3

Divisibilité, division euclidienne, congruence

Pour vérifier le numéro d'une carte bancaire, on utilise un algorithme qui calcule les restes dans la division par 10 sur les 15 premiers chiffres. Le dernier chiffre, appelé la clé, permet de valider le numéro de la carte.

À l'aide d'une relation modulo 10, comment vérifier le numéro d'une carte bleue ? ↪ TP 3, p. 103

VIDÉO

Le numéro d'une carte de crédit

lienmini.fr/maths-e03-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-e03-02 — Les rendez-vous Sésamath

1 Diviser par 3 et 9

1. Quels sont, parmi les nombres suivants, ceux qui sont divisibles par 3 ? par 9 ?

a) 129 **b)** 567 **c)** 5 634 **d)** 21 573

2. Rappeler les règles de divisibilité par 3 et par 9.

2 Diviser par 6 et 18

1. Quels sont, parmi les nombres suivants, ceux qui sont divisibles par 6 ? par 18 ?

a) 456 **b)** 651 **c)** 558 **d)** 642 **e)** 1 516 **f)** 50 166

2. Donner un critère pour qu'un nombre soit divisible par 6 et par 18.

3 Calculer un reste

1. Trouver les restes des divisions suivantes mentalement.

a) 1 951 par 3 **b)** 1 945 par 9 **c)** 1 547 par 5 **d)** 2 132 par 4

2. Comment déterminer ces restes sans effectuer la division par 3, 9, 5 ou 4 ?

3. On divise un entier par 7. Soit r son reste. Quelles sont les valeurs que peut prendre r ?

4. On divise un entier par 23. On trouve 27 comme reste. Est-possible ? Pourquoi ?

5. On donne : $117 = 6 \times 17 + 15$.

a) Dans la division de 117 par 17, donner le dividende, le quotient et le reste.

b) Quel est le reste dans la division de 117 par 6 ?

4 Déterminer la parité d'une somme et d'un produit

1. Un nombre n est la somme de deux entiers a et b.

a) Quelles sont les parités de a et de b si n est pair ? Si n est impair ?

b) Énoncer une règle sur la parité de la somme de deux entiers.

2. Un nombre n est le produit de deux entiers a et b.

a) Quelles sont les parités de a et de b si n est pair ? Si n est impair ?

b) Énoncer une règle sur la parité du produit de deux entiers.

5 Déterminer la parité d'un carré

Un nombre n est le carré d'un entier a.

1. Quelle est la parité de a si n est pair ? Si n est impair ?

2. Énoncer une règle sur la parité d'un entier et de son carré.

6 Comprendre un algorithme en langage Python

Qu'affiche cet algorithme pour `f(1964)` ?

```
def f(n):
    s = 0
    n = str(n)
    L = list(n)
for i in range(len(L)):
        s = s + int(L[i])
return s
```

Activités

20 min

1 Trouver et utiliser la liste des diviseurs d'un nombre

A ▸ Déterminer la liste des diviseurs

1. Déterminer la liste de tous les diviseurs de 54, 36 et 29.

2. Pourquoi un entier supérieur ou égal à 2 possède-t-il au moins deux diviseurs ?

3. a) Pourquoi, lorsque l'on connaît un diviseur, on en connaît un deuxième ?
b) En déduire que si le nombre n'est pas un carré, on obtient un nombre pair de diviseurs.

4. En utilisant les réponses aux questions précédentes, déterminer les 16 diviseurs de 120 et remplir le tableau ci-dessous.

Diviseurs	1	2						
Diviseurs	120	60						

B ▸ Utiliser la liste des diviseurs

1. Déterminer tous les diviseurs de 24.

2. En déduire tous les couples d'entiers $(x\,;y)$ tels que : $xy = 24$.

3. En vous inspirant des questions **1.** et **2.**, déterminer les couples d'entiers $(x\,;y)$ tels que : $(x-1)(y+1) = 27$.

↪ Cours 1 p. 82

20 min

2 Définir la division euclidienne

A ▸ Égalité associée à une division de deux entiers positifs

1. Poser la division de 528 par 14. Quel est le quotient ? Quel est le reste ?

2. Quelle égalité peut-on écrire suite à cette division ?

3. Parmi les égalités suivantes, déterminer celles qui représentent une division euclidienne par 5.
Pour celles que n'en sont pas, modifier l'égalité afin qu'elles le deviennent

a) $78 = 14 \times 5 + 8$ **b)** $116 = 23 \times 5 + 1$ **c)** $149 = 29 \times 5 + 4$ **d)** $153 = 31 \times 5 - 2$

4. Lorsqu'on divise un entier positif a par un autre b, quelle condition doit vérifier le reste ?

B ▸ Division d'un entier négatif par un entier naturel

1. Déterminer les deux entiers relatifs q et r tels que : $-500 = 7 \times q + r$ avec $0 \leqslant r < 7$.
Cette égalité représente la division euclidienne de -500 par 7. Les entiers q et r sont respectivement le quotient et le reste.

2. Poser la division de 735 par 11 puis donner, avec les contraintes de la question précédente, le quotient et le reste de la division de -735 par 11.

↪ Cours 2 p. 84

Histoire des Maths

30 min

3 Travailler avec l'arithmétique modulaire

A ▸ Nombre modulo 7

On dit que deux nombres a et b sont en relation modulo 7 s'ils ont le même reste dans la division par 7.

1. Montrer que les paires de nombres suivantes sont en relation modulo 7.

a) 93 et 2 **b)** 158 et 221 **c)** 68 et (-2) **d)** 289 et (-61)

2. Donner un entier $0 \leqslant a < 7$ et un entier $-7 \leqslant b < 0$ en relation modulo 7 avec les entiers suivants.

a) 24 **b)** -19 **c)** 47 **d)** -56 **e)** 151

B ▸ Problème de calendrier

1. Calculer le nombre n de jours séparant le 1er janvier 2019 et le 1er janvier 2040.

2. Le 1er janvier 2019 était un mardi.

a) Quel est le reste du nombre n par 7 ?

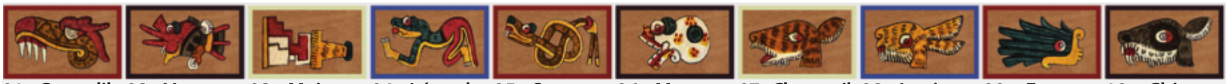
b) Quel est le jour de la semaine du 1er janvier 2040 ?

C ▸ Signe astral chez les Aztèques (modulo 20)

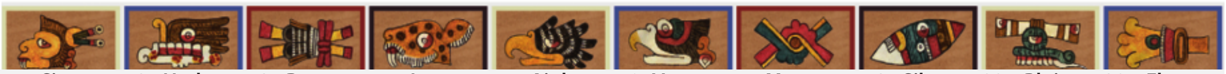
L'année de référence est soit 1997 soit 1917 (pour les personnes nées avant le 01/01/1997).
a : nombre d'années entre l'année de naissance et l'année de référence.
b : quotient dans la division de a par 4.
c : nombre de jours entre le 1er janvier de l'année de naissance et la date de naissance.

1. Déterminer le reste r dans la division par 20 de : $5a + b + c + 6$.

2. Découvrez votre signe aztèque !



01 - Crocodile 02 - Vent 03 - Maison 04 - Lézard 05 - Serpent 06 - Mort 07 - Chevreuil 08 - Lapin 09 - Eau 10 - Chien



11 - Singe 12 - Herbe 13 - Roseau 14 - Jaguar 15 - Aigle 16 - Vautour 17 - Mouvement 18 - Silex 09 - Pluie 20 - Fleur

D ▸ Relations sur les restes

1. On dit que deux nombres a et b sont en relation modulo 9 s'ils ont même reste dans la division par 9. On impose que : $-4 \leqslant b < 5$.
Déterminer pour chaque valeur de a l'entier b qui lui est associé dans la relation modulo 9.

a) $a = 11$ **b)** $a = 24$ **c)** $a = 62$ **d)** $a = 85$ **e)** $a = -12$ **f)** $a = 32$

2. Soit $a \geqslant 100$ un entier naturel. On pose : $a = 100b + c$ avec b et c entiers naturels tels que $0 \leqslant c < 100$. On note r le reste de la division de c par 4.

a) Quel est le reste dans la division euclidienne de a par 4 ? Formuler un critère de divisibilité par 4.

b) Sans utiliser de calculatrice, justifier que 17 052 est divisible par 4, tandis que $-5\,434$ ne l'est pas.

3. a) Quel est le reste de la division par 11 de 23 et 35 ?

b) Quel est le reste de la division de 58 par 11 ? Que constate-t-on ?

c) Effectuer à la main la multiplication 23×35 puis déterminer son reste. Que constate-t-on ?

d) Compléter les phrases suivantes : « Dans la division par 11, le reste de la somme est …. » ;
« Dans la division par 11 le reste du produit est …. ».

↪ Cours 3 p. 86

Cours

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition Arithmétique

L'arithmétique est l'étude des entiers naturels ou relatifs et de leur rapport.
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : …, – 2, – 1, 0, 1, 2, …

Propriétés Axiomes dans $\mathbb{N}$

- **Principe du bon ordre : toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.**
- **Principe de la descente infinie : toute suite dans $\mathbb{N}$ strictement décroissante est finie.**
- **Principe des tiroirs : si l'on range $(n + 1)$ chaussettes dans n tiroirs, alors un tiroir contiendra au moins deux chaussettes.**

Exemple

Dans la division par 7 d'un entier non multiple de 7, les restes possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on est alors sûr qu'à partir de la 7e division, donnant la 7e décimale, on obtiendra un reste déjà obtenu (principe des tiroirs).
Par exemple la partie décimale de : $\frac{22}{7} = 3{,}142857\ 142857\ldots$ est périodique.

Définition Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que b divise a, noté $b|a$ si, et seulement si, il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$.

Remarque

Autres formulations : « b est un diviseur de a », « a est divisible par b », « a est un multiple de b ».

Exemples

- $15 = 3 \times 5$ donc 3 et 5 sont des diviseurs de 15. Les diviseurs dans $\mathbb{N}$ de 15 sont : 1, 3, 5, 15.
- $-45 = (-5) \times 9$ donc -5 et 9 sont des diviseurs de -45.

Les diviseurs de (-45) dans $\mathbb{Z}$ sont : $-45, -15, -9, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 9, 15, 45$.

Propriétés Multiples et diviseurs

- **0 est multiple de tout entier a car $0 = 0 \times a$.**
- **1 divise tout entier a car $a = 1 \times a$.**
- **Si a est un multiple de b et si $a \neq 0$, alors $|a| \geqslant |b|$.**
- **Si a divise b et b divise a avec a et b non nuls, alors $a = b$ ou $a = -b$.**

Théorème Opérations sur les multiples

Soit a, b, c trois entiers relatifs.
Si a divise b et c, alors a divise toute combinaison linéaire de b et c soit : $(\alpha b + \beta c)$ avec α et β entiers relatifs

Démonstration

Si a divise b et c, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que : $b = ka$ et $c = k'a$.
On a alors pour tous entiers relatifs α et β : $\alpha b + \beta c = (\alpha k + \beta k')a$, donc a divise $\alpha b + \beta c$.

Exemple

Soit k un entier naturel, on pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$. Pour déterminer une condition sur les diviseurs communs positifs à a et b, on cherche à éliminer k par une combinaison linéaire de a et b, en considérant 36 comme multiple commun à 9 et 12 : $4a - 3b = 4(9k + 2) - 3(12k + 1) = 36k + 8 - 36k - 3 = 5$.
Un diviseur commun positif à a et b doit diviser 5, ce diviseur ne peut être que 1 ou 5.

EXOS
Méthodes
lienmini.fr/maths-e03-03
Les rendez-vous
Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Résoudre une équation

Énoncé

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que : $x^2 = 2xy + 15$.

Solution

Isolons les inconnues x et y puis factorisons par x :

$x^2 - 2xy = 15 \Leftrightarrow x(x-2y) = 15$. 1

On détermine les diviseurs positifs de 15 : $D_{15} = \{1\,;3\,;5\,;15\}$. 2

Comme x et y sont positifs : $x > x - 2y$ et on a les décompositions :

$\begin{cases} x = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

On trouve alors :

$\begin{cases} x = 15 \\ y = \dfrac{x-1}{2} = 7 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 5 \\ y = \dfrac{x-3}{2} = 1 \end{cases}$

On obtient les couples solutions : (15 ; 7) et (5 ; 1).

Conseils & Méthodes

1 La résolution d'équations à solutions entières n'utilise pas les mêmes méthodes que dans $\mathbb{R}$: pour utiliser la divisibilité on cherche à factoriser.

2 Les diviseurs ne peuvent être que les facteurs d'une décomposition de 15.

À vous de jouer !

1 Déterminer les couples $(x\,;y)$ d'entiers naturels qui vérifient les équations suivantes.

a) $x^2 = y^2 + 21$ **b)** $x^2 - 7xy = 17$

2 Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :

a) $n^2 + n = 20$ **b)** $n^2 + 2n = 35$

↪ Exercices 36 à 52 p. 92

Méthode 2 Utiliser la divisibilité

Énoncé

Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $(n-3)$ divise $(n+5)$.

Solution

$(n-3)$ divise $(n+5)$ donc il existe un entier relatif k tel que : $n + 5 = k(n-3)$. 1

Comme $5 = -3 + 8$, on obtient : $(n-3) + 8 = k(n-3)$.

On factorise par $(n-3)$: $(n-3)(k-1) = 8$. 2

$(n-3)$ est alors un diviseur de 8.

Les diviseurs de 8 dans $\mathbb{Z}$ sont : 3

$D_8 = \{-8\,;-4\,;-2\,;-1\,;1\,;2\,;4\,;8\}$.

Rassemblons les solutions dans un tableau

$n-3$	-8	-4	-2	-1	1	2	4	8
n	-5	-1	1	2	4	5	7	11

Conseils & Méthodes

1 Traduire l'énoncé avec une égalité.

2 Factoriser l'égalité pour utiliser les diviseurs de 8.

3 Les diviseurs sont à chercher dans $\mathbb{Z}$: ne pas oublier les diviseurs négatifs !

À vous de jouer !

3 Déterminer les entiers relatifs n tels que :

a) $n + 3$ divise $n + 10$.

b) $n + 1$ divise $3n - 4$.

4 **1.** Démontrer que $(n-4)$ divise $(n+17)$ équivaut à $(n-4)$ divise 21.

2. Déterminer alors toutes les valeurs de $n > 4$ telles que $\dfrac{n+17}{n-4}$ soit un entier.

↪ Exercices 36 à 52 p. 92

Cours

2 Division euclidienne

Définition **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**

Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul.

On appelle division euclidienne de a par b l'opération qui, au couple $(a\,,b)$, associe l'unique couple d'entiers relatifs $(q\,;r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b.$$

a est le dividende,
b est le diviseur,
q est le quotient,
r est le reste.

Démonstration

① Montrons **l'existence** du couple $(q\,,r)$ pour $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $a \geqslant 0$.

Soit E l'ensemble des entiers e tels que $be > a$.

E n'est pas vide : en effet $b \geqslant 1 \overset{\times(a+1)}{\Rightarrow} b(a+1) \geqslant a+1 \Rightarrow b(a+1) > a \Rightarrow (a+1) \in \mathrm{E}$.
E est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc E admet un plus petit élément m tel que $bm > a$ et $b(m-1) \leqslant a$.
On pose alors $q = m-1$, on a alors : $bq \leqslant a < b(q+1) \overset{-bq}{\Rightarrow} 0 \leqslant a - bq < b$.
En posant $r = a - bq$ on alors : $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
Il existe donc un couple $(q\,;r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b.$$

- Pour $a < 0$.

On pose $a' = a(1-b)$, comme $b \geqslant 1 \overset{\times(-1)}{\Rightarrow} -b \leqslant -1 \overset{+1}{\Rightarrow} 1 - b \leqslant 0$

On a alors $a(1-b) \geqslant 0$ soit $a' \geqslant 0$, on peut alors utiliser le cas où $a \geqslant 0$ avec a' et b.
Il existe un couple $(q'\,;r)$ tel que : $a' = bq' + r$ avec $0 \leqslant r < b$.
En revenant à a, on a alors : $a(1-b) = bq' + r \Rightarrow a - ab = bq' + r \Rightarrow a = b(q' + a) + r$.
En posant $q = q' + a$, on obtient alors :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leqslant r < b.$$

② Montrons **l'unicité** du couple $(q\,;r)$.
On suppose qu'il existe deux couples $(q\,;r)$ et $(q'\,;r')$ tels que :
$a = bq + r = bq' + r'$ *avec* $0 \leqslant r < b$ *et* $0 \leqslant r' < b$.
$bq + r = bq' + r' \Leftrightarrow b(q - q') = r' - r$ avec $-b < r' - r < b$.
b divise alors$(r' - r)$ qui est compris strictement entre $-b$ et b donc $r' - r = 0$ d'où $r' = r$
Cela entraîne alors $q' = q$. Le couple $(q\,;r)$ est unique.

Remarques

- La condition $0 \leqslant r < b$ assure l'unicité du couple $(q\,;r)$.
- Les restes possibles dans la division par 7 sont alors : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Exemples

- La division de 114 par 8 donne : $114 = 8 \times 14 + 2$.
- La division de -114 par 8 donne : $-114 = 8 \times (-15) + 6$.

$$\begin{array}{r|l} 114 & 8 \\ \hline 2 & 14 \end{array}$$

En effet : $114 = 8 \times 14 + 2 \Leftrightarrow -114 = 8 \times (-14) - 2$

$$\Leftrightarrow -114 = 8 \times (-14) - 8 + 6$$
$$= 8 \times (-15) + 6.$$

EXOS
Méthodes
lienmini.fr/maths-e03-03
Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Manipuler la division euclidienne

Énoncé

1. **Trouver tous les entiers n dont le quotient dans la division euclidienne par 5 donne un quotient égal à trois fois le reste.**

2. **Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer ce diviseur b.**

3. **Montrer qu'un nombre pair n non divisible par 4 est tel que son reste dans la division par 4 est 2.**

4. **On divise 439 par b : le quotient est 13. Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?**

Solution

1. $n = 5q + r$ avec $0 \leqslant r < 5$ 1

$q = 3r$ donc $n = 15r + r = 16r$ 2

r	0	1	2	3	4
n	0	16	32	48	64

3

2. On note q et q' les quotients respectifs des divisions par b :

$$\begin{cases} a = bq + 8 & b > 8 \\ 2a = bq' + 5 & b > 5 \end{cases}$$ 4

En multipliant la première équation par 2 et en soustrayant terme à terme, on trouve :

$2bq + 16 - bq' - 5 = 0 \Leftrightarrow b(2q - q') = -11$ 5

b est donc un diviseur de -11 supérieur à 8,
on en conclut alors que : $b = 11$. 6

3. Les restes r possibles dans la division par 4 sont : 0, 1, 2 et 3. 7

n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.

La division de $n = 2k$ par 4 donne : $2k = 4q + r \Leftrightarrow r = 2(k - 2q)$.

2 divise r donc les seuls restes possibles sont 0 ou 2.

n n'étant pas divisible par 4 son reste ne peut être nul. Par conséquent le seul reste possible est 2.

Un nombre pair non divisible par 4 admet 2 comme reste dans la division par 4.

4. $13b \leqslant 439$ donc $b \leqslant \dfrac{439}{13}$ et $14b > 439$ donc $b > \dfrac{439}{14}$ on a alors $\dfrac{439}{14} < b \leqslant \dfrac{439}{13}$ d'où $31{,}35 < b \leqslant 33{,}77$. 8

Deux valeurs de b sont possibles : $b_1 = 32$ ou $b_2 = 33$.

Ce qui donne pour reste $r_1 = 439 - 32 \times 13 = 23$ ou $r_2 = 439 - 33 \times 13 = 10$.

Conseils & Méthodes

1 Ne pas oublier la condition sur le reste.

2 Exprimer n en fonction du reste r.

3 Les restes possibles dans la division par 5 sont : 0, 1, 2, 3, 4.

4 Ne pas oublier la condition sur le diviseur b qui doit être inférieur au reste.

5 On ne cherche pas a donc on cherche à l'éliminer.

6 La condition sur b permet de conclure.

7 Analyser tous les cas de figure.

8 Lorsqu'on divise 439 par b, il y va 13 fois mais pas 14.

À vous de jouer !

5 Trouver les entiers naturels n qui, dans la division euclidienne par 4, donnent un quotient égal au reste.

6 Dans la division euclidienne par un entier b, un nombre a a pour quotient 15 et pour reste 51.
a) Est-ce possible ?
b) Si oui, donner le plus petit nombre a possible.
Si non expliquer pourquoi.

7 Quel est le reste d'un entier impair n multiple de 3 dans la division par 6 ?

8 Trouver un entier naturel qui, dans la division euclidienne par 23, a pour reste 1 et, dans la division euclidienne par 17, a le même quotient et pour reste 13.

9 Dans la division euclidienne entre deux entiers positifs, le dividende est 857 et le quotient 32.
Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?

↪ Exercices 53 à 61 p. 92

Cours

3 Congruence

Définition Entiers congrus à n

Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$), a et b deux entiers relatifs.
On dit que les entiers a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont le même reste dans la division par n. On note alors : $a \equiv b \bmod n$ ou $a \equiv b\ (n)$ ou $a \equiv b\ [n]$.

Exemples

① $57 \equiv 15\ (7)$ car $57 = 7 \times 8 + 1$ et $15 = 7 \times 2 + 1$.

② $41 \equiv -4\ (9)$ car $41 = 9 \times 4 + 5$ et $-4 = 9 \times (-1) + 5$.

Remarques

- Un nombre est congru à son reste dans la division par n : $2\,019 \equiv 9\ (10)$, $17 \equiv 1\ (4)$.
- La parité s'exprime par : $x \equiv 0\ (2)$ si x est pair et $x \equiv 1\ (2)$ si x est impair.
- n est un diviseur de a si, et seulement si, $a \equiv 0\ (n)$.

Propriété Relation d'équivalence

La congruence est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tous entiers a, b, c on a :
① $a \equiv a\ (n)$ (réflexivité),
② $a \equiv b\ (n) \Rightarrow b \equiv a\ (n)$ (symétrie),
③ $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n) \Rightarrow a \equiv c\ (n)$ (transitivité).

Théorème Multiples

Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$), a et b deux entiers relatifs : $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a - b \equiv 0\ (n)$.

Démonstration

On démontre l'équivalence par double implication.

- $a \equiv b\ (n)$, il existe alors deux entiers relatifs q et q' tels que : $\begin{cases} a = nq + r \\ b = nq' + r \end{cases}$ avec $0 \leqslant r < n$.

Par soustraction terme à terme $a - b = n(q - q')$ donc $(a - b)$ est multiple de n d'où $a - b \equiv 0\ (n)$.

- Réciproquement, $a - b \equiv 0\ (n)$ donc il existe un entier relatif k tel que : $a - b = kn$ (Éq. 1).

La division euclidienne de a par n donne : $a = nq + r$ avec $0 \leqslant r < n$ (Éq. 2).
(Éq. 2) dans (Éq. 1) donne : $nq + r - b = kn \Leftrightarrow -b = kn - nq - r \Leftrightarrow b = (q - k)n + r$.

Théorème Compatibilité

Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$) et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant : $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$.
La relation de congruence est compatible avec :
① l'addition : $a + c \equiv b + d\ (n)$,
② la multiplication : $ac \equiv bd\ (n)$,
③ avec les puissances : $a^k \equiv b^k\ (n)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Démonstrations

① et ② ↪ **Apprendre à démontrer** p. 90

Exemples

- $22 + 37 \equiv 1 + 2\ (7) \Leftrightarrow 59 \equiv 3\ (7)$
- $22 \times 37 \equiv 1 \times 2\ (7) \Leftrightarrow 814 \equiv 3\ (7)$
- $22^{50} \equiv 1^{50}\ (7) \Leftrightarrow 22^{50} \equiv 1\ (7)$ et $39^3 \equiv 2^3\ (7) \Leftrightarrow 39^3 \equiv 8 \equiv 1\ (7)$

Exercices résolus

Méthode 4 Utiliser la congruence

Énoncé

Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Solution

$3^{n+3} = 3^n \times 3^3$ et $4^{4n+2} = (4^4)^n \times 4^2$ **1**

$3^3 = 27 = 11 \times 2 + 5$ donc $3^3 \equiv 5\ (11)$

$4^2 = 16 = 11 \times 1 + 5$ donc $4^2 \equiv 5\ (11)$ **2**

$4^4 = (4^2)^2$ donc $4^4 \equiv 5^2 \equiv 25 \equiv 3\ (11)$

On a : $\begin{cases} 3^{n+3} \equiv 3^n \times 5\ (11) \\ 4^{4n+2} \equiv 3^n \times 5\ (11) \end{cases} \Leftrightarrow 3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 0\ (11)$ **3**

Pour tout entier n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Conseils & Méthodes

1 Penser aux congruences : si un nombre est divisible par 11, il est congru à 0 modulo 11.

2 On cherche deux puissances de 3 et de 4 congrues modulo 11

3 Penser à la compatibilité.

À vous de jouer !

10 En remarquant que $25 \equiv -1\ (13)$, montrer que pour tout entier naturel n, $5^{4n} - 1$ est divisible par 13.

11 À l'aide des congruences, déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de $3^{2\,021}$.

↪ Exercices 62 à 74 p. 93

Méthode 5 Utiliser un tableau de congruence

Énoncé

Déterminer les restes possibles de la division de n^2 par 7 suivant les valeurs de l'entier relatif n.

En déduire les solutions de $n^2 \equiv 2\ (7)$.

Solution

On construit le tableau suivant : **1**

Reste de la division de n par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de n^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

Par exemple si $n \equiv 3\ (7)$, alors $n^2 \equiv 9 \equiv 2\ (7)$.

Les restes possibles sont : 0, 1, 2, 4.

Si $n^2 \equiv 2\ (7)$ le reste de n^2 par 7 est 2 ce qui est possible si le reste de n par 7 est 3 ou 4. **2**

Les solutions sont : $n \equiv 3\ (7)$ ou $n \equiv 4\ (7)$.

Remarque Dans toute la suite, on notera $n \equiv \ldots\ (7)$ pour « Reste de la division de n par 7 ».

Conseils & Méthodes

1 La méthode est exhaustive : c'est la disjonction des cas.
Restes possibles dans la division par 7 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
On détermine ensuite les restes possibles de n^2 dans la division par 7.

2 À l'aide du tableau de congruence, résoudre l'équation.

À vous de jouer !

12 Déterminer les restes possibles dans la division de n^2 par 8 suivant les valeurs de l'entier relatifs n.
Résoudre alors l'équation $(n+3)^2 - 1 \equiv 0\ (8)$.

13 **1.** Déterminer les restes possibles dans la division de $4x$ par 9 suivant les valeurs de l'entier relatifs x.
2. Résoudre alors : $4x \equiv 5\ (9)$.

↪ Exercices 62 à 74 p. 93

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e03-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 6 Déterminer une série de restes

Cours 3 p. 86

Énoncé

1. **Soit n un entier naturel. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 11.**

2. **En déduire les valeurs de n pour lesquelles $3^n + 7$ est divisible par 11.**

3. **En déduire que $135^{2\,021} \equiv 3\ (11)$.**

Solution

1. On établit la série des restes possible de 3^n par 11. 1

$3^0 \equiv 1\ (11)$

$3^1 \equiv 3\ (11)$

$3^2 \equiv 9\ (11)$

$3^3 \equiv 27 \equiv 5\ (11)$

$3^4 \equiv 3 \times 5 \equiv 4\ (11)$

$3^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 1\ (11)$. 2

La série des restes est 1, 3, 9, 5, 4, soit une période de 5.

On divise n par 5 : $n = 5q + r$ avec $0 \leqslant r < 5$, on a alors : 3

$3^n = 3^{5q+r} = 3^{5q} \times 3^r = (3^5)^q \times 3^r$ comme $3^5 \equiv 1\ (11)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^n \equiv 1^q \times 3^r \equiv 3^r\ (11)$.

Résumons ce résultat dans un tableau :

$n \equiv \ldots\ (5)$	0	1	2	3	4
$3^n \equiv \ldots\ (11)$	1	3	9	5	4

4

2. $(3^n + 7)$ est divisible par 11 si, et seulement si :

$3^n + 7 \equiv 0\ (11) \Leftrightarrow 3^n \equiv -7 \equiv 11 - 7 \equiv 4\ (11)$.

D'après le tableau : $3^n \equiv 4\ (11) \Leftrightarrow n \equiv 4\ (5)$. 5

Conclusion : $3^n + 7$ est divisible par 11 si 4 est le reste de la division de n par 5.

3. On a $135 \equiv 3\ (11)$ car $135 = 11 \times 12 + 3$ et $2\,021 \equiv 1\ (5)$ car $2\,021 = 5 \times 404 + 1$. 6

D'après les règles de compatibilité et du tableau : $135^{2\,021} \equiv 3^{2\,021} \equiv 3^1 \equiv 3\ (11)$.

Conseils & Méthodes

1 D'après le principe des tiroirs, les restes possibles dans la division de 3^n par 11 obéissent à une série.

2 Déterminer les restes pour $n = 0$, $n = 1$, … jusqu'à obtenir un reste déjà obtenu.

3 On traite le cas général avec $n \in \mathbb{N}$.

4 Remplir un tableau donnant les restes de 3^n suivant les valeurs de n.

5 Résoudre l'équation demandée à l'aide du tableau.

6 Pour utiliser le tableau des puissances de 3, chercher les restes du nombre dans la division par 11 et de la puissance dans la division par 5.

À vous de jouer !

14 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 2^n dans la division par 9.
2. En déduire les entiers n tels que $2^n - 1$ est divisible par 9.

15 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 7^n dans la division par 10.
2. En déduire les entiers n tels que $7^n - 1$ est divisible par 10.
3. En déduire le chiffre des unités de 7^{98}.

16 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 5^n dans la division par 9.
2. En déduire les entiers n tels que $5^n - 1$ est divisible par 9.
3. En déduire que $212^{2\,020} \equiv 4\ (9)$.

17 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 7.
2. En déduire les entiers n tels que $3^n - 6$ est divisible par 7.
3. En déduire que $164^{2\,021} \equiv 5\ (7)$.

Exercices 75 à 79 p. 94

Méthode 7 Conjecturer un critère de divisibilité

↪ Cours 2 p. 84 et 3 p. 86

Énoncé

Cet exercice a pour but d'utiliser et de démontrer un critère de divisibilité par 7.

1. **Donner tous les nombres entiers naturels à un et deux chiffres divisibles par 7.**

2. **Voici deux exemples mettant un œuvre une même procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7 ou non.**

• **574 est-il divisible par 7 ?**

$$\begin{array}{r|l} 57 & 4 \\ -8 & 4 \times 2 \\ 49 & \end{array}$$

49 est divisible par 7 donc 574 aussi

• **827 est-il divisible par 7 ?**

$$\begin{array}{r|l} 82 & 7 \\ -14 & 7 \times 2 \\ 68 & \end{array}$$

68 n'est pas divisible par 7 donc 827 non plus

À l'aide de cette procédure, dire si les nombres 406, 895 et 5 607 sont divisibles par 7.

3. **Énoncer puis démontrer un critère simple de divisibilité par 7 lié à cette procédure.**

Solution

1. Les multiples de 7 inférieurs à 100 sont :

0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

2. 406 est divisible par 7 [1]

$$\begin{array}{r|l} 40 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ \mathbf{28} & \end{array}$$

895 n'est pas divisible par 7

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ -10 & 5 \times 2 \\ \mathbf{79} & 1 \end{array}$$

5 607 n'est pas divisible par 7 [2]

$$\begin{array}{r|l} 560 & 7 \\ -14 & 7 \times 2 \\ 546 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ \mathbf{42} & 1 \end{array}$$

3. « Un nombre est divisible par 7 si, et seulement si, le nombre de ses dizaines diminué du double du chiffre de ses unités est divisible par 7 ». On peut réitérer le processus si nécessaire.

On effectue la division euclidienne de n par 10 soit : $n = 10a + b$ avec $0 \leqslant b < 10$.

Montrons $n \equiv 0\ (7) \Leftrightarrow a - 2b \equiv 0\ (7)$ par double implication : [3] et [4]

• $n \equiv 0\ (7) \Rightarrow 10a + b \equiv 0\ (7) \xRightarrow{\times(-2)} -20a - 2b \equiv 0\ (7) \xRightarrow{-20 \equiv 1(7)} a - 2b \equiv 0\ (7)$.

• $a - 2b \equiv 0\ (7) \xRightarrow{\times 10} 10a - 20b \equiv 0\ (7) \xRightarrow{-20 \equiv 1(7)} 10a + b \equiv 0\ (7) \Rightarrow n \equiv 0\ (7)$.

Conseils & Méthodes

[1] Commencer par multiplier le chiffre des unités par 2.

[2] On peut réitérer la procédure.

[3] Traduire en termes de congruence le critère de divisibilité.

[4] Penser à multiplier l'équation de façon à obtenir le reste souhaité. Attention, pas de division avec les congruences !

À vous de jouer !

18 Soit un entier naturel n tel que $n = 100a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b < 100$.

1. Prouver que n est divisible par 25 si, et seulement si, b est divisible par 25.

2. Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 25.

19 Soit un entier naturel tel que : $n = 10a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.

1. Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.

2. Montrer que : $n \equiv 0\ (13) \Leftrightarrow a + 4b \equiv 0\ (13)$.

3. Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.

4. En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants : 676, 943, 4 652, 156 556.

↪ Exercices 80 à 83 p. 94

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer Compatibilité

Soit n un entier naturel ($n \geqslant 2$) et a, b, c, d des entiers relatifs vérifiant : $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$.
La relation de congruence est compatible avec l'addition : $a + c \equiv b + d\ (n)$ et la multiplication : $ac \equiv bd\ (n)$.

On démontre ces deux égalités en revenant à la définition de la congruence.

Comprendre avant de rédiger

- On veut montrer, comme avec la relation d'égalité, qu'avec la relation de congruence on peut ajouter ou multiplier terme à terme deux relations.
- Les restes de 47 et 58 dans la division par 9 sont respectivement 2 et 4 alors les restes de leur somme et de leur produit sont respectivement 6 et 8 :

$$\begin{cases} 47 \equiv 2\ (9) \\ 58 \equiv 4\ (9) \end{cases} \Rightarrow 47 + 58 \equiv 6\ (9) \text{ et } 47 \times 58 \equiv 8\ (9).$$

Rédiger

Étape 1
Deux nombres sont congrus modulo n si leur différence est un multiple de n.

Étape 2
On peut additionner terme à terme deux égalités.

Étape 3
On revient alors à la relation de congruence.

Étape 4
Deux nombres sont congrus modulo n s'ils sont séparés d'un multiple de n.

Étape 5
On peut multiplier terme à terme deux égalités.

Étape 6
On revient ensuite à la relation de congruence.

La démonstration rédigée

- Démontrons la compatibilité avec l'addition.

On a les équivalences suivantes ($k \in \mathbb{Z}$) :

$$\begin{cases} a \equiv b\,(n) \\ c \equiv d\,(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \equiv 0\,(n) \\ c - d \equiv 0\,(n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = kn \\ c - d = k'n \end{cases}$$

$(a - b) + (c - d) = (k + k')n \Leftrightarrow$
$(a + c) - (b + d) = (k + k')n$

$a + c \equiv b + d\,(n)$

- Démontrons la compatibilité avec la multiplication.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} a \equiv b\ \ (n) \\ c \equiv d\ \ (n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + kn \\ c = d + k'n \end{cases}$$

$ac = (b + kn)(d + k'n) = bd + n(k'b + kd + kk'n)$

$ac - bd = (k'b + kd + kk'n)n \Leftrightarrow ac - bd \equiv 0\ (n)$
$\Leftrightarrow ac \equiv bd\ (n)$

Pour s'entraîner

Montrer la compatibilité de la congruence avec les puissances :

soit $n \geqslant 2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \equiv b \Rightarrow a^k \equiv b^k\ (n)$.