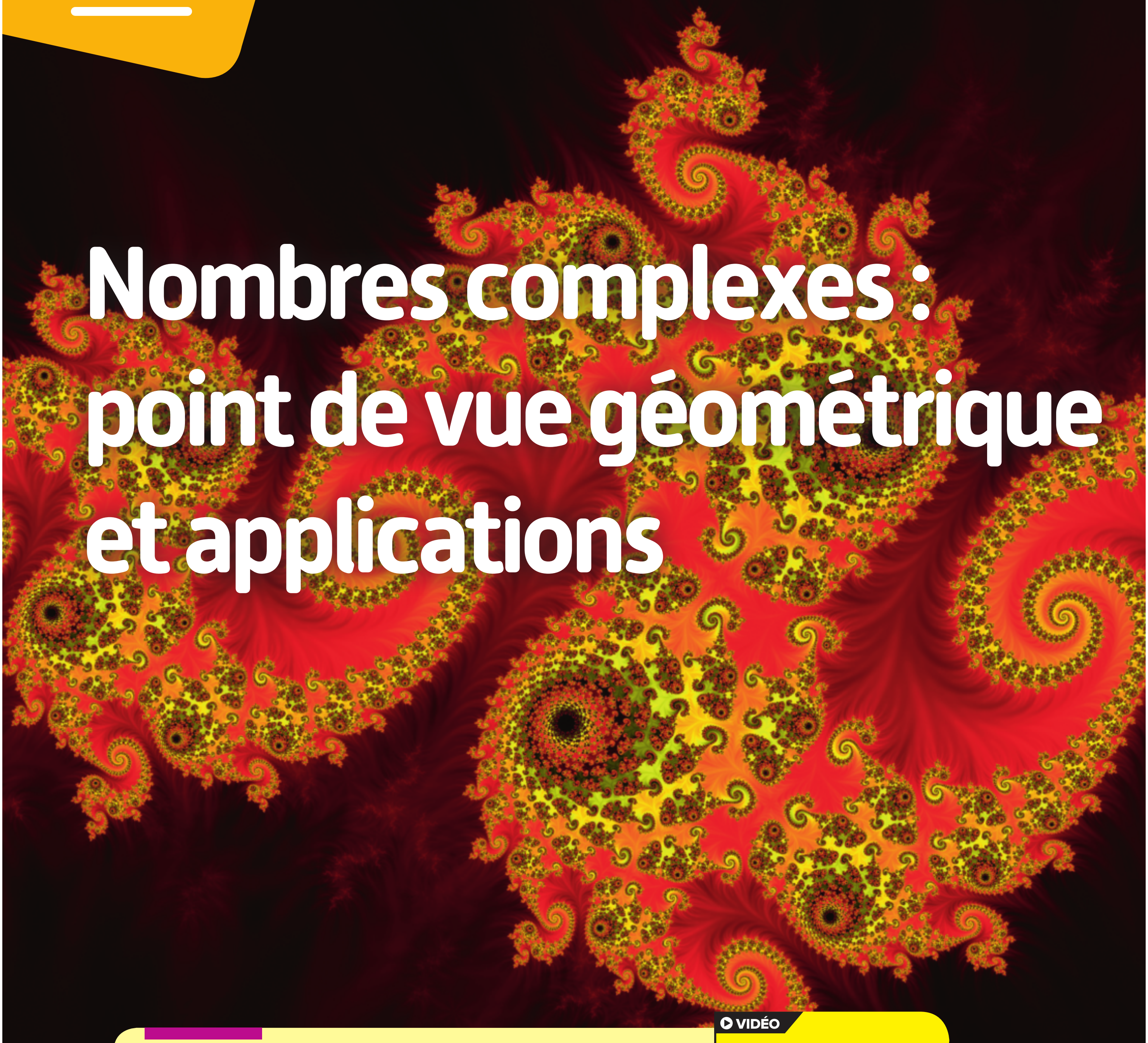
2

Nombres complexes : point de vue géométrique et applications



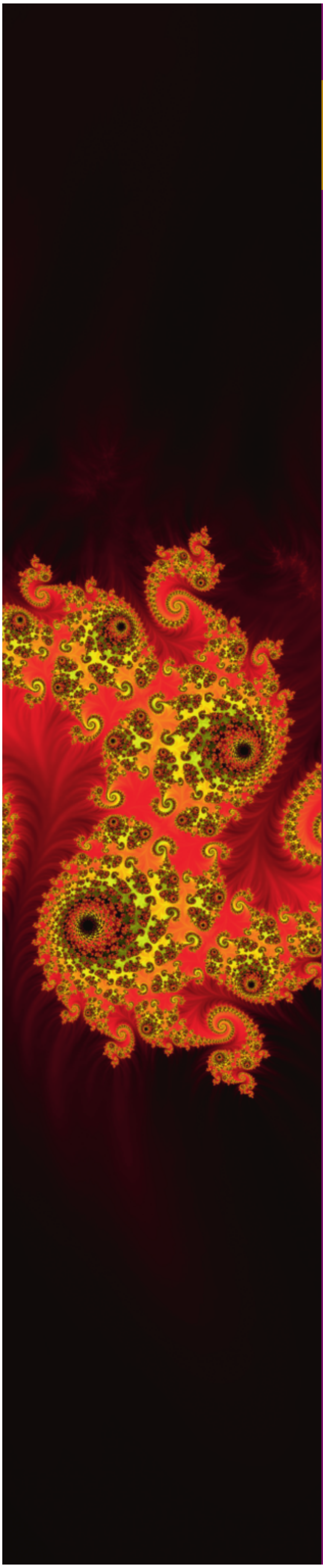
Les nombres complexes ont de nombreuses applications, notamment pour étudier des configurations du plan ou des transformations du plan (homothétie, rotation, …). Ils peuvent également être utilisés pour étudier des exemples d'ensembles fractals.

Qu'est-ce qu'un ensemble de Julia ? ↪ TP 2 p. 75

VIDÉO

Les ensembles de Julia

lienmini.fr/maths-e02-01



Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis
lienmini.fr/maths-e02-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Lire des coordonnées

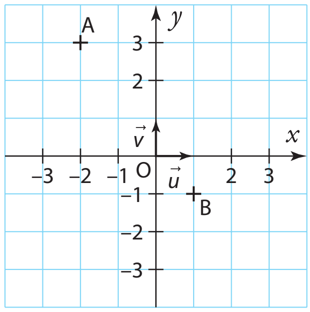
Dans un repère orthonormé, on considère les points A et B.

1. Lire graphiquement les coordonnées de A et de B.

2. Lire graphiquement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

3. Déterminer les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

4. Déterminer les coordonnées du symétrique de A par rapport à l'origine.



2 Utiliser le cercle trigonométrique

1. Tracer le cercle trigonométrique.

2. Placer sur ce cercle les points associés aux réels suivants, puis déterminer la valeur du cosinus et du sinus de chaque réel.

a) π **b)** $\dfrac{\pi}{2}$ **c)** $\dfrac{\pi}{6}$ **d)** $\dfrac{2\pi}{3}$

3 Calculer des coordonnées et des normes

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A(5 ; 3) et B(–1 ; 2).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

4 Résoudre des équations trigonométriques

Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ les équations suivantes.

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5 Calculer avec des complexes

On considère les nombres complexes $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = 3 + i$.

Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 \times z_2$ **c)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **d)** $\overline{z_1}$

6 Calculer avec la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes.

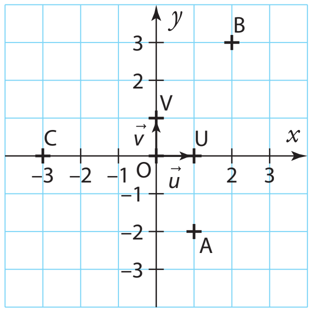
a) $\dfrac{e^7 \times e^{-6}}{e}$ **b)** $\dfrac{(e^{2x})^2 \times e^{-x}}{e^x}$

Activités

20 min

1 Représenter graphiquement un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère un point $M(x ; y)$. On appelle affixe du point M le nombre complexe z défini par $z = x + iy$.



1. Déterminer l'affixe des points O, U, V, A, B et C représentés ci-contre.

2. Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

a) Déterminer une condition sur les coordonnées de M, puis sur l'affixe de M, pour que le point M appartienne à l'axe des abscisses.

b) Déterminer une condition sur les coordonnées de M, puis sur l'affixe de M, pour que le point M appartienne à l'axe des ordonnées.

3. Quelles sont les coordonnées du point d'affixe $-2 - 4i$?

4. Soit $D(3 ; -2)$ et $E(5 ; 8)$. Déterminer les coordonnées puis l'affixe du milieu de [DE].

5. Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$. Déterminer les coordonnées puis l'affixe du milieu de [AB].

6. Soit $P(4 ; 2)$.

a) Déterminer l'affixe z de P.

b) Déterminer la forme algébrique de $\overline{z}$ et de $-z$.

c) Représenter graphiquement le point P_2 ayant pour affixe $\overline{z}$. Que peut-on dire des points P et P_2 ?

d) Représenter graphiquement le point P_3 ayant pour affixe $-z$. Que peut-on dire des points P et P_3 ?

↪ Cours 1 p. 46

20 min

2 Repérer un point par un angle et une distance

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a) Dans ce repère, placer le point $M(2 ; -2)$ et le point M′ intersection de [OM] et du cercle trigonométrique.

b) Donner un réel appartenant à $[0 ; 2\pi[$, puis un réel appartenant à $]-\pi ; \pi]$ associé au point M′.

c) Donner un troisième réel associé au point M′.

d) Donner tous les réels associés au point M′.

Une mesure un radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est un réel θ associé au point M′. Un angle orienté a une infinité de mesures. On notera $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta[2\pi]$ (lire « modulo 2π »).

2. Représenter graphiquement dans ce repère orthonormé :

a) les points A tels que $OA = 2$;

b) les points B tels que $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

c) le point C tel que $OC = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$;

d) le point D tel que $OD = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

3. Soit $M(x ; y)$.

a) Déterminer l'expression de OM en fonction de x et y.

b) On note r la distance OM et θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radians.
Exprimer x et y en fonction de r, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Puis en déduire l'affixe du point M en fonction de r, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

↪ Cours 2 p. 48 et 3 p. 50

20 min

3 Découvrir la forme exponentielle d'un nombre complexe

1. Soit f la fonction exponentielle. Donner la valeur de $f(0)$ puis comparer $f(x+y)$ et $f(x) \times f(y)$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.
Donner la valeur de $g(0)$ puis comparer $g(x+y)$ et $g(x) \times g(y)$.
Par analogie avec la fonction exponentielle, on note $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

3. Déterminer la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

4. Pour tout réel x, déterminer le module et un argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

5. Démontrer que pour tout réel x, $g(-x) = \overline{g(x)}$.

6. Déterminer la forme algébrique de $g(x) \times g(-x)$, puis en déduire que $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

7. En utilisant le résultat de la question **2.**, montrer que $(g(x))^n = g(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Écrire les résultats des questions **5.**, **6.** et **7.** en utilisant la notation avec l'exponentielle.

↪ Cours 5 p. 54

30 min

4 Utiliser les nombres complexes en géométrie

Les nombres complexes peuvent être utilisés pour étudier des configurations du plan (alignement, orthogonalité, calcul de longueurs ou d'angles par exemple).

A ▶ Arguments et angles

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.
On rappelle que si M est un point d'affixe z_M, alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)[2\pi]$.

1. Soit P le point tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$. Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.

2. On admet que pour tous vecteurs $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ et $\vec{w_3}$:
- $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) + (\vec{w_2}, \vec{w_3}) = (\vec{w_1}, \vec{w_3})[2\pi]$ (cette relation s'appelle la relation de Chasles).
- $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = -(\vec{w_2}, \vec{w_1})[2\pi]$.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

3. En déduire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de z_A, z_B et z_C.

4. Application : soit A(1 + i), B(i), C(3 + 2i) et D(3). Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

B ▶ Configurations du plan

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D.

1. En utilisant des vecteurs, déterminer une condition pour que :

a) A, B, C soient alignés.
b) ABC soit un triangle rectangle en A.
c) (AB) et (CD) soient parallèles.
d) (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

2. En utilisant la propriété démontrée en **A ▶ 2.** déterminer une condition pour chaque cas de la question précédente en utilisant un argument et les affixes des points.

3. Application : soit A(1 + i), B(3 + 2i), C(–1 + i) et D(3 + 3i). Démontrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

↪ Cours 6 p. 56

Cours

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1 Représentation graphique d'un nombre complexe

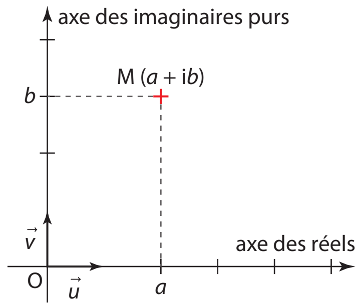
Définition Point image, vecteur image et affixe

À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on peut associer :

- **l'unique point M(a ; b). M est appelé point image de z ;**
- **l'unique vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $\vec{w}$ est appelé vecteur image de z.**

Réciproquement :

- **à tout point M(a ; b) avec a et b deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du point M ;**
- **à tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ avec a et b deux réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.**



Remarques

① Lorsqu'un point ou un vecteur est repéré par son affixe, le plan est appelé le plan complexe.

② Les nombres réels sont représentés sur l'axe des abscisses, appelé aussi axe des réels.
Les nombres imaginaires purs sont représentés sur l'axe des ordonnées, appelé aussi axe des imaginaires purs.

Notations

L'affixe de M est souvent noté z_M et la donnée d'un point M d'affixe z_M est souvent notée M(z_M).
L'affixe de $\vec{w}$ est souvent noté $z_{\vec{w}}$, et la donnée d'un vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}}$ est souvent notée $\vec{w}(z_{\vec{w}})$.

Exemples • Si A(1 ; 2), alors $z_A = 1 + 2i$. • Si $z_{\vec{w}} = 2 - 3i$, alors $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Théorème Égalité de deux points, de deux vecteurs

Soit A(z_A) et B(z_B) deux points du plan complexe : $A = B \Leftrightarrow z_A = z_B$.
Soit $\vec{w_1}(z_{\vec{w_1}})$ et $\vec{w_2}(z_{\vec{w_2}})$ deux vecteurs du plan complexe : $\vec{w_1} = \vec{w_2} \Leftrightarrow z_{\vec{w_1}} = z_{\vec{w_2}}$.

Théorème Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, affixe du milieu de [AB]

Soit A(z_A) et B(z_B) deux points du plan complexe.

- **$\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$**
- **le milieu du segment [AB] a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$**

Exemples Soit A(3 + 2i) et B(5 – i). Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = 5 - i - (3 + 2i) = 2 - 3i$.

Théorème Opérations et affixe d'un vecteur

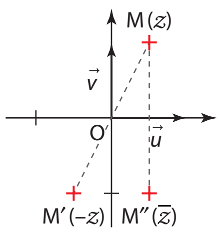
Soit $\vec{w_1}(z_1)$ et $\vec{w_2}(z_2)$.

- **$\vec{w_1} + \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.**
- **$\vec{w_1} - \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 - z_2$.**
- **$-\vec{w_1}$ a pour affixe $-z_1$.**
- **Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{w_1}$ a pour affixe λz_1.**

Propriétés Interprétation géométrique

Soit M un point d'affixe z. Alors :

- **$-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'origine ;**
- **$\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.**

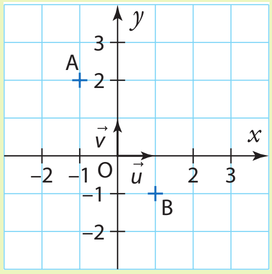


Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer et utiliser des affixes

Énoncé

1. **Dans le plan complexe ci-contre, on a placé les points A et B.**
Lire les affixes du point A et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



2. **Dans un repère orthonormé, placer :**

a) le point C d'affixe 3 – 2i ;

b) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

• Re(z) = 2 • Im(z) = 3 • Re(z) = Im(z).

3. **a) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.**

b) Déterminer l'affixe du centre du parallélogramme.

Solution

1. A(–1 ; 2). Donc $z_A = -1 + 2i$. [1]

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 - 3i$. [1]

2. a) $z_C = 3 - 2i$, donc C(3 ; –2).

b) Posons $z = a + ib$, avec a et b deux réels. On a alors M(a ; b). [2]

• Re(z) = 2 ⇔ $a = 2$ [2]

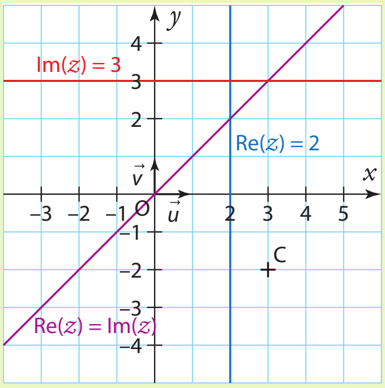
Il faut tracer la droite d'équation $x = 2$.

• Im(z) = 3 ⇔ $b = 3$ [3]

Il faut tracer la droite d'équation $y = 3$.

• Re(z) = Im(z) ⇔ $a = b$

Il faut tracer la droite d'équation $y = x$.



3. a) ABCD est un parallélogramme ⇔ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [4]

⇔ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ [5]

⇔ $2 - 3i = z_C - z_D$ [6]

⇔ $z_D = z_C - (2 - 3i)$

⇔ $z_D = 3 - 2i - (2 - 3i)$

⇔ $z_D = 1 + i$.

Pour que ABCD soit un parallélogramme, l'affixe de D doit être égale à 1 + i.

b) Soit I le centre du parallélogramme. I est le milieu de [AC]. [7]

$z_I = \dfrac{-1 + 2i + 3 - 2i}{2} = 1$. [8] Donc I a pour affixe 1.

Conseils & Méthodes

[1] Si A(a ; b), alors l'affixe du point A est $z_A = a + ib$.

Si $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ alors $z_{\vec{w}} = a + ib$.

[2] Si M a pour affixe $a + ib$ avec a et b deux réels alors M(a ; b).

[3] Traduire la condition en utilisant les coordonnées de M.

[4] ABCD parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

[5] Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont la même affixe.

[6] $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

[7] Le centre d'un parallélogramme est le milieu de ses diagonales.

[8] Le milieu de [AC] a pour affixe $\dfrac{z_A + z_C}{2}$.

À vous de jouer !

1 Soit (O ; U, V) un repère orthonormé.
1. Déterminer l'affixe des points O, U et V.
2. Tracer ce repère, et placer le point A d'affixe –1 + 2i et un vecteur $\vec{w}$ d'affixe 2 – i.

2 Pour chaque question, représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie la condition demandée.
a) Im(z) = –2
b) Im(z) = 2 × Re(z) + 1.

3 On considère deux points A et B d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2 - 4i$.
Déterminer l'affixe du point C pour que B soit le milieu de [AC].

4 On considère deux points A et B d'affixes $z_A = -2 + 5i$ et $z_B = 3 + 7i$.
Déterminer l'affixe du point C tel que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$.

↪ Exercices 38 à 49 p. 62

2 Module d'un nombre complexe

Définition Module d'un nombre complexe

Soit M un point d'affixe z. Le **module** de z, noté $|z|$ est le réel positif défini par $|z| = \text{OM}$.
Si $z = a + ib$ avec a et b deux réels. Alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple Soit $z = 2 + \text{i}$. Alors $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Propriétés Cas particuliers

- Si $z \in \mathbb{R}$, alors on a $z = a$ avec $a \in \mathbb{R}$, et alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de a).
- Si $z \in \text{i}\mathbb{R}$, alors on a $z = \text{i}b$ avec $b \in \mathbb{R}$, et alors $|z| = \sqrt{b^2} = |b|$ (valeur absolue de b).

Remarque
Si $z = z'$, alors $|z| = |z'|$. Mais la réciproque est fausse. En effet, $|1 + \text{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $|1 - \text{i}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Propriétés Propriétés du module

Soit z un nombre complexe.
1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ 2) $|-z| = |z|$ 3) $|\overline{z}| = |z|$ 4) $z \times \overline{z} = |z|^2$

Démonstration
2) et 3) ↪ **Exo 89** p. 65
4) Posons $z = a + \text{i}b$ avec a et b deux réels. On a alors $\overline{z} = a - \text{i}b$
$z \times \overline{z} = (a + \text{i}b)(a - \text{i}b) = a^2 - (\text{i}b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Théorème Module et opérations

Soit z et z' deux nombres complexes.
1) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
2) Pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$
3) Si $z \neq 0$, alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
4) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Démonstration
1) $|z \times z'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z \square z' \square \overline{z} \square \overline{z'} = z\overline{z} \square z'\overline{z'} = |z|^2 \square |z'|^2 = (|z| \square |z'|)^2$.
Or $|z \times z'| \in \mathbb{R}^+$ et $|z| \times |z'| \in \mathbb{R}^+$. Donc $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $|z^n| = |z|^n$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $|z^0| = |1| = 1$ et $|z|^0 = 1$. Donc $|z^0| = |z|^0$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P(n) est vraie et montrons que P($n + 1$) est vraie.
$|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n| \times |z| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$. Donc P($n + 1$) est vraie.
Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P(n) est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.
3) $z \times \dfrac{1}{z} = 1$. Donc $\left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |1|$. Donc $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$. Donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
$\dfrac{z'}{z} = z' \square \dfrac{1}{z}$. Donc $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \left|z' \square \dfrac{1}{z}\right| = |z'| \square \left|\dfrac{1}{z}\right| = |z'| \square \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e02-04

Théorème Distance et module

Soit A(z_A) et (z_B). On a $\text{AB} = |z_\text{B} - z_\text{A}| = |z_\text{A} - z_\text{B}|$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 2 Déterminer et utiliser le module d'un nombre complexe

Énoncé

1. Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 7 - 2i$ **b)** $z_2 = 3i$ **c)** $z_3 = -\dfrac{5}{1+i}$

2. Soit A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 6 + 3i$ et $z_B = 3 - 4i$. Déterminer la distance AB.

3. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z| = 3$ **b)** $|z - 3 + 4i| = 2$ **c)** $|z - 2 + i| = |z + 4 - 2i|$

Solution

1. a) $z_1 = 7 - 2i$. Donc $|z_1| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$. **1**

b) $z_2 = 0 + 3i$. Donc $|z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$.

c) $z_3 = -\dfrac{5}{1+i} = \dfrac{-5}{1+i}$ **2**

Donc $|z_3| = \dfrac{|-5|}{|1+i|} = \dfrac{|-5+0i|}{|1+1i|} = \dfrac{\sqrt{(-5)^2+0^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

2. $AB = |3 - 4i - (6 + 3i)| = |-3-7i|$. Donc $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$. **3**

3. a) $|z| = 3 \Leftrightarrow |z - 0| = 3$ **4**

$\Leftrightarrow OM = 3$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 3.

b) $|z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |z - (3 - 4i)| = 2$ **4**

Soit A le point d'affixe $3 - 4i$.

$|z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$.

L'ensemble cherché est donc un cercle de centre A(3 ; –4) et de rayon 2.

c) $|z - 2 + i| = |z + 4 - 2i| \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = |z - (-4 + 2i)|$ **4**

Soit B le point d'affixe $2 - i$ et C le point d'affixe $-4 + 2i$.

$|z - 2 + i| = |z + 4 - 2i| \Leftrightarrow BM = CM$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [BC], avec B(2 ; –1) et C(–4 ; 2).

Conseils & Méthodes

1 Si $z = a + ib$ avec a et b deux réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2 Il n'est pas utile de déterminer la forme algébrique de z_3. En effet, pour tous nombres complexes z et z' tel que $z' \neq 0$, on a $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

3 Une distance peut être calculée avec le module : $AB = |z_B - z_A|$.

4 Un module peut s'interpréter comme une distance entre deux points. Pour cela, il faut l'écrire sous la forme $|z - z_A|$ avec z_A l'affixe d'un point donné.

À vous de jouer !

5 Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = -3 + 9i$

b) $z_2 = 2i - 4$

6 Déterminer le module des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = (3 + 2i)(5 - 4i)$

b) $z_2 = \dfrac{3 + 2i}{5 - 4i}$

7 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 + 5i$ et $z_B = -1 + 2i$.
Déterminer les distances OA et OB.

8 Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) $|z| = 18$

b) $|z + 2 - i| = 4$

c) $|z - 3 - i| = |z + 5 - 2i|$

➥ Exercices 50 à 55 p. 62

3 Argument et forme trigonométrique

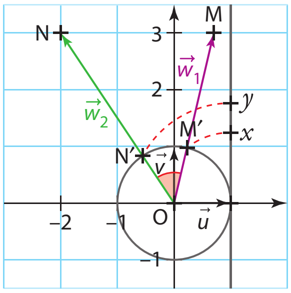
Définition Angle orienté

Soit $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs et M et N deux points tels que $\vec{w_1} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{w_2} = \overrightarrow{ON}$.

Soit M′ et N′ les points d'intersection de [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique.

Si M′ est l'image d'un réel x et N′ est l'image d'un réel y, alors une mesure de **l'angle orienté** $(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ est $y - x$.

Cas particulier : si M′ est le point image du réel x, alors une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est x.



Remarque Un angle orienté a une infinité de mesures. Si θ est l'une d'entre elles, alors $\theta + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une mesure de l'angle orienté. On notera donc $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = \theta[2\pi]$ (lire « θ modulo 2π »).

Exemple $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\vec{v}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Définition Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.
Un **argument** de z est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On le note **arg($z$)**.

Notation Un nombre complexe a une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, on notera : $\arg(z) = \theta[2\pi]$. $\arg(z) = \theta[a]$ (« θ modulo a ») signifie que $\arg(z) = \theta + k \times a$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque Le nombre complexe $z = 0$ n'a pas d'argument.

Exemple $\arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Propriétés Propriétés des arguments

Soit z un nombre complexe non nul.

- $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = 0[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) = \pi[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\arg(z) + 2k\pi = \arg(z)[2\pi]$

Théorème Déterminer un argument

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

Alors un argument de z est un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$

Théorème Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes non nuls sont **égaux** si, et seulement si, ils ont **même module** et **même argument (modulo 2π)**.

Définition Forme trigonométrique

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$. Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z.

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer et utiliser un argument et une forme trigonométrique

Énoncé

1. a) Déterminer un argument du nombre complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$.

b) En déduire la forme trigonométrique de z.

2. Soit z_2 un nombre complexe tel que $|z_2| = 8$ et $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}[2\pi]$.

Déterminer la forme algébrique du nombre z_2.

3. Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Solution

1. a) On calcule d'abord le module de z. **1**

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Donc $z = 2 \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$.

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ **2**

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b) La forme trigonométrique de z est :

$z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **3**

2. $z_2 = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ **4**

Donc $z_2 = 8(0 - i)$ **5**

Donc $z_2 = -8i$.

3. $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. **6**

Donc l'ensemble des points M tels que $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ est une demi-droite d'origine O, privée de O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}\,,\vec{w}) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Conseils & Méthodes

1 Commencer par calculer le module de z.
Si $z = a + ib$, avec a et b deux réels, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2 Chercher ensuite un argument de z. Il faut déterminer un réel θ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

3 La forme trigonométrique de z est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

4 Déterminer la forme trigonométrique de z.
$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$

5 Calculer les valeurs des cosinus et des sinus, puis développer.

6 On interprète un argument d'un nombre complexe comme la mesure d'un angle orienté.

À vous de jouer !

9 Déterminer un argument puis la forme trigonométrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \sqrt{3} - i$ **b)** $z_2 = 3 + 3i$ **c)** $z_3 = -2$

10 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) z_1 le nombre complexe tel que $|z_1| = 5$ et $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) z_2 le nombre complexe de module 4 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

11 Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

12 Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z) = 0[\pi]$.

↪ Exercices 56 à 64 p. 63

Cours

4 Relations trigonométriques et propriétés des arguments

Propriétés Formules d'addition

Pour tous réels a et b,

① $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

② $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

③ $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

④ $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$

Démonstration

① Soit $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs de norme 1 tels que $\vec{w_1}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$ et $\vec{w_2}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$.

VIDÉO Démonstration lienmini.fr /maths-e02-05

D'une part $\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

D'autre part $\vec{w_1}\cdot\vec{w_2}=\|\vec{w_1}\|\times\|\vec{w_2}\|\times\cos(\vec{w_1},\vec{w_2})$
$=1\times1\times\cos(b-a)$.
$=\cos(a-b)$

car $\cos(t)=\cos(-t)$ pour tout réel t.

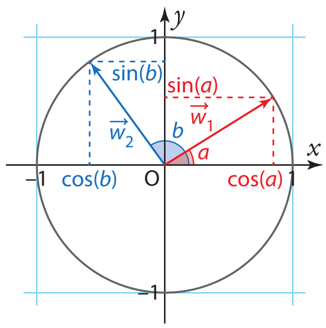
Donc $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

Pour démontrer les autres formules :

② On remplace b par $-b$ dans la première formule.

③ $\sin(a-b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right)$ puis on utilise la deuxième formule.

④ On remplace b par $-b$ dans la troisième formule.



Propriétés Formules de duplication

Pour tout réel a,

- **$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=1-2\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$**
- **$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$**

Démonstration

On utilise les formules d'addition avec $b=a$.

Propriétés Argument et opérations

Soit z et z' deux nombres complexes non nul.

① $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

② Pour tout entier naturel n, $\arg(z^n)=n\times\arg(z)[2\pi]$.

③ $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$

④ $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)[2\pi]$

Démonstration

① Soit z et z' deux nombres complexes dont la forme trigonométrique est $z=r(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z'=r'(\cos(\theta')+\mathrm{i}\sin(\theta'))$.

Alors $zz'=rr'(\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')+\mathrm{i}(\cos(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta)\cos(\theta')))$.

Donc $zz'=rr'(\cos(\theta+\theta')+\mathrm{i}\sin(\theta+\theta'))$.

Donc $\arg(zz')=\theta+\theta'[2\pi]$. Soit $\arg(z\times z')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$.

② On démontre le deuxième point par récurrence.

③ $\frac{1}{z}\times z=1$. Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\times z\right)=\arg(1)[2\pi]$. Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)+\arg(z)=0[2\pi]$. Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)[2\pi]$.

④ $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$. Donc $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')+\arg\left(\frac{1}{z}\right)[2\pi]$. Donc $\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\arg(z')-\arg(z)[2\pi]$.

Exercices résolus

Méthode 4 Utiliser les formules d'addition et de duplication

Énoncé

1. **Déterminer la valeur de $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.**

2. **En remarquant que $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$, utiliser une autre méthode pour déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.**

Solution

1. $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$ **1**

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **2**

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(1+\sqrt{3}).$

2. $\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\pi}{12}$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1$. Donc $\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1$.

D'où $2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3** Donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Conseils & Méthodes

1 Pour soustraire deux fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur.

2 Utiliser les formules d'addition $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

3 Utiliser les formules du duplication $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1$

À vous de jouer !

13 En remarquant que $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

14 En utilisant les formules de duplication, déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

↪ Exercices 65 à 67 p. 63

Méthode 5 Utiliser les propriétés des arguments

Énoncé

On considère les nombres complexes $z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_2=-4\mathrm{i}$. Déterminer un argument de z_1z_2 et de $z_1^{2\,020}$.

Solution

• $|z_1|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$ **1** **2**

On cherche un réel θ tel que $\begin{cases}\cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{1}{2}\end{cases}$ Donc $\arg(z_1)=\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

Par un raisonnement similaire, on montre que $\arg(z_2)=\frac{3\pi}{2}[2\pi]$.

Donc $\arg(z_1z_2)=\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}[2\pi]$. Soit $\arg(z_1z_2)=\frac{7\pi}{3}[2\pi]$ ou encore $\arg(z_1z_2)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

• $\arg(z_1^{2\,020})=2\,020\times\frac{5\pi}{6}[2\pi]=\frac{10\,100\pi}{6}[2\pi]=\frac{841\times12\pi+8\pi}{6}[2\pi]$

$=841\times2\pi+\frac{8\pi}{6}[2\pi]$. **3** **4** Donc $\arg(z_1^{2020})=\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

Conseils & Méthodes

1 Il n'est pas utile de déterminer la forme algébrique de z_1z_2 : $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)[2\pi]$.

2 Pour déterminer un argument de z_1, commencer par calculer le module de z_1.

3 $\arg(z^n)=n\times\arg(z)[2\pi]$

4 Pour simplifier, utiliser : $\arg(z)+2k\pi=\arg(z)[2\pi]$. Pour cela, effectuer la division euclidienne de 10 100 par 2×6, donc 12. $10\,100=841\times12+8$.

À vous de jouer !

15 On considère les nombres complexes $z_1=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=1+\mathrm{i}$. Déterminer un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

16 On considère les nombres complexes $z=5-5\mathrm{i}$. Déterminer un argument de z^{500}.

↪ Exercices 68 à 70 p. 64

Cours

5 Forme exponentielle

Théorème Fonction exponentielle complexe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

• En utilisant les formules d'addition du cosinus et du sinus, on montre que, pour tous réels θ et θ' : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$. De plus, $f(0) = 1$.

• Par analogie avec la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$, on pose $f(\theta) = e^{\mathrm{i}\theta}$, soit $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

On a $|e^{\mathrm{i}\theta}| = 1$ et $\arg(e^{\mathrm{i}\theta}) = \theta[2\pi]$.

Exemple

$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i}$.

Définition Forme exponentielle d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.

Réciproquement, si z est un nombre complexe tel que $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

Exemple

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$. On a $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Donc $z = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Remarque Pour obtenir une forme exponentielle, il faut impérativement avoir $r > 0$.

Par exemple $-2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ n'est pas une forme exponentielle.

Propriétés Calculer avec la notation exponentielle

Pour tous nombres réels θ et θ' :

- **$e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$**
- **pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{\mathrm{i}\theta})^n = e^{\mathrm{i}n\theta}$**
- **pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{\mathrm{i}(\theta+k2\pi)} = e^{\mathrm{i}\theta}$**
- **$\frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{e^{\mathrm{i}\theta}}$**
- **$\frac{e^{\mathrm{i}\theta'}}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{\mathrm{i}(\theta' - \theta)}$**

Théorème Égalité de deux exponentielles complexes

Pour tous nombres réels θ et θ', $e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta'[2\pi]$.

Théorème Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n$.

Théorème Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta})$.

Démonstration

$$\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{2}(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)) = \frac{1}{2}(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta))$$

$$= \frac{1}{2}\square\,(2\cos(\theta))$$

Donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta})$.

On utilise un raisonnement similaire pour $\sin(\theta)$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths e02-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 6 Déterminer et utiliser la forme exponentielle d'un nombre complexe

Énoncé

1. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) z_1 de module 2 et d'argument $\dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} z_1^2$ **c)** $z_3 = \dfrac{2z_1}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

2. On considère le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Déterminer la forme algébrique de z^{10}.

3. En utilisant les formules d'Euler, montrer que $\cos^3(\theta) = \dfrac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$.

Solution

1.a) On a $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **1**

b) $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4 \times e^{i\frac{5\pi}{6}\times 2} = 4 \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{10\pi}{6}}$ **2**

Donc $z_2 = 4 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{6}\right)} = 4 \times e^{i\frac{9\pi}{6}} = 4 \times e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **3**

c) $z_3 = \dfrac{2\times 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = 4\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$ **4** Donc $z_3 = 4 \times e^{i\pi}$.

2. $z^{10} = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} = 2^{10} \times \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{10} = 1024 \times e^{i\frac{10\pi}{6}}$ **2**

Donc $z^{10} = 1024 \times e^{i\frac{5\pi}{3}} = 1024 \times \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$. **5**

Donc $z^{10} = 1024 \times \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512 - i \times 512\sqrt{3}$. **6**

3. D'après la formule d'Euler, $\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$. **7**

Donc $\cos^3(\theta) = \left(\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right)^3 = \frac{1}{8} \times (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3$ **8**

$= \frac{1}{8} \times \left((e^{i\theta})^0(e^{-i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^1(e^{-i\theta})^2 + 3(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^1 + (e^{i\theta})^3(e^{-i\theta})^0\right)$

$= \frac{1}{8} \times \left(e^{-3i\theta} + 3e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} + e^{3i\theta}\right)$ **9** $= \frac{1}{8} \times \left(e^{-3i\theta} + e^{3i\theta} + 3(e^{-i\theta} + e^{i\theta})\right) = \frac{1}{8} \times \left(2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta)\right)$ **10**

Donc $\cos^3(\theta) = \dfrac{3\cos(\theta) + \cos(3\theta)}{4}$.

Conseils & Méthodes

1 La forme exponentielle de z est $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

2 $(ab)^n = a^n \times b^n$ et $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

3 $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

4 $\dfrac{e^{i\theta'}}{e^{i\theta}} = e^{i(\theta'-\theta)}$

5 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

6 Déterminer la valeur du cosinus et du sinus, puis développer.

7 Appliquer la formule d'Euler :

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$.

8 La formule du binôme de Newton est : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

9 $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ et $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

10 On réutilise la formule d'Euler :

$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ donc

$(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2\cos(\theta)$.

À vous de jouer !

17 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) z_1 de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{3}$

b) $z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z_1^2$

18 En utilisant les formules d'Euler, montrer que $\sin^3(\theta) = \dfrac{-\sin(3\theta) + 3\sin(\theta)}{4}$.

19 Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **b)** $z_2 = \dfrac{8e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

20 On considère le nombre complexe $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Déterminer la forme algébrique de z^{20}.

↪ Exercices 71 à 77 p. 64

6 Ensembles de nombres et géométrie

Propriété **Ensemble $\mathbb{U}$**

Notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Si z et z' sont deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$. Alors $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration

$|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1$. Donc $z \times z' \in \mathbb{U}$.
Si $z \in \mathbb{U}$, alors $|z| = 1$, donc $z \neq 0$. De plus $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$. Donc $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Définition **Racine n-ième de l'unité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de l'unité, un nombre complexe z tel que $z^n = 1$.
On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \ldots; (n-1)\} \right\}$$

Démonstration

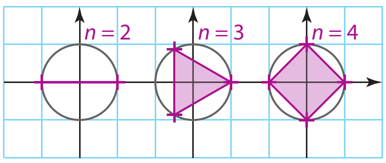
VIDÉO Démonstration lienmini.fr /maths-e02-06

$z^n = 1$. Donc $|z|^n = 1$. Et comme $|z| \in \mathbb{R}^+$, alors $|z| = 1$. Posons donc $z = e^{i\theta}$.
$z^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = e^0 \Leftrightarrow n\theta = 0[2\pi] \Leftrightarrow n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$
Or $z^n = 1$ est une équation polynomiale de degré n. Donc elle admet au plus n solutions.
Donc $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0; 1; 2; \ldots; (n-1)\} \right\}$.

Exemple

$\mathbb{U}_3 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{3}}; e^{\frac{4i\pi}{3}} \right\}$ et $\mathbb{U}_4 = \left\{ 1; e^{\frac{2i\pi}{4}}; e^{\frac{4i\pi}{4}}; e^{\frac{6i\pi}{4}} \right\}$, donc $\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$.

Remarque Les racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.



Propriété **Argument et angle**

Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points distincts.

Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

- **A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0[\pi]$.**
- **(AB) // (CD) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0[\pi]$.**
- **ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.**
- **(AB) $\perp$ (CD) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.**

Remarque $\theta = 0[\pi]$ signifie $\theta = 0[2\pi]$ ou $\theta = \pi[2\pi]$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ signifie $\theta = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Méthode 7 Utiliser les racines de l'unité pour étudier les polygones réguliers

Énoncé

En utilisant les racines n-ièmes de l'unité, tracer un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique dont un des sommets est le point A d'affixe 1. Puis, déterminer la longueur de ses côtés.

Solution

• Les sommets de l'octogone correspondent aux racines 8-ièmes de l'unité. **1**

$\mathbb{U}_8 = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{8}}, k \in \{0\,;1\,;2\,;\ldots\,;7\} \right\}$. $z_A = 1 = e^0$; $z_B = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ **2**

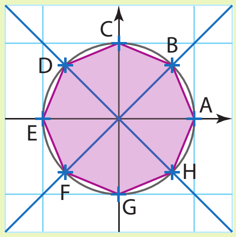
$z_C = e^{\frac{4i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et ainsi de suite.

• Tous ses côtés ont même longueur. Calculons AB.

$AB = \left| e^{i\frac{\pi}{4}} - e^0 \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 \right|$ **3**

$= \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Donc $AB = \sqrt{2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **4** La longueur de ses côtés est donc $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.



Conseils & Méthodes

1 Un octogone est un polygone à 8 côtés.

2 Pour placer $B\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$, on trace la droite d'équation $y = x$.

3 $e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4 Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

À vous de jouer !

21 Tracer précisément un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique et déterminer son périmètre.

22 On veut étudier le pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Déterminer une valeur approchée de la longueur de ses côtés.

↪ Exercices 78 à 79 p. 64

Méthode 8 Utiliser les arguments en géométrie

Énoncé

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 2i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = 1 - i$. Montrer que ABC est rectangle en B.

Solution

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right)[2\pi]$

Or $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{1 - i - (2 + i)}{2i - (2 + i)} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{(-1 - 2i) \times (-2 - i)}{(-2 + i) \times (-2 - i)}$ **1**

$= \frac{2 + i + 4i - 2}{(-2)^2 - i^2} = \frac{5i}{5} = i$

Donc $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arg(i)[2\pi] = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ **2**

Donc ABC est un triangle rectangle en B.

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient de la forme $\frac{a + ib}{a' + ib'}$ multiplier le numérateur et le dénominateur par $a' - ib'$.

2 On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = 0 \\ \sin\theta = 1 \end{cases}$

À vous de jouer !

23 Soit A, B et C trois points d'affixe respectives $z_A = 1 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 4 + 4i$.
Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

24 Soit A, B et C trois points d'affixe respectives $z_A = 1 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = -2 + 2i$. Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

↪ Exercices 80 à 87 p. 64

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths e02-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Effectuer des calculs en choisissant une forme adaptée

Cours 1 p. 46 2 p. 48 3 p. 50 4 p. 52 5 p. 54

Énoncé

Soit A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = \dfrac{3-i}{2+i}$.

1. **La droite (AB) est-elle parallèle à l'axe des ordonnées ?**

2. **Donner la forme algébrique de $z_B{}^{2\,020}$. Est-ce un nombre réel ?**

3. **Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle de $\dfrac{z_B}{z_A}$.**

4. **En déduire une valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.**

Solution

1. $z_A = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right) = 1 - i\sqrt{3}$ **1**

Et $z_B = \dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{6-3i-2i+i^2}{2^2-i^2} = \dfrac{5-5i}{5} = 1-i.$ **2**

$\mathrm{Re}(z_A) = \mathrm{Re}(z_B) = 1$. Donc (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées.

2. $|z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. **3**

On cherche θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ vérifie les deux équations.

Donc $\arg(z_B) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$, et $z_B = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$z_B^{2\,020} = \left(\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2\,020} = \sqrt{2}^{2\,020} \times \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2\,020}$$

Donc $z_B^{2\,020} = \sqrt{2}^{2\,020} \times e^{-i\frac{\pi}{4} \times 2\,020} = \sqrt{2}^{2\,020} \times e^{-i505\,\pi}$.

Or $e^{-i\,505\pi} = e^{i\,(-506\pi+\pi)} = e^{i\,(-253\times 2\pi+\pi)} = e^{i\pi}$. **4**

Donc $z_B^{2\,020} = \sqrt{2}^{2\,020}\,e^{i\pi} = \sqrt{2}^{2\,020}(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Donc $z_B = \sqrt{2}^{2\,020}(-1) = -2^{1\,010}$ et z_B est un nombre réel.

3. $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \dfrac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1+3}$ **5**

Donc $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4. On a $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$. Donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$. Donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\times(1+\sqrt{3})}{4}$. **6**

Conseils & Méthodes

1 (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées si, et seulement si, A et B ont la même abscisse, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(z_A) = \mathrm{Re}(z_B)$.

2 Pour déterminer la forme algébrique de $\dfrac{a+ib}{a'+ib'}$, multiplier le numérateur et le dénominateur par $a' - ib'$.

3 Pour déterminer la puissance d'un nombre complexe, on utilise la forme exponentielle. On calcule donc le module et un argument.

4 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

5 Pour déterminer la forme algébrique, utiliser les formes algébriques de z_B et de z_A. Pour déterminer la forme exponentielle, utiliser les formes exponentielles de z_A et z_B.

6 Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

À vous de jouer !

25 Soit $z_1 = 3 + 3i$ et $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$.
En utilisant plusieurs formes du nombre complexe z_1z_2, déterminer une valeur de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

26 Soit $z = \dfrac{6+2i}{4-2i}$.
Déterminer la forme algébrique de $z^{2\,021}$.

Exercices 88 à 95 p. 65

Exercices résolus

Méthode 10 Étudier des configurations du plan

Cours 1 p. 46 2 p. 48 3 p. 50 6 p. 56

Énoncé

Soit A, B et C trois points d'affixe $z_A = 3 + 6i$, $z_B = -1 - 2i$ et $z_C = -3 + 4i$.

1. Montrer que O, A et B sont alignés.

2. Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre E(1 ; 2), dont on déterminera le rayon.

3. Déterminer l'affixe du point D tel que B soit le symétrique de D par rapport à A.

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\arg\left(\dfrac{z-1+2i}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Solution

1. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right)[2\pi]$ **1**

Or $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{-1-2i-0}{3+6i-0} = \dfrac{-1-2i}{3+6i}$.

Donc $\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{(-1-2i)(3-6i)}{(3+6i)(3-6i)} = \dfrac{-3+6i-6i+12i^2}{3^2-(6i)^2} = \dfrac{-3-12}{9+36} = -\dfrac{1}{3}$.

Donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(-\dfrac{1}{3}\right)[2\pi]$. Donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi\,[2\pi]$ **2**

Donc O, A et B sont alignés.

2. Calculons EA, EB et EC. **3**

$EA = |z_A - z_E| = |3+6i-(1+2i)| = |2+4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$.

$EB = |z_B - z_E| = |-1-2i-(1+2i)| = |-2-4i| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{20}$.

$EC = |z_C - z_E| = |-3+4i-(1+2i)| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20}$.

$EA = EB = EC = \sqrt{20}$.

Donc A, B et C appartiennent à un même cercle de centre E et de rayon $\sqrt{20}$.

3. B est le symétrique de D par rapport à A si, et seulement si, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$. **4**

Soit z_D l'affixe de D.

$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}} = z_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow z_A - z_D = z_B - z_A \Leftrightarrow z_D = 2z_A - z_B \Leftrightarrow z_D = 2\times(3+6i)-(-1-2i)$

$\Leftrightarrow z_D = 7 + 14i$

Donc pour que B soit le symétrique de D par rapport à A, il faut que l'affixe de D soit $z_D = 7 + 14i$.

4. $\arg\left(\dfrac{z-1+2i}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{1-2i-z}{2-z}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ **5**

Soit F et G les points d'affixe $z_F = 1 - 2i$ et $z_G = 2$.

$\arg\left(\dfrac{z-1+2i}{z-2}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_F - z}{z_G - z}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MF}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Donc M appartient au cercle de diamètre [FG], privé des points F et G.

Conseils & Méthodes

1 O, A et B sont alignés si, et seulement si, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0[\pi]$.

2 Si $z \in \mathbb{R}^-$, alors $\arg(z) = \pi[2\pi]$.

3 M appartient au cercle de centre E et de rayon r si, et seulement si, $EM = r$, soit $|z_M - z_E| = r$.

4 B est le symétrique de D par rapport à A si, et seulement si, A est le milieu de [DB].

5 Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $M(z)$.
$\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z_A - z}{z_B - z}\right) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$.

À vous de jouer !

27 Soit A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i$; $z_B = 2 - i$ et $z_C = 4 + 2i$.
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
2. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

28 Soit A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 5$; $z_B = 2 + i$; $z_C = 3 + 4i$ et $z_D = 6 + 3i$.
1. Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Soit I le milieu de [AC]. Déterminer l'affixe du point I.
3. Montrer que B, I et D sont alignés.

Exercices 100 à 116 p. 66

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e02-04

ØLJEN
Les maths en finesse

La propriété à démontrer — Module d'une puissance

Pour tous nombres complexes z et z', et pour tout entier naturel n,
$$|z^n| = |z|^n.$$

- On admettra que pour tous nombres complexes z et z', $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- On utilisera un raisonnement par récurrence.

Comprendre avant de rédiger

Testons la propriété pour $n = 2$ et $n = 3$:

- $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$
- $|z^3| = |z^2 \times z| = |z^2| \times |z| = |z|^2 \times |z| = |z|^3$

Rédiger

Étape 1

Une démonstration par récurrence se décompose en trois étapes : initialisation, hérédité, et conclusion.

Pour l'initialisation, on veut montrer que la propriété $P(0)$ est vraie.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^0 = 1$

Étape 2

Pour la deuxième étape (hérédité), on considère un entier naturel n et on suppose que $P(n)$ est vraie. Il faut alors démontrer que $P(n+1)$ est vraie.

Pour écrire la propriété $P(n+1)$, on remplace tous les n par $n+1$ dans la propriété $P(n)$.

Étape 3

On utilise les propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z^{n+1} = z^n \times z^1 = z^n \times z$,
- pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, on a $|z \times z'| = |z| \times |z'|$,
- l'hypothèse de récurrence.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $a = a^1$

Étape 4

On conclut pour tout entier naturel n.

La démonstration rédigée

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $|z^n| = |z|^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|z^0| = |1| = 1$ et $|z|^0 = 1$. Donc $|z^0| = |z|^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à dire $|z^n| = |z|^n$.

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$.

$$\begin{aligned} |z^{n+1}| &= |z^n \times z| \\ &= |z^n| \times |z| \\ &= |z|^n \times |z| \\ &= |z|^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$.

Pour s'entraîner

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = |(1 + i) \times z_n|$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $z_n = 4\,\square\,(\sqrt{2})^n$.