DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-e02-07

Exercices calculs et automatismes

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

29 Calcul avec les complexes

On considère le nombre complexe $z = i - 2$.
Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Le conjugué de z est :

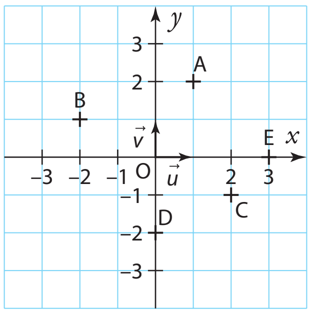
a $i + 2$ b $i - 2$ c $-i + 2$ d $-i - 2$

2. La forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est :

a $\frac{1}{i-2}$ b $-\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}$ c $-\frac{2}{5} - i\frac{1}{5}$ d $\frac{2}{5} + i\frac{1}{5}$

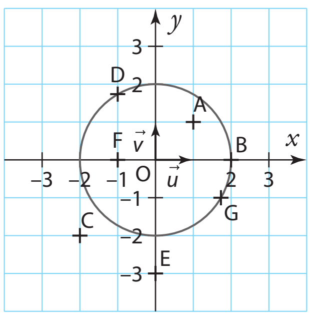
30 Lecture graphique d'affixe

Déterminer les affixes des points A, B, C, D et E représentés ci-dessous.



31 Lecture graphique d'un module et d'un argument

Sur le graphique suivant, on a représenté des points et le cercle de centre l'origine et de rayon 2.
Déterminer le module et un argument de l'affixe de chacun des sept points.



32 Module et argument

On considère le nombre complexe $z = 2 - 2i$.
Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Le module de z est égal à :

a 4 b 0 c $\sqrt{8}$ d 2

2. Un argument de z est :

a $\frac{\pi}{4}$ b $-\frac{\pi}{4}$ c $-\frac{\pi}{2}$ d $\frac{3\pi}{4}$

33 Propriété des arguments

On considère un nombre complexe z d'argument $\frac{\pi}{5}$.
Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Un argument de $-z$ est :

a $-\frac{\pi}{5}$ b $\frac{4\pi}{5}$ c $\frac{6\pi}{5}$ d $\frac{\pi}{5}$

2. Un argument de $\bar{z}$ est :

a $-\frac{\pi}{5}$ b $\frac{4\pi}{5}$ c $\frac{6\pi}{5}$ d $\frac{\pi}{5}$

3. Un argument de $2z$ est :

a $-\frac{\pi}{5}$ b $\frac{4\pi}{5}$ c $\frac{6\pi}{5}$ d $\frac{\pi}{5}$

4. Un argument de z^2 est :

a $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$ b $\frac{2\pi}{5}$ c $\frac{\pi}{25}$ d $\frac{\pi}{5}$

34 Argument

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) Si $z = -5$ alors $\arg(z) = 0[2\pi]$.	☐	☐
b) Si $z = 3i$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$	☐	☐
c) Si $z = 1 - i$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.	☐	☐

35 Forme trigonométrique

Pour chacun des nombres complexes suivants, dire s'il est sous forme trigonométrique. Si c'est le cas, préciser son module et un de ses arguments.

a) $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z_3 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ **d)** $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

e) $z_5 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ **f)** $z_6 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right)$

36 Passer d'un forme à une autre

1. Déterminer la forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$.

2. Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.

3. Déterminer la forme algébrique de $2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

37 Forme exponentielle

On considère le nombre complexe $z = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	**V**	**F**
a) La forme exponentielle de $-z$ est $-4e^{i\frac{\pi}{3}}$.	☐	☐
b) La forme exponentielle de $\bar{z}$ est $4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.	☐	☐

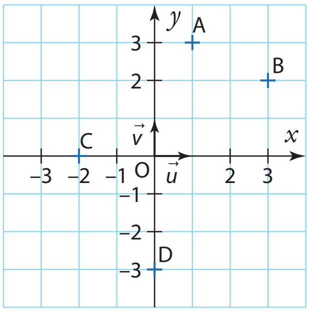
Exercices d'application

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Déterminer et utiliser une affixe

Méthode 1 p. 47

38 On considère le graphique suivant.



1. Déterminer l'affixe des points A, B, C et D.
2. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

39 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, placer les points A, B et C dont les affixes sont $z_A = -2 - i$; $z_B = -3$ et $z_C = 4i$.

40 On considère le nombre complexe $z = 2 + i$.
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, placer :
a) le point A d'affixe z.
b) le point B d'affixe $-z$.
c) le point C d'affixe $\bar{z}$.
d) le point D d'affixe $z - 3$.
e) le point E d'affixe $z - 3i$.

41 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - 3i$, $z_B = 2 - i$ et $z_C = 3$.
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

42 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 - i\sqrt{2}$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = \frac{i}{2}$.
Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

43 Pour chaque question, représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition demandée :
a) $\text{Re}(z) = -1$.
b) $\text{Im}(z) = 0$.
c) $\text{Re}(z) = \text{Im}(z) + 1$.

44 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3 - 2i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 1 - 3i$.
1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$.
2. OABC est-il un parallélogramme ?

45 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = 2 - 3i$ et $z_C = -2 - i$.
1. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Déterminer l'affixe du point E centre du parallélogramme.
3. Placer tous ces points dans un repère orthonormé.

46 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 6 - 2i$ et $z_C = -3 - i$.
1. Déterminer l'affixe du milieu de segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3. Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

47 On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c.
1. Soit G le point d'affixe g tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Montrer que $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$.
2. On suppose que $a = 2 + 3i$, $b = 5 + 4i$ et $c = 3 + 5i$. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ placer les points A, B, C et G.

48 Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 1 - i$, $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = -i$.
1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. En déduire la nature de ABDC.
3. Déterminer les affixes respectives du milieu I de [AD] et du milieu J de [BC].
4. En déduire une autre preuve du résultat de la question **2.**

49 On considère trois points A,B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 3i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = 5 - 9i$.
1. Déterminer l'affixe du point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'affixe du point E tel que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$.

Déterminer et utiliser le module d'un nombre complexe

Méthode 2 p. 49

50 Déterminer le module des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = 3 - 2i$ **b)** $z_2 = \sqrt{2} + i$
c) $z_3 = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$ **d)** $z_4 = \frac{5}{7}i$.

51 Déterminer le module des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = (3 + i)(7 - 2i)$ **b)** $z_2 = \frac{6}{1+i}$

52 On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 5 + 4i$ et $z_B = 2 + 3i$.
Calculer la distance AB.

53 On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3 - \mathrm{i}$, $z_B = -2\mathrm{i}$ et $z_C = 2 + 2\mathrm{i}$.
1. Calculer les distances AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

54 Dans chaque cas, représenter dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $|z| = 4$
b) $|z - 3| = 2$

55 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $|z - 2 + \mathrm{i}| = 3$
b) $|z + 1 - \mathrm{i}| = -2$
c) $|z - 2| = |z - 8|$
d) $|z - 2 + 3\mathrm{i}| = |z + 4 - 2\mathrm{i}|$

Déterminer et utiliser un argument et une forme trigonométrique

Méthode 3 p. 51

56 Déterminer un argument des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = 19$ **b)** $z_2 = \frac{7}{3}\mathrm{i}$
c) $z_3 = -1 + \mathrm{i}$ **d)** $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

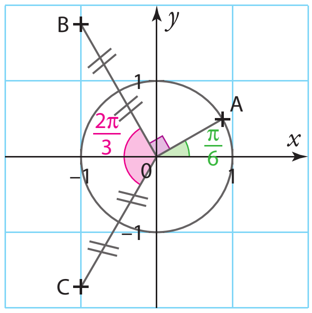
57 Déterminer un argument des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$
b) $z_2 = \mathrm{i}\sqrt{3} + 1$

58 On considère le nombre complexe $z = -1 + \mathrm{i}$.
1. Déterminer un argument de z.
2. En déduire un argument de $-z$ et de $\overline{z}$.

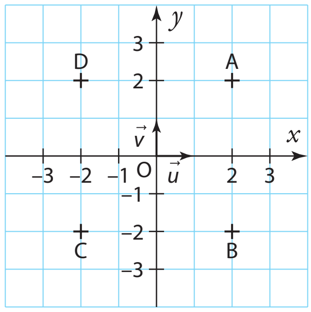
59 Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = 7$ **b)** $z_2 = 4\mathrm{i}$
c) $z_3 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ **d)** $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$

60 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.
a) $z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
b) $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
c) $z_3 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
d) $z_4 = \frac{1}{2} \times \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

61 Sur la figure ci-dessous, à l'aide du codage, déterminer la forme trigonométrique des affixes des points A, B et C.



62 Sur la figure ci-dessous, déterminer la forme trigonométrique des affixes des points A, B, C et D.



63 Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ **b)** $\arg(z) = -\pi[2\pi]$

64 Dans le plan complexe, représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $\arg(z) = \pi[2\pi]$ ou $\arg(z) = -\pi[2\pi]$
b) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Utiliser les formules d'addition et de duplication

Méthode 4 p. 53

65 **1.** Déterminer la valeur de $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

66 Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

67 Soit x un réel tel que $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin(x) = \frac{1}{3}$.
1. Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
2. En utilisant les formules de duplication, déterminer la valeur exacte de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$.

Exercices d'application

Utiliser les propriétés des arguments

Méthode 5 p. 53

68 **1.** Déterminer un argument des nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

2. En déduire un argument de $z_1 \times z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et z_1^5.

69 **1.** Déterminer un argument de $z = 4 - \mathrm{i} \times 4\sqrt{3}$.

2. En déduire un argument de $\dfrac{1}{z}$ et de $z^{1\,000}$.

70 **1.** Déterminer un argument de $-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

2. En déduire que $(-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i})^3$ est imaginaire pur.

Déterminer et utiliser la forme exponentielle

Méthode 6 p. 55

71 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) z_1 de module $\sqrt{3}$ et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$

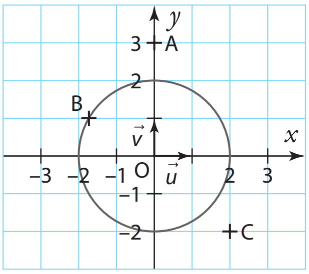
b) $z_2 = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ □ $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

c) $z_3 = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}{4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

72 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ **b)** $z_2 = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **c)** $z_3 = 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}$ **d)** $z_4 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

73 Sur la figure ci-contre, déterminer graphiquement la forme exponentielle des affixes des points A, B et C.



74 Dans un repère orthonormé, placer les points :

a) A d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ **b)** B d'affixe $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$

c) C d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ **d)** D d'affixe $5\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$

75 On considère le nombre complexe $z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.
Déterminer la forme algébrique de z^6.

76 On considère le nombre complexe $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
Montrer que $z^{2\,019}$ est réel.

77 En utilisant les formules d'Euler, montrer que $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(4\theta)}{8}$.

Utiliser les racines de l'unité

Méthode 7 p. 57

78 **1.** Déterminer l'ensemble des racines 6-ièmes de l'unité, noté $\mathbb{U}_6$, puis tracer précisément un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

2. Déterminer la valeur du périmètre de l'hexagone.

79 **1.** Déterminer l'ensemble des racines 10-ièmes de l'unité.

2. Déterminer une valeur approchée du périmètre d'un polygone régulier à 10 côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Utiliser les arguments en géométrie

Méthode 8 p. 57

80 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 9 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 3 - \mathrm{i}$ et $z_C = -1 - 3\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique de $k = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

2. En déduire un argument de k.

3. Que peut-on en déduire ?

81 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -3 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 0$ et $z_C = -5 - \mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique de $k = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

2. En déduire un argument de k.

3. Que peut-on en déduire ?

82 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -3 - 2\mathrm{i}$, $z_B = 1 - \mathrm{i}$ et $z_C = -1 + 7\mathrm{i}$.
Montrer que ABC est un triangle rectangle.

83 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 1 - 2\mathrm{i}$, $z_B = 2 + \mathrm{i}$ et $z_C = -1 + 4\mathrm{i}$.
Le triangle ABC est-il rectangle en B ?

84 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 1 - \mathrm{i}$, $z_C = -2 + \mathrm{i}$ et $z_D = -1 + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}$. Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

85 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 4 + 2\mathrm{i}$, $z_B = 2 + \mathrm{i}$, $z_C = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_D = 3$.
Montrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

86 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2\mathrm{i}$, $z_B = 1$, $z_C = 3 - \mathrm{i}$ et $z_D = 2 + \mathrm{i}$.
On admet que ABCD est un parallélogramme.

1. Déterminer un argument de $\dfrac{z_D - z_B}{z_C - z_A}$.

2. Que peut-on en déduire pour le parallélogramme ABCD ?

87 Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1 + 5\mathrm{i}$, $z_B = -2 + 4\mathrm{i}$, $z_C = -2\mathrm{i}$ et $z_D = 3 - \mathrm{i}$.
On admet que ABCD est un parallélogramme.
Montrer que ABCD est un rectangle.

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Différentes formes d'un nombre complexe

Méthode 9 p. 58

88 Donner une valeur approchée au centième d'un argument des nombres complexes suivants.
a) $1 + 2i$
b) $-2 + i$
c) $4 - 3i$
d) $-3 - i$

Démo

89 Démontrer que pour tout nombre complexe z :
$$|-z| = |\bar{z}| = |z|.$$

90 On rappelle que pour tout nombre réel a :
$$|a| = \sqrt{a^2}.$$
Démontrer que pour tout nombre complexe z :
$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \text{ et } |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$$

91 Démontrer que $(3 - 3i)^n$ est un nombre réel, si et seulement si, n est un multiple de 4.

92 On considère les nombres complexes $z = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$.
1. Déterminer le module et un argument de z, z' et $\dfrac{z}{z'}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.
3. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

93 On considère le nombre complexe $z = 1 - i$.
1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n multiple de 4, z^n est un nombre entier pair.

94 Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} - i$.
On pose $r = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
1. Déterminer la forme exponentielle de $z_A' = z_A \times r$.
2. En déduire le module et un argument de z_A'.
3. Généralisation : pour tout nombre complexe z, on considère $z' = r \times z$.
a) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de ceux de z.
b) Donner un procédé de construction géométrique permettant de construire facilement le point d'affixe z' à partir du point d'affixe z.

95 Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.
Proposition 1 L'équation $z - i = i(z + 1)$ a pour solution $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Proposition 2 Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + e^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos x \, e^{-ix}$.

D'après Bac S 2019

Nombres complexes et trigonométrie

96 En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, exprimer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

97 **1.** Développer $(a + b)^4$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $\cos^4(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de cosinus dépendants de x.

98 **1.** Déterminer les formes exponentielles des nombres complexes $1 + i$ et $1 - i$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$.
3. Pour chaque proposition suivante, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier.
Proposition 1 Pour tout entier naturel n, S_n est un nombre réel.
Proposition 2 Il existe une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$.

D'après Bac S 2018

99 On veut déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.
1. a) Calculer ω^5.
b) Factoriser $\omega^5 - 1$ par $\omega - 1$.
c) En déduire que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
2. Exprimer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.
3. En utilisant les formules de duplication, exprimer $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
4. a) En utilisant les questions précédentes, en déduire que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercices d'entraînement

Nombres complexes et géométrie

Méthode 10 p. 59

100 Soit M et N deux points d'affixes respectives :

$$z_M = -3 - \mathrm{i} \text{ et } z_N = \frac{3+\mathrm{i}}{3}.$$

1. Les points O, M et N sont-ils alignés ? Justifier.
2. On considère le point P d'affixe 3i. Déterminer l'affixe du point Q tel que MNQP soit un parallélogramme.

101 On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3,\ z_B = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}\mathrm{i} \text{ et } z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer l'affixe du point I milieu de [BC].
3. Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

102 On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + \mathrm{i},\ z_B = 1 + 2\mathrm{i},\ z_C = 2 + 4\mathrm{i} \text{ et } z_D = 4 + 3\mathrm{i}.$$

Déterminer la nature du quadrilatère ABCD. On ira au plus précis.

103 On considère l'équation

$$(\mathrm{E}) : z^2 - 6z + c = 0,$$

avec c un réel strictement supérieur 9.
1. Déterminer les deux solutions complexes de l'équation (E), que l'on notera z_A et z_B.
2. Soit A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
a) Justifier que OAB est isocèle en O.
b) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle OAB est rectangle. Déterminer cette valeur.

D'après Bac S 2017

104 On considère les points A(i) et B(2 – i).

1. Résoudre l'équation :

$$\frac{z - \mathrm{i}}{z - (2 - \mathrm{i})} = 3.$$

On notera M le point qui a pour affixe la solution.
2. Démontrer que A, B et M sont alignés.
3. Expliquer pourquoi, pour tout nombre réel λ, le point dont l'affixe est solution de l'équation $\frac{z - \mathrm{i}}{z - (2 - \mathrm{i})} = \lambda$ est aligné avec A et B.

105 Soit $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs d'affixes z_1 et z_2.
1. Rappeler l'expression du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{w_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
2. En déduire que $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $z_1\overline{z_2}$ est un imaginaire pur.

106 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 4\mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \square\, z_n$.
On note M_n le point d'affixe z_n. Démontrer que tous les points M_n appartiennent à un même cercle de centre O, dont on déterminera le rayon.

107 Un robot est contrôlé par ordinateur.
Le sol est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$ et le robot est repéré par son affixe dans ce plan.
Il est initialement au point d'affixe 1.
Grâce à l'ordinateur, on peut lui donner une liste de points qu'il devra rejoindre un par un.
Donner une liste d'affixes de points à transmettre au robot pour qu'il trace au sol :
a) un carré.
b) un triangle équilatéral.
c) un triangle rectangle isocèle.
d) un hexagone.

108 Soit f la fonction qui à tout point M, distinct de O et d'affixe z associe le point M′ d'affixe z' tel que $z' = -\frac{1}{z}$.
1. On considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = -1 + \mathrm{i} \text{ et } z_B = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

a) Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′, image du point A par la fonction f.
b) Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′, image du point B par la fonction f.
c) Placer les points A, B, A′ et B′ dans un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.
2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel.
On considère le nombre complexe $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
a) Montrer que $z' = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \theta)}$.
b) Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1, sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M′ par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.
3. Soit Γ le cercle de centre K d'affixe $z_K = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
a) Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.
b) On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y deux réels non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.
c) Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M′ du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

D'après Bac S 2019

109 Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = z_n - \mathrm{i}$.

On note A_n le point d'affixe z_n, B_n le point d'affixe u_n et C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n(1-\mathrm{i})$.

3. a) Pour tout entier naturel n, calculer le module de u_n en fonction de n.

b) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - 1| = 0$.

c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a) Soit n un entier naturel, déterminer un argument de u_n.

b) Démonter que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

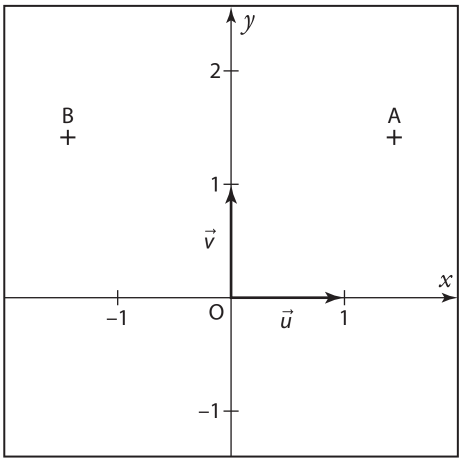
c) Démonter que pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation $y = -x + 1$.

D'après Bac S 2018

110 On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_B = 2e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.$$

1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.



2. On considère l'équation

$$(E) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

D'après Bac S 2017

Ensembles de points

111 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|2z - \mathrm{i}| = 1$ **b)** $|\mathrm{i} - 2z| = -1$

c) $\frac{|z+1|}{|z+2|} = 1$ **d)** $\arg\left(\frac{z - 2\mathrm{i}}{z - 1 + 2\mathrm{i}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

112 Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe z est telle que $z\bar{z} = 4$.

113 Pour chaque proposition suivante, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Proposition 1 Un point M d'affixe z tel que $|z - \mathrm{i}| = |z + 1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Proposition 2 L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 6| = |z + 5\mathrm{i}|$ est un cercle.

Proposition 3 Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose $Z = \frac{\mathrm{i}z}{z-2}$. Alors l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point A(1 ; 0).

D'après Bac S 2019

114 **1.** Traduire géométriquement la condition $(z - \mathrm{i})(\overline{z - \mathrm{i}}) = 9$.

2. Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z - \mathrm{i})(\overline{z - \mathrm{i}})$.

3. Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe vérifie $|z|^2 - 2\mathrm{Im}(z) = 8$.

115 Soit deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2$ et $g(z) = z \times (\bar{z} + 1)$.

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée :

a) $f(z) \in \mathbb{R}$. **b)** $f(z)$ imaginaire pur.

c) $\mathrm{Re}(g(z)) = 4$ **d)** $\mathrm{Re}(g(z)) = \mathrm{Im}(g(z))$

116 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$ par $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y deux réels.

Déterminer l'expression de $f(z)$ en fonction de x et y.

2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe remplie la condition demandée :

a) $f(z) = 2$ **b)** $f(z) = 2\mathrm{i}$

c) $f(z) \in \mathbb{R}$ **d)** $f(z)$ imaginaire pur

Travailler l'oral

117 Présenter les différentes formes d'un nombre complexe et expliquer comment passer d'une forme à l'autre.

118 Soit A, B et C trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Expliquer comment montrer que ABC est rectangle et isocèle.

Exercices bilan

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

119 Différentes formes d'un nombre complexe

On considère les deux nombres complexe $z_1 = 5 - 5i$ et $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique, puis la forme exponentielle de z_1.
2. Déterminer la forme algébrique de z_2.
3. En déduire la forme algébrique et la forme expontielle de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
5. Déterminer la forme algébrique de z_1^{400}.

120 Nombres complexes et géométrie

On considère les points A, B, C et M d'affixes respectives :
$z_A = -1 + i$
$z_B = 2 + i(1 + \sqrt{3})$
$z_C = 2 + i(1 - \sqrt{3})$
$z_M = 1 + i$.

1. a) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle de centre M et de rayon 2.
b) Dans un repère orthonormé, tracer le cercle de centre M et de rayon 2, et placer les points A, B et C.
2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'affixe de I, milieu de [AM].
4. a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
b) Quelle est la nature de ABCD ?
5. Les points B, D et M sont-ils alignés ?

121 Ensemble de points

1. Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :
a) $|z - 4| = 3$ **b)** $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - 7i|$
c) $\arg(z) = \pi[2\pi]$ **d)** $\arg\left(\frac{z - 2 + i}{z - 5i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
2. Déterminer les affixes des sommets d'un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans le cercle trigonométrique dont un sommet est le point A d'affixe 1. Puis déterminer son périmètre.

122 Trigonométrie

1. Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.
3. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

123 Suites de nombres complexes

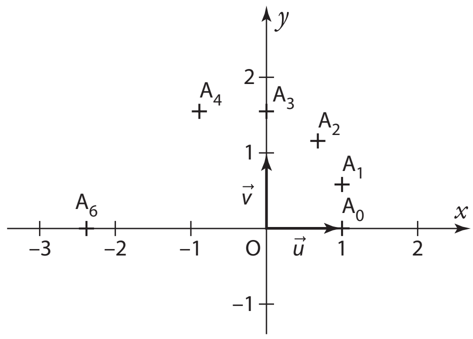
On considère la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n.

1. a) Déterminer la forme exponentielle de $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$.
b) En déduire la forme exponentielle de z_1 et de z_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.
b) Pour quelle valeur de n les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
a) Interpréter géométriquement d_n.
b) Calculer d_0.
c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.
d) En déduire que la suite (d_n) est géométrique, et exprimer d_n en fonction de n.
4. a) Montrer que pour tout entier naturel,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.
5. Expliquer comment construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure ci-dessous.



6. On veut déterminer le plus petit entier tel que $|z_n| > 10$.
a) Compléter le progamme en **Python** suivant.

```
n=0
u=...
while...:
        n=...
        u=...
print(...)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

D'après Bac S 2016

Préparer le BAC L'essentiel

Affixe

- **Affixe d'un point, d'un vecteur**
  - M(a ; b) $\leftrightarrow$ Affixe $z = a + ib$
  - $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow$ Affixe $z = a + ib$
- **Milieu et vecteur**
  - $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
  - Le milieu de [AB] a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$

Argument

- **Définition et expression**

Si M(z) avec $z \neq 0$, un argument de z est une mesure en radians de $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM})$.

$$\arg(z) = \theta[2\pi] \text{ avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

- **Propriétés**
  - $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
  - $\arg(z^n) = n \times \arg(z)[2\pi]$.
  - $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
  - $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)[2\pi]$
- **Argument et angle**
  - $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
  - $(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

Formules d'addition et de duplication

- **Formules d'addition**

$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

- **Formules de duplication**

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

$\quad\quad = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Module

- **Définition et expression**

$|z| = \text{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- **Propriétés**
  - $z \times \bar{z} = |z|^2$
  - $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
  - $|z^n| = |z|^n$
  - $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
  - $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- **Module et distance**

$\text{AB} = |z_B - z_A|$

- $\mathbb{U}$: ensemble des nombres complexes de module 1

Forme trigonométrique, forme exponentielle

- **Forme trigonométrique**

$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ [2π]

- **Notation exponentielle**

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

- **Forme exponentielle**

$z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ [2π]

- **Propriétés**
  - $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
  - $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
  - $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta' - \theta)}$
  - $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- **Racines *n*-ièmes de l'unité**

$z^n = 1$

$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0\,;1\,;2\,;\dots;(n-1)\}\right\}$

$\rightarrow$ Sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Formules de Moivre et d'Euler

- **Formule de Moivre**

$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

- **Formule d'Euler**

$\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ et $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$

Préparer le BAC — Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
Déterminer une affixe et représenter un nombre complexe par un point	Méthode 1	1, 2, 38, 39
Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe et passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ou exponentielle et inversement	Méthode 2, 3, 6	5, 6, 9, 10, 17, 18, 50, 51, 56, 57, 71, 72
Utiliser les formules d'addition et de duplication	Méthode 4	13, 14, 65, 66
Éffectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée	Méthode 5, 6, 9	15, 16, 17, 18, 25, 26, 68 ,69, 71, 72, 88, 89
Utiliser les formules d'Euler et de Moivre	Méthode 6	18, 77
Utiliser les racines de l'unité	Méthode 7	21, 22, 78, 79
Utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan	Méthode 1, 2, 3, 8, 10	1, 2, 7, 8, 11, 12, 23, 24, 27, 28, 44, 45, 52, 53, 63, 64, 80, 81, 100, 101

EXOS QCM interactifs lienmini.fr/maths-e02-08

QCM **Pour les QCM suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).**

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

	A	B	C	D
124 $z=5-\mathrm{i}\sqrt{2}$ a pour module :	27	$\sqrt{27}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{21}$
125 $z=-\sqrt{3}+\mathrm{i}\sqrt{3}$ a pour argument :	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
126 $z=-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ a pour argument :	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$
127 La forme exponentielle de $\frac{5\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est :	$\frac{15}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$	$\frac{15}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
128 $(1+\mathrm{i})^{72}$ est égal à :	2^{72}	$6{,}9\times10^{10}$	2^{36}	0
129 On considère les points A(2 + i) et B(2 – 4i). Le triangle OAB est :	équilatéral.	isocèle.	rectangle.	quelconque.
130 L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\lvert z-1+\mathrm{i}\rvert=\lvert z+2\mathrm{i}\rvert$ est :	le milieu de [AB].	la médiatrice de [AB] avec A(–1 + i) et B(2i).	la médiatrice de [AB] avec A(1 – i) et B(–2i).	un cercle.

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

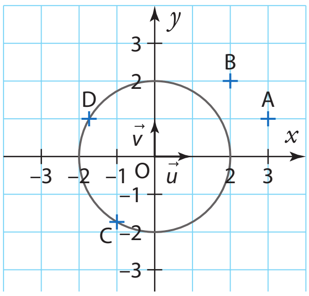
131 Lecture graphique

Déterminer :

a) l'affixe du point A.

b) le module et un argument des affixes des points B et C.

c) la forme exponentielle de l'affixe du point D.



Méthode 1 p. 47

132 Forme trigonométrique, forme exponentielle

On considère les nombres complexes $z_1 = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$ et $z_2 = \sqrt{5}\text{e}^{\text{i}\frac{3\pi}{4}}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.

2. Déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z_1. Méthode 2 p. 49

3. Déterminer la forme algébrique de z_2. Méthode 3 p. 51 Méthode 6 p. 55

133 Utiliser les formules d'addition et de duplication

1. Exprimer $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2. On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. En utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Méthode 4 p. 53

134 Effectuer des calculs en utilisant une forme adaptée

1. On considère le nombre complexe $z_1 = -8 - 8\text{i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z_1^6.

b) z_1^{500} est-il un nombre réel, imaginaire pur ou un nombre complexe quelconque ?

2. Soit $z_2 = 8\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$. On note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2. Méthode 5 p. 53
(AB) est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? Méthode 6 p. 55 Méthode 9 p. 58

135 Formules d'Euler et de Moivre

1. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $\sin^4(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de sinus et/ou de cosinus dépendants de x.

2. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Méthode 6 p. 55

136 Nombres complexes et géométrie

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2\text{i}$, $z_B = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_C = \sqrt{3} - \text{i}$.

1. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

2. Déterminer les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3. Déterminer l'affixe du centre du parallélogramme.

4. Soit E le point d'affixe $z_E = -2\sqrt{3}$.

a) Déterminer un argument de $\frac{z_E - z_A}{z_B - z_A}$. Méthode 1 p. 47 Méthode 2 p. 49 Méthode 3 p. 51

b) Que peut-on dire des droites (AB) et (AE) ? Méthode 8 p. 57 Méthode 10 p. 59

137 Ensemble de points

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

a) $|z - 3\text{i}| = \sqrt{5}$

b) $|z - 3 - 2\text{i}| = |z + 4\text{i}|$

c) $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) $\arg\left(\frac{z - 3 - 2\text{i}}{z + 3 + 8\text{i}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Méthode 2 p. 49 Méthode 3 p. 51 Méthode 10 p. 59

138 Racines de l'unité

1. Déterminer l'ensemble $\mathbb{U}_7$.

2. Déterminer la longueur des côtés et le périmètre d'un polygone à sept côtés inscrit dans le cercle trigonométrique. On arrondira les résultats au centième. Méthode 7 p. 57

139 Suites de nombres complexes

On considère la suite de nombres complexes définie par $z_0 = 50$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{\text{i}}{2} z_n$.

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. Déterminer la valeur de $|z_0|$, $|z_1|$, et $|z_2|$.

3. Conjecturer l'expression de $|z_n|$ en fonction de n.

4. Démontrer la conjecture de la question **3.**

5. On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que M_n appartiennent au disque de centre 0 et de rayon 0,5.

a) Compléter le programme en **Python** suivant.

```
n=0
u=…
while…:
        n=…
        u=…
print(…)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice. Méthode 10 p. 59

Exercices vers le supérieur

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

140 Module et argument (MPSI) (PCSI)

Pour tout point M du plan, l'affixe de M est noté z_M.
Soit A, B et C trois points distincts de O.
Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Proposition 1 Si $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$, alors $|z| = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{7\pi}{12}[2\pi]$.

Proposition 2 Si $z = -2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$, alors $|z| = 2$ et $\arg(z) = -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Proposition 3 Si A et B sont symétriques par rapport à O alors $z_A = \overline{z_B}$.

Proposition 4 Si $|z_A| = |z_B| = |z_C|$, alors ABC est un triangle équilatéral.

Proposition 5 Si $\arg(z_A) = \pi + \arg(z_B)[2\pi]$, alors O, A et B sont alignés.

D'après concours ADVANCE 2019

141 Nombres complexes et géométrie (1) (MPSI) (PCSI)

Le point A a pour affixe $z_A = 1 + i$.
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par le point A.
Soit B un point de $\mathscr{C}$ d'affixe réelle z_B positive.
On définit le point E tel que OBEA soit un losange.
Pour chacune des propositions suivantes indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

Proposition 1 $z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Proposition 2 L'affixe du point B est $z_B = \dfrac{3}{2}$.

Proposition 3 L'affixe du point E est $z_E = (1+\sqrt{2}) + i$.

Proposition 4 $OE = 2\sqrt{2}$.

D'après concours FESIC 2017

142 Nombres complexes et géométrie (2) (MPSI) (PCSI)

Soit x un réel strictement positif. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - xi$, $z_B = 2i$ et $z_C = -2$.

1. Donner les distances AB et AC en fonction de x.
2. Pour quelle valeur de x le triangle ABC est-il isocèle en A ? Justifier.
3. Le triangle ABC peut-il être équilatéral ? Justifier.
4. Soit D le point tel que ABCD est un parallélogramme. Déterminer en fonction de x, l'affixe x_D du point D. Justifier.

D'après concours d'entrée ENI-GEIPI 2018

143 Résolution d'équation

Résoudre l'équation $z^n = \overline{z}$.

144 Suite de nombres complexes (MPSI) (PCSI)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les points M_n d'affixe $z_n = e^{\frac{2n\pi i}{3}}$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

a Les points O, M_1 et M_{20} sont alignés.
b Les points O, M_6 et M_9 sont alignés.
c Le triangle OM_1M_{20}, s'il existe, est équilatéral.
d Le triangle OM_6M_9, s'il existe, est équilatéral.

D'après concours techniciens supérieurs de l'aviation 2017

145 Somme des racines *n*-ièmes de l'unité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

1. Si $n = 1$, déterminer S_n en fonction de n.
2. Si $n \geqslant 2$, exprimer $S_n - S_n\omega$ en fonction de ω et n, puis en déduire la valeur de S_n.

146 Produit des racines *n*-ièmes de l'unité

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Soit $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$ (le symbole $\prod$ signifie produit).

Déterminer l'expression de P_n en fonction de n.

147 Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

Soit a un nombre complexe. On appelle racine n-ième de a un nombre complexe z tel que $z^n = a$.

1. Si $a = 0$, déterminer les racines n-ième de a.
2. Si $a \neq 0$, posons $a = re^{i\theta}$.
Déterminer les racines n-ièmes de a.

Coup de pouce On rappelle que deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument.

3. Applications.
a) Soit $a = 5 - i5\sqrt{3}$.
Déterminer les racines 4-ièmes de a.
b) Résoudre l'équation $z^3 = \sqrt{3} + i$.

148 Une fonction complexe

On définit la fonction f de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = \dfrac{z-1}{z-i}$.

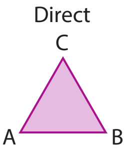
1. Démontrer que 1 n'a aucun antécédent par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ est un nombre réel.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ est un nombre imaginaire pur.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|f(x)| = 1$.

149 Triangle équilatéral

Coup de pouce On dit qu'un triangle équilatéral ABC est :
- direct si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$;
- indirect si, et seulement si, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

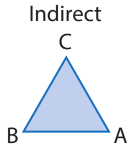
On veut démontrer que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.



1. a) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

b) Montrer que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.

2. Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si, $\frac{c-a}{b-a} = -j^2$.



3. En déduire que ABC est un triangle équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$.

4. Démontrer que ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

150 Inégalité triangulaire (1)

Démo

Dans cet exercice, on veut démontrer que pour tous nombres complexes z et z' :
$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

1. On utilisant la relation $|z|^2 = z\bar{z}$, exprimer $|z + z'|^2$ en fonction de $|z|^2$, $|z'|^2$ et $2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z'', $\mathrm{Re}(z'') \leqslant |z''|$ et déterminer dans quel cas il y a égalité.

3. En déduire que $|z + z'|^2 \leqslant (|z| + |z'|)^2$.

4. En déduire que $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

5. a) Montrer que $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$.

b) En déduire que $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, tel que $z' = \lambda z$.

6. Soit M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $z + z'$.

a) Interpréter la relation $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ en termes de distances.

c) Interpréter géométriquement le cas $|z + z'| = |z| + |z'|$.

151 Inégalité triangulaire (2)

Dans cet exercice, on veut démontrer que pour tous nombres complexes z et z' :

$$||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|.$$

1. En remarquant que $z = (z - z') + z'$ et $z' = (z' - z) + z$ et en utilisant l'inégalité triangulaire démontrée dans l'exercice précédent, démontrer que :

a) $|z| - |z'| \leqslant |z - z'|$

b) $|z'| - |z| \leqslant |z' - z|$

2. Conclure.

152 Transformation du plan

Soit M et M′ deux points d'affixes respectives z et z'. Démontrer les propriétés suivantes.

a) M′ est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b si, et seulement si, $z' = z + b$.

b) Soit A le point d'affixe a.
M′ est l'image de M par la symétrie centrale de centre A, si, et seulement si, $z' = -z + 2a$.

153 Exponentielle d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b deux réels, on pose $e^z = e^a \times e^{ib}$

1. Déterminer la forme algébrique de $e^{4+i\frac{\pi}{2}}$.

2. Déterminer le module et un argument de e^z.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z et z', $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$.

4. Résoudre l'équation suivante : $e^z = -e$.

154 Formule d'addition

1. Démontrer que pour tous nombres réels p et q

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2. En déduire la formule suivante

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. Avec raisonnement similaire, déterminer une formule analogue pour $\sin(p) + \sin(q)$.

155 Construction d'un pentagone régulier

Un logiciel de calcul formel nous donne :

1	cos(2*pi/5)
	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Proposer un programme de construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

156 Transformation de Fourier discrète

La transformée de Fourier discrète est un outil mathématique utilisé en traitement du signal.

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ avec $n \geqslant 2$ et on considère une séquence de n nombres complexes $(x_0 ; x_1 ; \dots ; x_{n-1})$. La transformée de Fourier discrète de $(x_0 ; x_1 ; \dots ; x_{n-1})$ est $(X_0 ; X_1 ; \dots ; X_{n-1})$ avec $X_l = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \,\square\, \omega^{-k\square l}$ pour $0 \leqslant l \leqslant n-1$,

1. Premier cas particulier : $n = 2$.
Déterminer la transformée de Fourier de $(x_0 ; x_1)$.

2. Deuxième cas particulier : $n = 3$.

a) Déterminer la transformée de Fourier de $(x_0 ; x_1 ; x_2)$.

b) En déduire la transformée de Fourier de $(1 ; 0 ; 1)$.

Travaux pratiques

TICE 45 min — Représenter, Chercher, Raisonner

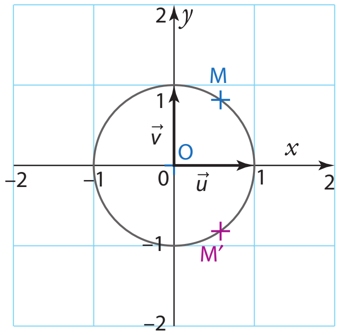
1 Lieu de points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.
À tout point M d'affixe z, distinct de O, on associe le point M′ d'affixe $f(z)$ tel que $f(z)=\frac{1}{z}$.
Le point M′ est appelé l'image du point M.
On souhaite étudier l'ensemble des points M′, lorsque M parcourt différents ensembles.

A ▶ Conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique

1. On souhaite déterminer le lieu décrit par l'ensemble des points M′ lorsque M décrit le cercle de centre O et de rayon 1

a) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.
b) Créer un cercle de centre O et de rayon 1.
c) Créer un point M libre sur ce cercle.
d) Créer le point M′ d'affixe $f(z)=\frac{1}{z}$.



Remarque : Sur GeoGebra, x(M) correspond à l'abscisse de M, y(M) à l'ordonnée de M et pour créer le point A d'affixe z, on peut écrire A = z.

e) En activant la trace du point M′, conclure.

2. Reprendre les questions précédentes, pour déterminer le lieu décrit par l'ensemble des points M′ lorsque :
a) M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.
b) M décrit le cercle de centre O et de rayon 0,5.
c) M décrit le cercle de centre A(1 ; 0) et de rayon 1.
d) M décrit la droite d'équation $y=1$.

B ▶ Étude théorique

1. Déterminer les points invariants par f (c'est-à-dire les points M tels que M′ = M).

2. Si M décrit le cercle de centre O et de rayon r, quel est l'ensemble décrit par les points M′ ?
Démontrer ce résultat en utilisant les modules.

3. On veut démontrer la conjecture de la question A ▶ **2. c)** .
a) Démontrer que $|z-1|=1$ si, et seulement si, $|z'-1|=|z'|$.
b) Conclure.

4. On veut démontrer la conjecture de la question A ▶ **2. d)** .
a) Démontrer que $|z-2\mathrm{i}|=|z|$ si, et seulement si, $\left|z'+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=\frac{1}{2}$.
b) Conclure.

5. En utilisant un raisonnement similaire aux questions **3.** et **4.**, déterminer l'ensemble décrit pas les points M′, lorsque M décrit :
a) la droite d'équation $y=k$ avec $k\in\mathbb{R}$ et $k\neq 0$.
b) la droite d'équation $x=k$ avec $k\in\mathbb{R}$ et $k\neq 0$.
c) le cercle de centre B(k ; 0) et de rayon k avec $k\neq 0$.
d) le cercle de centre C(0 ; k) et de rayon k avec $k\neq 0$.

TICE 45 min

Chercher
Modéliser
Représenter

2 Ensembles de Julia, ensemble de Mandelbrot

Une fractale est un objet mathématique dont la structure est invariante par changement d'échelle.
Dans ce TP, nous allons étudiés les ensembles de Julia, nommés en l'honneur de Gaston Julia (XX^e^ siècle), qui sont un exemple de fractales. Ces ensembles sont construits à partir de suites de nombres complexes de premier terme z_0 et définies par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$ avec c un nombre complexe. Ces suites peuvent soit être bornées, soit diverger selon la valeur de z_0.
Un ensemble de Julia rempli est l'ensemble des valeurs de z_0 pour lesquelles la suite est bornée.
Benoit Mandelbrot a décidé d'étudier l'ensemble des valeurs de c tels que l'ensemble de Julia n'ait pas explosé en de multiples morceaux. Cet ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

A ▸ Étude sur un tableur

On souhaite déterminer si un nombre complexe z_0 appartient à l'ensemble de Julia rempli.
On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = |z_n|$.

1. Pour tout entier naturel n, on note $z_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n deux réels.
Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. Reproduire le tableau ci-contre dans un tableur. Les cases violettes seront remplies par l'utilisateur.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_0			n	x_n	y_n	u_n
2	y_0			0			
3	Re(c)			1			
4	Im(c)			2			
5				3			

a) Quelle formule faut-il rentrer dans les cellules E2 et F2, pour obtenir la valeur qui sera rentrée dans les cellules B1 et B2 ?

b) Déterminer les formules à rentrer dans les cellules E3, F3 et G2 pour obtenir par recopie vers le bas les valeurs de x_n, y_n et u_n.

3. On choisit $c = -1$. Déterminer deux valeurs de z_0 pour laquelle la suite (u_n) semble bornée et deux pour lesquelles elle ne semble pas bornée.

PYTHON
Programme
lienmini.fr/maths-e02-09

B ▸ Représentation graphique d'un ensemble de Julia

On souhaite représenter l'ensemble de Julia pour $c = -1$ à l'aide du programme **Python** ci-contre.
La fonction **`Julia`** a comme paramètre **`P`** (le nombre de valeurs de z_0 que l'on veut tester), et **`N`** le nombre maximal de termes de la suite (z_n) que l'on va calculer pour chaque valeur de z_0.
On admet que s'il existe un entier n_0 tel que $u_n > 2$, alors u_n n'est pas bornée.
Donc s'il existe un entier n_0 inférieur à N tel que $u_n > 2$, alors on n'affichera pas le point d'affixe z_0.

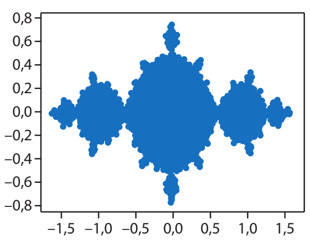
```
from random import*
from math import*
from pylab import*
def Julia(P,N):
    LX=[]
    LY=[]
    for i in range(P):
        z0=random()*4-2+1j*(random()*4-2)
        z=z0
        k=0
        while (abs(z)<2 and k<N):
            k=k+1
            z=z**2-1
        if k==N:
            LX.append(z0.real)
            LY.append(z0.imag)
    scatter(LX,LY)
    show()
```

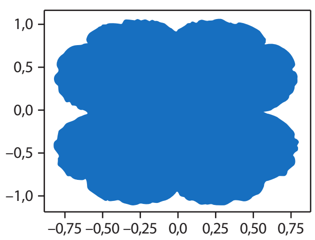
1. **`random()`** renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1.
Que renvoie **`random()*4-2`** ?

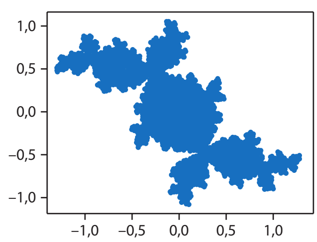
2. Tester ce programme pour :
a) $P = 1000$ et $N = 100$ **b)** $P = 100000$ et $N = 100$

3. Modifier ce programme pour représenter l'ensemble de Julia lorsque : **a)** $c = 0{,}25$ **b)** $c = -0{,}12 + 0{,}74i$.

Remarque En **Python**, i s'écrit 1j.







PARTIE 2

Arithmétique

Euclide (vers 300 av. J.-C.)

Vers 300 av. J-C, Euclide utilise pour la 1re fois la méthode de descente infinie, ancêtre du raisonnement par récurrence, dans ses *Éléments* en établissant l'existence d'un diviseur premier pour chaque nombre composé.

↪ Dicomaths p. 238

Diophante d'Alexandrie (vers II^{e} siècle ou III^{e} siècle)

Sous l'Antiquité, Diophante d'Alexandrie étudie certaines équations de la forme $ax + by = c$ (avec a, b, c, x et y des entiers relatifs) dites équations diophantiennes.

↪ Dicomaths p. 238

Hypatie d'Alexandrie (env. 360-415)

Première femme mathématicienne connue, elle écrit un commentaire sur l'arithmétique de Diophante.

↪ Dicomaths p. 239

Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638)

Au début du XVII^{e} siècle, Bachet présente son algorithme d'Euclide étendu puis la première démonstration connue de ce qui deviendra le théorème de Bachet-Bézout.

↪ Dicomaths p. 237

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes…

- J'ai étudié les ensembles de nombres et leurs propriétés.
- J'ai découvert les notions de diviseur, de multiple et de nombre premier.

En Terminale…

- Je vais approfondir mes connaissances sur l'arithmétique des entiers relatifs.
- Je vais comprendre le mécanisme de certains tests de primalité.

Pierre de Fermat (1607-1665)

Au XVIIe siècle, Mersenne, Descartes et Fermat ont de nombreux échanges épistolaires. Ce dernier énonce que les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ (avec $n \in \mathbb{N}$) dits nombres de Fermat sont tous premiers (réfuté plus tard par Euler).

↳ Dicomaths p. 238

Étienne Bézout (1730-1783)

Au XVIIIe siècle, Bézout généralise la démonstration du théorème de Bachet-Bézout et publie en 1779 sa *Théorie générale des équations algébriques*.

↳ Dicomaths p. 237

Sophie Germain (1776-1831)

Au XIXe siècle, Sophie Germain étudie des nombres premiers portant son nom.

↳ Dicomaths p. 239

Robert Daniel Carmichaël (1879-1967)

Les XXe et XXIe siècles voient l'essor de la théorie des nombres et de ses applications, notamment, le chiffrement RSA (Rivest, Shamir et Adleman) utilisés pour crypter des communications.

↳ Dicomaths p. 237

Domaines professionnels

- Un·e **responsable des achats** utilise l'optimisation linéaire pour mieux gérer les commandes.
- Un·e **spécialiste en télécommunications** développe des codes correcteurs d'erreurs.
- Un·e **cryptanalyste** se sert de différents chiffrements afin de décrypter un message, génère des nombres premiers aléatoires pour le système RSA.
- Un·e **directeur·trice** d'un établissement bancaire demande différents tests pour vérifier la sécurité de son système.
- Un·e **ingénieur(e) d'études** développe des logiciels ou des sites internet sécurisés.