solutions entières ou rationnelles.

1. On suppose qu'il existe une solution rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.
Montrer que : $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$ (E).
2. Montrer que (E) se met sous la forme :
$$p^2(p - q) + q^3 \equiv 0 \quad (2) \quad (E').$$
3. Montrer que (E') n'admet des solutions que si p est pair.
4. Conclure.

143 Duel Fort Boyard

Un candidat de Fort Boyard est opposé au « Maître du temps » dans le duel suivant.
Face à un alignement de 20 bâtonnets, chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets.
Celui que retire le dernier bâtonnet a perdu.
Le candidat commence.
Indiquer une méthode où le candidat est sûr de gagner son duel.

Travaux pratiques

TICE Algo 30 min Calculer Modéliser

1 Diviseurs d'un entier

On étudie dans cet exercice la programmation de la liste des diviseurs d'un entier naturel non nul.

A ▶ Propriété

1. Déterminer à la main les diviseurs de 150 et 144 en recopiant et complétant les tableaux suivants.

Diviseurs	1	2				
Diviseurs	150	75				

Diviseurs	1	2						
Diviseurs	144	72						

2 Que vérifie les diviseurs de la 1^{re} ligne par rapport à ceux de la 2^e ligne ?
Quelle est la propriété que vérifie le dernier diviseur de la 1^{re} ligne par rapport à 150 et 144 ?

B ▶ Programmation

1. Pour déterminer la liste des diviseurs d'un entier $n \geqslant 2$ donné, on crée en **Python** la fonction **`div`** avec **`n`** comme argument. On écrit le programme ci-contre dont un élément a été effacé

2. Que remarque-t-on sur la liste **`D`** lorsque l'on rentre **`div(144)`** ? Que faut-il ajouter pour remédier à ce problème ?
Que faut-il ajouter pour que la fonction **`div`** donne le nombre de diviseurs du nombre **`n`** ?

3. La fonction **`div`** de la question **1.** utilise une boucle conditionnelle. Écrire une fonction **`div2`** qui utilise une boucle itérative.

```
Import math input*
def div(n):
      D=[]
      i=1
      while (…):
         if n%i == 0:
            D.append(i)
            D.append(n//i)
         i=i+1
      D.sort()
      return D
```

ALGO 20 min Calculer Modéliser

2 Division à l'école élémentaire

Pour faire comprendre la division d'un entier naturel par un entier naturel non nul à l'école primaire, on procède par soustractions successives, c'est-à-dire que, si l'on veut diviser 32 par 5, on soustrait 5 à 32 autant de fois que cela est possible.

On a ainsi enlevé 6 fois 5 et il reste 2, on peut donc écrire : $32 = 5 \times 6 + 2$.

$32 - 5 =$	27
$27 - 5 =$	22
$22 - 5 =$	17
$17 - 5 =$	12
$12 - 5 =$	7
$7 - 5 =$	2

1. Écrire un programme en **Python** permettant de trouver le quotient q et le reste r de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b ($b \neq 0$) par cette méthode.
Tester cet algorithme pour les divisions suivantes : 32 par 5 ; 12 par 13 et 1 412 par 13.

2. Améliorer cet algorithme de façon à ce qu'il puisse trouver le quotient q et le reste r dans la division d'un entier relatif a par un entier naturel b non nul.
Tester cet algorithme pour la division : – 114 par 8.

Algo TICE 55 min Chercher Raisonner Communiquer

3 Algorithme de Luhn

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$
où a_1, a_2, …, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant, en langage naturel, permet de valider la conformité d'un numéro de carte.

```
I prend la valeur 0
P prend la valeur 0
R prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à 7 :
     R prend la valeur du reste de la division euclidienne de 2a_{2k+1} par 9
     I prend la valeur I+R
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
     P prend la valeur P+a_2k
Fin Pour
S prend la valeur I+P+c
Si S est un multiple de 10 alors :
     Afficher « Le numéro de la carte est correct »
Sinon :
     Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct »
Fin Si
```

1. On considère le numéro de carte suivant : 5 635 4 002 9 561 3 411.

a) Compléter le tableau suivant permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

c) Résumer en une phrase ce que fait cet algorithme qui s'appelle l'algorithme de Luhn.

b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?

2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.

3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.

4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?