



25 Partie réelle, partie imaginaire

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Si $z_1 = 2$, alors :

☐ a) $\operatorname{Re}(z_1) = 2$ ☐ b) $\operatorname{Im}(z_1) = 2$

☐ c) $\operatorname{Re}(z_1) = 0$ ☐ d) $\operatorname{Im}(z_1) = 0$

2. Si $z_2 = 5i$, alors :

☐ a) $\operatorname{Re}(z_2) = 5$ ☐ b) $\operatorname{Im}(z_2) = 5$

☐ c) $\operatorname{Re}(z_2) = 0$ ☐ d) $\operatorname{Im}(z_2) = 5i$

3. Si $z_3 = 3 - 7i$, alors :

☐ a) $\operatorname{Re}(z_3) = 3$ ☐ b) $\operatorname{Im}(z_3) = 7$

☐ c) $\operatorname{Im}(z_3) = -7$ ☐ d) $\operatorname{Im}(z_3) = -7i$

4. Si $z_4 = 1 + \sqrt{2} - i$, alors :

☐ a) $\operatorname{Re}(z_4) = 1$ ☐ b) $\operatorname{Im}(z_4) = -1$

☐ c) $\operatorname{Re}(z_4) = 1 + \sqrt{2}$ ☐ d) $\operatorname{Im}(z_4) = \sqrt{2} - i$

26 Réel ou imaginaire pur

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? V F

a) $z_1 = 1 + 2i$ est un nombre imaginaire pur. ☐ ☐

b) $z_2 = \sqrt{2}$ est un nombre réel. ☐ ☐

c) $z_3 = -\frac{1}{7}i$ est un nombre imaginaire pur. ☐ ☐

d) $z_4 = 2 + i - 2$ n'est ni un nombre réel, ni un nombre imaginaire pur. ☐ ☐

27 Forme algébrique (somme)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = i + i - 1$ b) $z_2 = 4 - (1 - i)$

c) $z_3 = (1 + 3i) + (2 - i)$ d) $z_4 = \frac{2 + 4i}{2}$

28 Forme algébrique (produit)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = i(1 + i)$ b) $z_2 = (1 + i)^2$

c) $z_3 = (1 + i)(1 - i)$ d) $z_4 = (1 - i)^2$

29 Inverse d'un complexe

Méthode. Comment faire pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe ?

30 Forme algébrique (inverse)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \frac{1}{i}$ b) $z_2 = \frac{1}{1 + i}$

31 Conjugué (1)

On considère le nombre complexe $z = 4 + 5i$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La forme algébrique de \bar{z} est :

☐ a) $4 + 5i$ ☐ b) $4 - 5i$ ☐ c) $-4 + 5i$ ☐ d) $-4 - 5i$

2. $z + \bar{z}$ est égal à :

☐ a) 4 ☐ b) 8 ☐ c) 10 ☐ d) $10i$

3. $z - \bar{z}$ est égal à :

☐ a) 8 ☐ b) $-10i$ ☐ c) 10 ☐ d) $10i$

4. $z \times \bar{z}$ est égal à :

☐ a) 9 ☐ b) -9 ☐ c) 41 ☐ d) -1

32 Conjugué (2)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? V F

a) Si $z + \bar{z} = 0$ alors z est réel. ☐ ☐

b) Si $z - \bar{z} = 0$ alors z est réel. ☐ ☐

c) Pour tout nombre complexe z , $z \times \bar{z}$ est réel. ☐ ☐

33 Équations de la forme $x^2 = a$

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation $z^2 = 16$ sont :

☐ a) $S = \{-8; 8\}$ ☐ b) $S = \{-4; 4\}$

☐ c) $S = \{-16; 16\}$ ☐ d) $S = \{-4i; 4i\}$

2. Dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation $z^2 = -16$ sont :

☐ a) $S = \{-8; 8\}$ ☐ b) $S = \{-4; 4\}$

☐ c) $S = \emptyset$ ☐ d) $S = \{-4i; 4i\}$

34 Calcul d'un discriminant

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

On considère l'équation $z^2 + 4z + 2 = 0$. Le discriminant Δ est égal à :

☐ a) $\Delta = 8$

☐ b) $\Delta = -4$

☐ c) $\Delta = 12$

☐ d) $\Delta = -24$

35 Équations du second degré

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Dans \mathbb{C} , les solutions de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ sont :

☐ a) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ ☐ b) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

☐ c) $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ☐ d) $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

36 Factorisation

Méthode. Comment faire pour factoriser un polynôme de degré 3 lorsque l'on connaît une racine ?

Exercices d'application

Déterminer et utiliser la forme algébrique

Méthode 1 Méthode 2 p. 15

37 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

- a) $z_1 = 5 - 2i$
 b) $z_2 = i\sqrt{3}$
 c) $z_3 = 4 + \sqrt{2}$
 d) $z_4 = 2i - 3$

38 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

- a) $z_1 = -i + 2$
 b) $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$
 c) $z_3 = \sqrt{2} + 6$
 d) $z_4 = e^2 \times i$

39 Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

- a) $z_1 = \frac{i}{2}$
 b) $z_2 = 2 + i - 4 - i$
 c) $z_3 = 3 + \sqrt{5}$
 d) $z_4 = \frac{4 - 2i}{2}$

40 1. Donner la valeur de i^2 ; i^3 ; i^4 en fonction de i .

2. Déterminer la valeur de i^{50} .

3. Déterminer la valeur de i^{2000} .

41 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- a) $z_1 = \frac{15 + 2i}{3}$
 b) $z_2 = 2 + i + i - 1$

42 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :
 $(1 + 2x) + i(1 - 2y) = 5 + 4i$.

43 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(-2 + 3x) + i\left(\frac{3}{2}y + 4\right) = 2.$$

44 1. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(1 + 3x) + i(2 - y) = 0.$$

2. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(3x + y - 5) + i(x - y + 7) = 0.$$

3. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(x + y) + i(2x - 3y) = 2 + i.$$

Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes

Méthode 3 p. 17

45 Calculer les sommes suivantes et donner le résultat sous forme algébrique.

- a) $(2 - 4i) + (2 - 3i)$ b) $(1 - 5i) + (2 + i)$
 c) $(3 + 3i) + (1 - i)$ d) $\left(2 + \frac{1}{3}i\right) + \left(-3 + \frac{4}{3}i\right)$

46 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = \left(1 + \frac{1}{4}i\right) + (5 - i)$ b) $z_2 = (4 + 5i) - (3 + 2i)$
 c) $z_3 = \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i\right)$ d) $z_4 = \left(\frac{1}{2} - i\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i\right)$

47 Calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme algébrique.

- a) $3(2 + 4i)$ b) $i(3 + i)$
 c) $-i(3 - 2i)$ d) $(1 + i)(3 - 2i)$

48 Calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme algébrique.

- a) $(\sqrt{2} + i) \times (1 + i\sqrt{3})$
 b) $\left(\frac{3}{2} + 4i\right)\left(2 + \frac{1}{5}i\right)$

49 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = (2 + i)^2$ b) $z_2 = (2 - i)^2$
 c) $z_3 = (2 + i)(2 - i)$ d) $z_4 = (2 + i)(i - 2)$

50 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

- a) $(2i - 3)(3 - 2i)$ b) $i(3 + i)$
 c) $(2 + i)(1 - 2i) + 1 - 5i$ d) $(1 + i)(1 - i)(2 - 3i)$

51 Soit a et b deux réels.

Déterminer la forme algébrique de :

- a) $(a + ib)^2$ b) $(a - ib)^2$
 c) $(a + ib)(a - ib)$ d) $(a + ib)(2a - ib)$

52 En posant $z = a + ib$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

- a) $z \times i = 3 + i$
 b) $z \times (1 + i) = 7 + 3i$

53 En posant $z = a + ib$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

- a) $(4 + i) \times z = i$
 b) $(i - 2) \times z = 3$

Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes

Méthode 4 p. 17

54 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = \frac{1}{2i} & \text{b) } z_2 = \frac{1}{2+3i} \\ \text{c) } z_3 = \frac{1}{5-2i} & \text{d) } z_4 = \frac{1}{2i-5} \end{array}$$

55 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = \frac{1}{-i} & \text{b) } z_2 = \frac{1}{4+7i} \\ \text{c) } z_3 = \frac{1}{10-3i} & \text{d) } z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}+i} \end{array}$$

56 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = \frac{5}{2i} & \text{b) } z_2 = \frac{1-i}{2+3i} \\ \text{c) } z_3 = \frac{1+i}{5-2i} & \text{d) } z_4 = \frac{3+2i}{2i-5} \end{array}$$

57 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = \frac{7}{i} & \text{b) } z_2 = \frac{7-2i}{3+4i} \\ \text{c) } z_3 = \frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} & \text{d) } z_4 = \frac{i+2}{i-3} \end{array}$$

58 On considère les deux nombres complexes $z_1 = 15 - 8i$ et $z_2 = 23 + 14i$. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{z_1} & \text{b) } \frac{1}{z_2} & \text{c) } \frac{z_1}{z_2} & \text{d) } \frac{z_2}{z_1} \end{array}$$

59 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z_1 = \frac{(2+3i)(3+2i)}{(2+3i)+(3+2i)} \\ \text{b) } z_2 = \frac{(2+3i)(3+2i)}{(2+3i)-(3+2i)} \end{array}$$

60 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (3-5i)z = 1 & \text{b) } (-2i)z = 1 \end{array}$$

61 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } iz = 1 - i & \text{b) } (2+i)z = 1 + 3i \end{array}$$

Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Méthode 5 p. 19

62 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 9 + i & \text{b) } 13 - 24i \\ \text{c) } 5i - 2 & \text{d) } \frac{3-i\sqrt{7}}{7} \end{array}$$

63 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt{7} + i\pi & \text{b) } 3 + 5i + \sqrt{2} \\ \text{c) } \frac{4}{3} + 2 & \text{d) } -i\sqrt{2} \end{array}$$

64 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de \bar{z} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 3z & \text{b) } z + 5 - i & \text{c) } z^2 + 2z \\ \text{d) } \frac{z+1}{3} & \text{e) } iz + 2 & \text{f) } \frac{i-z}{z+1} \end{array}$$

65 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de z et \bar{z} .

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2z - \bar{z} & \text{b) } z + \frac{1}{\bar{z}} & \text{c) } z^2 + \bar{z}^2 \\ \text{d) } i\bar{z} & \text{e) } z + i\bar{z} & \text{f) } -2\bar{z} \end{array}$$

Démo

66 Démontrer que pour tous nombres complexes z et z' , $z \square \bar{z}' = \bar{z} \square z'$.

67 1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si, et seulement si, $\bar{z} = z$.

68 Soit z un nombre complexe. Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z^2 + \bar{z}^2 & \text{b) } z^2 - \bar{z}^2 \end{array}$$

Démo

69 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\frac{z-\bar{z}}{z \times \bar{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

70 Résoudre les équations suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \bar{z} = 2z + 1 & \text{b) } -\bar{z} = 1 + i \\ \text{c) } z + 5\bar{z} = 7 - 8i & \text{d) } z = 3\bar{z} + 5 - i \end{array}$$

 **Coup de pouce** c) et d) Poser $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

71 Résoudre les équations suivantes.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } z + \bar{z} = 3i & \text{b) } (3+i)\bar{z} + 2z = 0 \\ \text{c) } -2\bar{z} + (2+i)\bar{z} = 1 & \text{d) } 2i\bar{z} = 3i + 2iz \end{array}$$

Exercices d'application

72 Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on pose $f(z) = 3\bar{z} + i - 2$.

1. Exprimer $\operatorname{Re}(f(z))$ et $\operatorname{Im}(f(z))$ en fonction de a et b .
2. L'équation $f(z) = z$ admet-elle des solutions ? Si oui, laquelle (lesquelles) ?

73 Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on pose $f(z) = 3\bar{z} + z - 5$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de a et b .
2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.
 - a) $f(z) = 2$
 - b) $f(z) = 4i$
 - c) $f(z) = z$

Utiliser la formule du binôme de Newton

Méthode 7 p. 21

74 1. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expressions suivantes.

- a) $(2 + i)^4$
 - b) $(1 - 2i)^5$
2. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x + 3)^8$?

75 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

- 76** 1. Développer $(x - 1)^3$.
2. En déduire la valeur exacte de 999^3 sans calculatrice.

- 77** 1. Développer et simplifier $(x + 1)^4 - (x - 1)^4$.
2. En déduire la valeur exacte de $1\,001^4 - 999^4$ sans calculatrice.

- 78** Soit z le nombre complexe tel que $z = (1 + ib)^3$.
1. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il réel ?
 2. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il imaginaire pur ?

Résoudre des équations du second degré dans \mathbb{C}

Méthode 8 p. 21

79 Résoudre dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a) $z^2 + 64 = 0$
- b) $z^2 - 3 = 0$
- c) $z^2 - 4 = 2$
- d) $z^2 + 21 = 8$

80 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a) $z^2 - 3z = 0$
- b) $z^2 + z + 1 = 0$
- c) $4z^2 - 4z + 5 = 0$
- d) $-2z^2 + 6z + 5 = 0$

81 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a) $z^2 = -7z$
- b) $2z^2 = 3z - 2$
- c) $-2z + z^2 + 2 = 0$
- d) $-8 = 3z^2$

82 Résoudre dans \mathbb{R} puis dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a) $3z^2 - 2z = 1$
- b) $2z^2 = z + 3$
- c) $\frac{z^2 + 9}{3} = 0$
- d) $\frac{3 - z^2}{3} = 3$

Factoriser un polynôme

Méthode 9 p. 23

83 Factoriser :

- a) $z^2 - 2^2$ par $(z - 2)$.
- b) $z^3 - 3^3$ par $(z - 3)$.

- 84** 1. Exprimer $z^3 + 3^3$ sous la forme $z^3 - a^3$ avec a un réel.
2. En déduire une factorisation de $z^3 + 3^3$.

- 85** 1. Exprimer i^3 en fonction de i .
2. En déduire une factorisation de $z^3 + i$.

86 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 2z - 2.$$

1. Vérifier que 1 est une racine de P .
2. Factoriser $P(z)$ par $(z - 1)$.

87 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z + 4.$$

1. Vérifier que -1 est une racine de P .
2. Factoriser $P(z)$ par $(z + 1)$.

88 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = -2z^3 + 2z^2 + 20z + 16.$$

1. Vérifier que -2 est une racine de P .
2. En déduire une factorisation de $P(z)$.

Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels

Méthode 10 p. 23

89 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 9.$$

1. Montrer que 3 est une racine de P .
2. Déterminer toutes les racines de P .
3. Écrire $P(z)$ comme produit de facteurs du premier degré.

90 On considère l'équation

$$(E) : z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0.$$

1. Montrer que 3 est solution de l'équation (E).
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

91 On considère l'équation

$$(E') : z^3 - 1 = 0.$$

1. Déterminer une solution évidente de (E').
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E').

92 On considère l'équation

$$(E'') : z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

1. Déterminer une solution entière de (E'').
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E'').

Calcul algébrique dans \mathbb{C}


- 93** 1. Conjecturer une règle donnant i^n en fonction de i , suivant les valeurs de n .
 2. Démontrer la conjecture par récurrence.
 3. Donner la valeur de i^{2021} .

94 Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

Proposition 1 Le quotient de deux nombres imaginaires purs est un nombre réel.

Proposition 2 Le quotient de deux nombres réels est un nombre imaginaire pur.

95 On considère un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels.
 À quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre $(1 - i)z$ est-il réel ?

 **Coup de pouce** Pour les exercices **96** à **98** : par défaut, un programme **Python** ne fait pas de calcul formel ; il renverra donc une valeur approchée des parties réelles et imaginaires.

96 Soit deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, b_1, a_2 et b_2 des nombres réels.

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
 2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $z_1 \times z_2$.

97 Soit z_1 un nombre complexe non nul tel que $z_1 = a_1 + ib_1$ avec a_1 et b_1 des réels.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z_1}$.
 2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $\frac{1}{z_1}$.

98 Soit deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, b_1, a_2 et b_2 des nombres réels.
 On suppose z_2 différent de 0.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
 2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $\frac{z_1}{z_2}$.

99 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $\left(\frac{1}{1-i}\right)^2$ b) $7 + \frac{3+10i}{5-5i}$
 c) $\frac{1}{3-2i} + \frac{2i}{2-i}$ d) $\frac{2-i}{3+i} - \frac{2}{1-i}$

Conjugué

100 Déterminer la forme algébrique des conjugués des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 7 - \left(3 + \frac{5}{3}i\right)$
 b) $z_2 = (3 - 5i) + \sqrt{2}$
 c) $z_3 = \frac{3}{2} + 3i + (1 - i)$
 d) $z_4 = (5 - i)(\sqrt{2} + 3i)$

101 On considère le nombre complexe :

$$z = \frac{2+3i}{7-i}$$

1. Déterminer la forme algébrique de z .
 2. En utilisant les propriétés des conjugués, en déduire la valeur de $z + \bar{z}$ et de $z - \bar{z}$.

Démo

102 Sans utiliser la forme algébrique, montrer que pour tout nombre complexe z , $z - \bar{z} + \frac{3}{2}i$ est un nombre imaginaire pur.

103 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$Z = (z \times \bar{z} \times i)^3.$$

Déterminer si pour tout $z \in \mathbb{C}$, Z est un nombre réel, un nombre imaginaire pur, ou un nombre complexe quelconque.

104 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$Z = z + 2\bar{z}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre Z soit :

- a) réel.
 b) imaginaire pur.

105 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$Z = \frac{z+1}{\bar{z}+1}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que le nombre Z soit :

- a) réel.
 b) imaginaire pur.

Démo

106 On pourra utiliser comme prérequis que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , on a $\overline{z_1 \square z_2} = \bar{z}_1 \square \bar{z}_2$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
 2. En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe z , $z^n + \bar{z}^n$ est un nombre réel.
 3. Démontrer que pour tout entier naturel n , le nombre complexe $(2 - i)^{2n} + (3 + 4i)^n$ est un nombre réel.

Exercices d'entraînement

Équations dans \mathbb{C}

111 p. 24

- 107** 1. Factoriser $z^3 - 1$ par $z - 1$.
 2. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E) : $z^3 - 1 = 0$.
 3. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive. Donner la forme algébrique de j .
 4. Démontrer les égalités suivantes.
 a) $j^3 = 1$ b) $j^2 + j + 1 = 0$
 c) $j^2 = \bar{j}$ d) $\frac{1}{j} = \bar{j}$

108 Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} . On donnera les résultats sous forme algébrique.

- a) $(1 + i)z = 1 - i$ b) $\frac{z + 1}{z - 1} = 2i$
 c) $(2z + 1 - i) \times (iz + 3) = 0$ d) $\frac{iz + 1}{z - 3i} = 2 + i$

109 Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} . On donnera les résultats sous forme algébrique.

- a) $-2iz = 3z + 1$ b) $\frac{2i\bar{z} + i}{z - 1 - i} = 3$
 c) $(z - i)^2 = (z + 1 + i)^2$ d) $\frac{2}{z} + 3i = -2 - 5i$

110 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\frac{z - i}{z - (2 - i)} = 3$.

111 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 dont la somme et le produit valent 2.

112 Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} . Écrire les solutions sous la forme la plus simplifiée possible.

- a) $\frac{3 + z}{3 - z} = z$ b) $(z - 2)^2 = -4$
 c) $(z - 2)^2 = (3 + iz)^2$ d) $z^2 = 3iz$

Démo

113 On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$. On note Δ son discriminant. On veut démontrer que si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On rappelle qu'en classe de Première, nous avons démontré que $az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.
 On suppose que $\Delta < 0$.

1. Écrire $\frac{\Delta}{4a^2}$ comme le carré d'un nombre complexe.
 2. En déduire une factorisation de $az^2 + bz + c$.
 3. En reconnaissant un produit nul, résoudre $az^2 + bz + c = 0$.

114 En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel suivant, résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0.$$

1	factoriser ($z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$)
	$(z^2 - 4z + 13) * (z^2 - 2z + 2)$

115 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels

$$\text{que } \begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases}$$

116 On veut résoudre l'équation

$$(E) : z^2 + 2iz - 2 = 0.$$

1. Développer $(z + i)^2$.
 2. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $(z + i)^2 - 1 = 0$.
 3. En déduire les solutions de (E).

117 On veut résoudre l'équation

$$(E') : z^2 + iz + c = 0 \text{ où } c \text{ est un réel.}$$

1. Développer $\left(z + \frac{i}{2} \right)^2$.
 2. En déduire que l'équation (E') est équivalente à $\left(z + \frac{i}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} + c = 0$.

3. Quelle condition sur c faut-il imposer pour que les solutions de (E') soient imaginaires pures ?
 4. Déterminer dans ce cas les solutions de (E').

118 Résoudre dans \mathbb{C} les systèmes d'équations suivants.

- a) $\begin{cases} z + z' = 2 - 5i \\ z + 3z' = i - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z + 3z' = 1 \\ z - z' = i \end{cases}$
 c) $\begin{cases} -2z + 2z' = 1 + i \\ z + 3z' = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} z + iz' = 2 \\ 2z + 2z' = 2 + 3i \end{cases}$

119 On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .
 2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 5$.
 3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z . Déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

D'après Bac S 2014

120 On considère l'équation

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0,$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z .

1. Donner une solution entière de (E).
 2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z , $z^4 - 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.
 3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

D'après Bac S 2017

121 On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et \bar{z} sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$. Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Dédurre des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).
4. L'équation (E) admet-elle d'autres solutions que celles citées dans les questions 2. et 3. ?

D'après Bac S 2010

122 Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant.
« $z^{10} + z^2 + 1 - i = 0$ admet une solution réelle. »

123 On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^3 - (2 + i\sqrt{2})z^2 + 2(1 + i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est une racine de P .
2. a) Déterminer les réels a et b tels que :
$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b).$$

b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de $P(z) = 0$.

D'après Bac S 2012

124 On considère la fonction f définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :
$$f(z) = z + i.$$

1. Déterminer la forme algébrique de l'image de $\sqrt{2} + 5i$ par la fonction f .
2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $\sqrt{2} + 5i$ par la fonction f .

125 1. En posant $z = a + ib$ avec a et b deux réels, résoudre $z^2 = \bar{z}$.

Pour la suite de l'exercice, on notera z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive

2. Montrer que $z_0 \times \bar{z}_0 = 1$.
3. Donner la forme algébrique de z_0 , z_0^2 et z_0^3 .
4. Démontrer que pour tout entier naturel n , $z_0^{3n} = 1$.
5. En déduire la valeur de z_0^{3n+1} et z_0^{3n+2} pour tout entier naturel n .
6. En déduire la valeur de z_0^{999} et z_0^{1000} .

Suites de nombres complexes p. 25

126 On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - i$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
2. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i)$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n .

127 On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1 + 2i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 2iz_n + 5$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2 .
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n .
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en 2.
4. En déduire la valeur de z_{2020} .

128 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1 - i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{z_n}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2 .
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n .
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en 2.

129 Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (z_n) de nombres

$$\text{complexes par } \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$$

1. a) Vérifier les égalités $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n positif ou nul,

$$z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} i.$$

2. Étude du cas $\lambda = i$.

- a) Montrer que $z_4 = 0$.
- b) Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+4} en fonction de z_n .
3. a) On suppose maintenant qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_{n+k} = z_n$.
b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors $\lambda^k = 1$.

Travailler l'oral

130 Préparer un exposé sur l'introduction historique des nombres complexes.

Indication : on pourra par exemple parler de Tartaglia, Cardan, Bombelli, ou encore Descartes ou Girard.

131 Proposer une équation du second degré à coefficient réels, puis la résoudre, en expliquant la méthode.

132 Proposer une équation du 3^e degré à coefficient réels admettant une racine évidente, puis la résoudre, en expliquant la méthode.

Exercices bilan

133 Calcul algébrique dans \mathbb{C}

Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère les deux nombres complexes :

$$z = 7 + 2i \text{ et } z' = i - 3.$$

Déterminer la forme algébrique de :

- a) $z + z'$
- b) $z - z'$
- c) $z \times z'$
- d) z^2
- e) $\frac{1}{z}$

2. Pour tout nombre complexe z , on considère le nombre complexe :

$$Z = z^2 + 3 + \bar{z}^2 + z \times \bar{z}.$$

Montrer que pour tout nombre complexe z , Z est un nombre réel.

3. On considère le nombre complexe $z'' = \frac{8+i}{9-2i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z'' .

b) En déduire sans calcul la valeur de

$$\frac{8+i}{9-2i} + \frac{8-i}{9+2i} \quad \text{et de} \quad \frac{8+i}{9-2i} - \frac{8-i}{9+2i}.$$

134 Équations dans \mathbb{C}

1. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

- a) $(2i - 5)z + 2 = i$
- b) $2z + 3\bar{z} + i - 2 = 0$
- c) $x^2 + x + 1 = 0$
- d) $x^4 - 25 = 0$

2. On considère l'équation suivante

$$(E) : x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

- a) Montrer que si z est solution de (E), alors \bar{z} est solution de (E).
- b) Vérifier que 3 et i sont solutions de (E).
- c) Quel est le nombre maximum de solutions que peut avoir l'équation (E) ?
- d) Sans calcul, en déduire toutes les solutions de (E) dans \mathbb{C} .


3. On considère l'équation

$$(E') : 2x^3 - 8x^2 + 28x - 40 = 0.$$

- a) Vérifier que 2 est solution de l'équation (E').
- b) En déduire une factorisation de $2x^3 - 8x^2 + 28x - 40$.
- c) Résoudre dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{C} , l'équation (E').

135 Binôme de Newton

- 1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
- 2. Démontrer la formule du binôme de Newton.

 **Coup de pouce** La démonstration se fait par récurrence.

- 3. Développer pour tout réel x , $(x - 2i)^4$.
- 4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre complexe $(x - 2i)^4$ est réel.

5. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

136 Suites de nombres complexes


On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n - 4$.

A ▶ 1. Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n .

a) Donner la valeur de a_0 et b_0 .

b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

c) Compléter le programme en **Python**  suivant afin qu'il renvoie la partie réelle et la partie imaginaire de z_n .

```
def f(n):
    a = ...
    b = ...
    for i in range(1, n+1):
        c = .....
        a = .....
        b = .....
    return ([a, b])
```

B ▶ On considère le nombre complexe $w = -2 - 2i$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - w$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = i \times u_n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 + 2i) \times i^n$.

3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n .

4. a) Donner la valeur de i^2 et en déduire la valeur de i^{50} et i^{100} .

b) En déduire la forme algébrique de z_{50} et z_{100} sans calculatrice.

137 Fonctions dans \mathbb{C}

On considère la fonction f définie pour tout nombre

complexe z différent de -1 par $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer la forme algébrique des images par f de

a) 1

b) $2i$

2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $1 + i$ par f .

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Démo

138 Conjugués

1. Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

a) Démontrer que z est un nombre réel si, et seulement si, $\bar{z} = z$.

b) Démontrer que z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $\bar{z} = -z$.

2. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' , $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n , et tout nombre complexe z , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.



Préparer le BAC L'essentiel

Ensemble des nombres complexes

• Définition de \mathbb{C}

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $i^2 = -1$
- L'addition et la multiplication ont les mêmes propriétés que dans \mathbb{R} .

• Forme algébrique

$z = a + ib$ avec a et b deux réels.
 $a = \text{Re}(z)$ (partie réelle de z)
 $b = \text{Im}(z)$ (partie imaginaire de z)

• Égalité dans \mathbb{C}

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

Opérations dans \mathbb{C}

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels tel que $z \neq 0$.

• Addition

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') \\ = (a + a') + i(b + b')$$

• Multiplication

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') \\ = aa' + iab' + iba' + i^2 bb' \\ = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

• Opposé

$$-z = -(a + ib) \\ = -a - ib$$

• Inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1 \times (a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} \\ = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

• Quotient

$$\frac{z'}{z} = \frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{(a' + ib')(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} \\ = \frac{a'a - iba' + ib'a + bb'}{a^2 + b^2} \\ = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$$

Conjugué

Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

• Définition

Le conjugué de z , noté \bar{z} est défini par $\bar{z} = a - ib$.

• Propriétés

- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $-\bar{z} = -\bar{z}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \square z'} = \bar{z} \square \bar{z}'$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$

Formule du binôme de Newton

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Pour: tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Équations du second degré

• $z^2 = a$

- Si $a > 0$, alors $S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
- Si $a < 0$, alors $S = \{-i\sqrt{|a|}; i\sqrt{|a|}\}$

• $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
- Si $\Delta = 0$, alors $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
- Si $\Delta < 0$, alors $S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

Factorisation de polynômes

• Factorisation de $z^n - a^n$

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$
 avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

• Factorisation d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q(z)$
 avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Racines de polynômes

- Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.
- Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est inférieur ou égal à son degré.

Préparer le BAC

Je me teste

Je dois être capable de...

► Déterminer et utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe

Méthode 1 Méthode 2



1, 2, 37, 38, 3, 4, 42, 43

► Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes et résoudre une équation linéaire $az = b$

Méthode 3 Méthode 4



5, 6, 45, 46, 7, 8, 54, 55

► Déterminer le conjugué d'un nombre complexe et résoudre une équation simple faisant intervenir z et \bar{z}

Méthode 5 Méthode 6



9, 10, 62, 63, 11, 12, 70, 71

► Utiliser la formule du binôme de Newton

Méthode 7



13, 14, 74, 75

► Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels

Méthode 8



15, 16, 79, 80

► Factoriser un polynôme dont une racine est connue

Méthode 9



17, 18, 83, 84

► Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue

Méthode 10



19, 20, 89, 90

EXOS

QCM interactifs

lienmini.fr/maths-e01-09



QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

	A	B	C	D
139 i^3 est égal à :	1	i	-i	-1
140 La partie réelle de $(11 + 2i)(5 - i)$ est :	53	55	57	-1
141 La partie imaginaire de $\frac{11 + 2i}{2 - i}$ est :	2	3	4	-1
142 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Z = z \times \bar{z} + 2 - i$. Alors le conjugué de Z est :	$\bar{z} \times \bar{z} + 2 - i$	$z \times \bar{z} - 2 + i$	$\bar{z} \times \bar{z} + 2 + i$	$z \times \bar{z} + 2 + i$
143 La solution de $(i + 1)z + 1 = i$ est :	$\frac{i - 1}{i + 1}$	$i + 1$	i	$i - 1$
144 L'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$ a pour solution dans \mathbb{C} :	pas de solution	$\{-2 - i ; 2 + i\}$	$\{2 - i ; 2 + i\}$	$\{2 - 3i ; 2 + 3i\}$
145 L'équation $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$ a pour solution dans \mathbb{C} :	1	$\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$	$2 - \frac{5}{2}i$	$-4 + 3i$
146 $(1 + i)^5$ est égal à :	$1 + i$	$-4 - 4i$	$4 + 4i$	$-1 - i$
147 Une factorisation de $x^3 - 1$ est $(x - 1) \times Q(x)$ avec $Q(x)$ égal à :	$(x^2 + x + 1)$	$(x^2 - x + 1)$	$(x^2 + x - 1)$	$(x^2 - x - 1)$

148 Utiliser la forme algébrique

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = 2i - 5$.

2. Soit x et y deux réels.

Pour quelles valeurs de x et de y

a-t-on $(x + 2y) + i(x - 2y + 3) = 2 + i$? Méthode 1 Méthode 2 p. 15

149 Calculer dans \mathbb{C}

On considère les deux nombres complexes $z = 4 + 7i$ et $z' = -2 + 5i$.

Déterminer la forme algébrique de :

a) $z + z'$

b) $z - z'$

c) $z \times z'$

d) z^2

e) $\frac{1}{z'}$

f) $\frac{z}{z'}$

Méthode 3 Méthode 4 p. 17

150 Utiliser le conjugué d'un nombre complexe

1. On considère le nombre complexe $z_1 = i - 2$.

Déterminer la forme algébrique du conjugué de z_1 .

2. Pour tout nombre complexe z , on pose $Z = z - \bar{z} + i$.
Démontrer que Z est un nombre imaginaire pur.

3. On considère le nombre complexe $z' = \frac{11+i}{1-2i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z' .

b) En déduire sans calcul la valeur de $\frac{11+i}{1-2i} + \frac{11-i}{1+2i}$ et

celle de $\frac{11+i}{1-2i} - \frac{11-i}{1+2i}$. Méthode 4 Méthode 5 p. 17 p. 19

151 Résoudre des équations dans \mathbb{C}

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

a) $(1 - 2i)z = 3 + i$

b) $-5\bar{z} + i = 7$

c) $z + 2\bar{z} - 4 = i$

d) $2z^2 - 3z + 10 = 0$

e) $z^4 = 121$

Méthode 4 Méthode 6 p. 17 p. 19

Méthode 8 Méthode 11 p. 21 p. 24

152 Utiliser le binôme de Newton

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(2 + 3i)^4$.

2. Calculer la somme $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$.

3. Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(x + 2)^{10}$? Méthode 7 p. 21

153 Factorisation de polynômes

Factoriser les polynômes suivants.

a) $x^4 - 1$

b) $x^3 - 8$

Méthode 9 p. 23

154 Équation de degré 3

1. On considère l'équation suivante :

$$2x^3 - 2x^2 - 24x = 0.$$

a) Déterminer une solution évidente de l'équation.

b) Résoudre l'équation dans \mathbb{C} .

2. On considère l'équation suivante :

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0.$$

a) Vérifier que -1 est solution de l'équation.

b) Déterminer une factorisation de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$.

c) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation. Méthode 10 p. 23

155 Suites de nombres complexes

Algo

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 1 - i$ et pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = (1 + i)z_n$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et de z_2 .

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z , $z \times \bar{z}$ est un nombre réel.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = z_n \times \bar{z}_n$.

a) Calculer u_0 , u_1 et u_2 .

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

e) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. On souhaite déterminer la plus petite valeur de n tel que $u_n > 1\,000$.

a) Compléter le programme en Python suivant.

```
u = ...
n = 0
while ... :
    n = ...
    u = ...
print(...)
```

b) Déterminer la valeur de cet entier à l'aide de la calculatrice.

Méthode 12 p. 25

156 Fonction et nombre complexe

Soit f la fonction définie pour tout nombre complexe z différent de -2 par $f(z) = \frac{z-4}{z+2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de l'image par f de :

a) 3

b) i

2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents par f de :

a) 3

b) i

3. Déterminer le ou les nombres complexes z tels que $f(z) = -z$.

Méthode 1 p. 15 Méthode 4 p. 17 Méthode 8 p. 21 Méthode 11 p. 24

Exercices vers le supérieur

157 Résolution d'équation

PCSI MPSI

L'ensemble S des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $\frac{z-8}{z-3} = z$ est :

- a) $S = \{2 + 2i\}$ b) $S = \{2 + 2i; 2 - 2i\}$
c) $S = \{2 + 2i; -2 + 2i\}$ d) $S = \emptyset$

D'après concours Techniciens supérieurs de l'aviation (2016)

158 Résolution d'équation de degré 3

PCSI MPSI

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{C} par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i.$$

- Démontrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
- Démontrer que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$.
- En déduire toutes les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

D'après concours d'entrée ENSM (2017)

159 Les entiers de Gauss

Un entier de Gauss est un nombre complexe qui peut s'écrire sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

- Donner un exemple d'entier de Gauss.
- Démontrer que la somme de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
- Démontrer que le produit de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
- Le quotient de deux entiers de Gauss est-il un entier de Gauss ?

160 Forme algébrique d'un nombre complexe

PCSI MPSI

Soit a un nombre réel. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = (-4a + i)(a - i) - (1 + 2ai)^2 \text{ et } z_2 = \frac{2 + 2ai}{1 - i}.$$

- Déterminer la forme algébrique de z_1 . Détailler le calcul.
- Déterminer la forme algébrique de z_2 . Détailler le calcul.

D'après concours ENI-GEIPI (2018)

161 Équation bi-carrée

On considère l'équation (E) : $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

- On pose $Z = z^2$. Écrire (E) comme une équation en Z .
- Résoudre cette nouvelle équation.
- En déduire toutes les solutions de (E).

162 Calculer avec les nombres complexes (1)

PCSI MPSI

1. On considère le nombre complexe $z = 3i$, alors z^4 est égal à :

- a) $81i$ b) -81
c) $-81i$ d) 81

2. Les nombres réels a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (2 - i)z^2 + (1 - 2i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$ sont :

- a) $a = -2$ et $b = 1$ b) $a = -2$ et $b = -1$
c) $a = 2$ et $b = 1$ d) $a = 2$ et $b = -1$

D'après concours AVENIR (2017)

163 Calculer avec les nombres complexes (2)

PCSI MPSI

1. On note j un nombre complexe, solution de l'équation : $1 + z + z^2 = 0$.

On peut affirmer que $(j + j^2 + j^3)^3$ est égal à :

- a) 0 b) 1 c) j d) j^2

2. On note $\text{Re}(z)$ la partie réelle et $\text{Im}(z)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe z . Si z_1 et z_2 désignent deux nombres complexes non nuls, alors $\text{Re}((z_1 + iz_2)(1 + i))$ est égale à :

- a) $\text{Re}(z_1 - z_2) - \text{Im}(z_1 + z_2)$
b) $\text{Re}(z_1) - \text{Im}(z_2)$
c) $\text{Re}(z_1 - z_2)$
d) $\text{Im}(z_1) - \text{Re}(z_2)$

3. Soit p un nombre réel et (E) l'équation suivante :

$$2pz^2 + (1 - p)z + 2p = 0$$

À quel ensemble doit appartenir p pour que (E) ait deux racines complexes conjuguées distinctes ?

- a) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right]$ b) $\left]-\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right[$
c) $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$ d) $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$

D'après concours AVENIR (2019)

164 Somme et produit de complexes

1. Calculer i^n en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de l'entier naturel n .

2. En déduire selon les valeurs de n , la valeur de :

- a) la somme $1 + i + i^2 + \dots + i^n$.
b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \dots \times i^n$.

165 Équation avec des complexes

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$.

166 Nombre imaginaire pur et nombre réel

PCSI MPSI

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ convenablement choisi, on note $z' = \frac{2\bar{z}}{\bar{z} + i}$. z' est un nombre réel si, et seulement si :

- a) z est imaginaire pur différent de i .
b) z est imaginaire pur.
c) z est réel différent de 1 .
d) z est réel.

D'après concours d'entrée à l'ENAC (2018)

167 Résolution d'équation de degré 3

PCSI MPSI

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Soit (E) et (E') les équations d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^2 - 4z + 4a^2 = 0 \text{ et } (E') : z^3 - 4z^2 + 4a^2z = 0.$$

1. Justifier que l'équation (E) admet deux racines complexes non réelles.

2. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E). Donner les expressions de z_1 et z_2 en fonction de a .

3. En déduire l'ensemble S' des solutions de l'équation (E').

D'après concours ENI-GEIPI (2019)

168 Équation et trigonométrie

Pour tout nombre réel $\theta \in [0; \pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.
- Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ .

169 Racines carrées d'un nombre complexe


Dans cet exercice, nous allons nous intéresser à la notion de racine carrée d'un nombre complexe.

- Déterminer un nombre complexe dont le carré est égal à :

a) 25 b) -1 c) -4

- On veut déterminer un nombre complexe z dont le carré est égal à $5 + 12i$.

Poser $z = a + ib$ avec a et b deux réels, et résoudre l'équation $z^2 = 5 + 12i$.

 **Coup de pouce** Pour résoudre une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$, on peut poser $X = x^2$.

170 Équation du second degré à coefficients complexes

- Soit a, b et c trois nombres complexes. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z + d)^2 + e^2$ avec d et e deux nombres complexes à déterminer.

- Application : on considère l'équation :

$$2z^2 + (2 + 6i)z - 2 + 3i = 0.$$

- Écrire $2z^2 + (2 + 6i)z - 2 + 3i$ sous la forme $a(z + d)^2 + e$ avec d et e deux nombres complexes à déterminer.
- En déduire les solutions de l'équation.

Démo

171 Formules de Viète pour un polynôme de degré 3

Soit P un polynôme de degré 3 admettant 3 racines complexes : r_1, r_2 et r_3 .


Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$.

- Montrer que la somme des racines complexes de P est égale à $-\frac{a_2}{a_3}$.

- Montrer que le produit des racines complexes de P est égal à $-\frac{a_0}{a_3}$.

172 Calcul de sommes

Calculer la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

 **Coup de pouce** On pourra dériver de deux manières différentes la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)^n$.

173 Équation de degré 3 Problème ouvert

Existe-t-il des équations de degré 3 à coefficients réels admettant exactement trois solutions complexes distinctes et non réelles ?

174 Résolution par radicaux de l'équation de degré 3

Dans cet exercice, on cherche à résoudre une équation (E) :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec } a, b, c \text{ trois réels.}$$

- En posant $X = x + \frac{a}{3}$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre (E') : $X^3 + pX + q$. On donnera l'expression de p et q en fonction de a, b, c .

- On pose $\Delta = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}$. On veut montrer que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E') est

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

- On pose $X = u + v$.

Montrer que si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\frac{p}{3} \end{cases}$, alors X est solution de (E').

- Posons $U = u^3$ et $V = v^3$.

Montrer que résoudre le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\frac{p}{3} \end{cases}$ revient à résoudre :

$$\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

- En posant $\Delta = \frac{27q^2 + 4p^3}{27}$ et en supposant $\Delta > 0$, déterminer un couple $(U; V)$ solution du système (on exprimera U et V en fonction de p et q).

- En déduire que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E')

$$\text{est } x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

175 Électronique

Sciences

En électronique, on représente parfois les « résistances » de certains composants par des nombres complexes. Par exemple, une résistance pure est représentée par le réel $Z_r = R$, tandis qu'une bobine est représentée par le complexe $Z_b = iL\omega$, où L dépend de la bobine et ω du courant qu'on met dans le circuit. Lorsqu'une résistance et une bobine sont montées en parallèle, on peut les remplacer par un composant unique associé au complexe Z_e tel que :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_r}.$$

$$\text{Démontrer que } Z_e = \frac{R \times \left(1 + \frac{R}{L\omega}\right)}{1 + \left(\frac{R}{L\omega}\right)^2}.$$

1 Utilisation d'un logiciel de calcul formel

L'objectif de ce TP est d'apprendre à utiliser un logiciel de calcul formel afin de réaliser des calculs utilisant des nombres complexes.

A ► Calculs algébriques dans \mathbb{C}

1. Ouvrir le logiciel de calcul formel Xcas sur l'ordinateur. Dans toute la suite du TP, pour obtenir la syntaxe ou un exemple d'utilisation d'une fonction sur Xcas, on peut taper le nom de la fonction, puis appuyer sur F1.

2. On considère le nombre complexe $z = 5 + 3i$.

a) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z .

b) En utilisant les fonctions « re » et « im » retrouver les résultats de la question a) sur Xcas.

3. a) Déterminer la forme algébrique de $(5 + 3i) \times (2 + i)$ et $\frac{5 + 3i}{2 + i}$.

b) En utilisant la fonction « simplifier » retrouver les résultats de la question a) sur Xcas.

4. a) Déterminer la forme algébrique de $(5 + 3i)^2$.

b) En utilisant la fonction « développer » retrouver les résultats de la question a) sur Xcas.

5. a) Déterminer le nombre complexe conjugué de $z = 5 + 3i$.

b) En utilisant la fonction « conj » retrouver les résultats de la question a) sur Xcas.

1	<code>re(3+2i)</code>	3
2	<code>im(3+2i)</code>	2
3	<code>simplifier((3+2i)/(4+3i))</code>	$\frac{18}{25} + \frac{-i}{25}$
4	<code>developper((3+2i)^2)</code>	$5+12*i$
5	<code>conj(3+2i)</code>	$3-2*i$
6	<code>resoudre_dans_C(z*i=2+i, z)</code>	$1-2*i$
7	<code>factoriser(z^3-6x^2+11z-6)</code>	$(z-3)*(z-2)*(z-i)$

Exemples d'utilisations de fonctions sur Xcas

B ► Résolution d'équations

Pour résoudre des équations avec Xcas, il existe deux fonctions :

– resoudre : cette fonction permet de résoudre des équations dans \mathbb{R} ;

– resoudre_dans_C : cette fonction permet de résoudre des équations dans \mathbb{C} .

1. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. On donnera le résultat sous forme algébrique.

a) $z + 2i = 3 - i$

b) $z + 2\bar{z} = 3 - i$

2. Vérifier les solutions trouvées dans la question 1. en utilisant le logiciel Xcas.

3. En utilisant Xcas, résoudre dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{C} les équations suivantes.

a) $z^2 + 2z + 4 = 0$

b) $z^2 + 4z + 2 = 0$

C ► Factorisations et équations

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^4 + \frac{17}{2}z^3 + \frac{9}{2}z^2 + \frac{7}{2}z - 4$.

On cherche à résoudre l'équation $P(z) = 0$.

a) En utilisant la fonction « factoriser » dans Xcas, déterminer une factorisation dans \mathbb{R} de $P(z)$.

b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $P(z) = 0$.

c) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $P(z) = 0$.

2. a) En utilisant la fonction « factoriser » dans Xcas, déterminer une factorisation dans \mathbb{R} de $z^6 - 1$.

b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} , puis dans \mathbb{C} de l'équation $z^6 - 1 = 0$.

2 Algorithmes et équations du second degré

Soit f une fonction polynôme de degré 2 de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

1. Compléter le programme suivant en **Python**, afin qu'il détermine les racines réelles éventuelles de f .



```
def f(a,b,c):
    d=...
    if ... :
        print(" pas de solution réelle ")
    else :
        if ... :
            x=...
            print(" La racine est ", x)
        else :
            x1=...
            x2=...
            print(" Les deux racines sont ", x1, x2)
```

2. Écrire ce programme dans votre calculatrice ou dans un logiciel et le tester avec les fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 10$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 + x - 2$

3. Vérifier par le calcul.

4. Modifier ce programme, afin qu'il détermine également les racines complexes éventuelles de f .

► **Remarque** Pour utiliser les nombres complexes sur **Python**, il faut utiliser la bibliothèque **cmath**.

De plus, pour exprimer i en **Python**, il faut utiliser `1j`. Par exemple : $5 + 2i$ s'écrit `5+2*1j`.

5. Reprendre les questions 2. et 3..

3 Suites croisées de nombres complexes

On considère les suites (u_n) et (v_n) de nombres complexes définies par $u_0 = 1 + 2i$; $v_0 = 2 + i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + iv_n \\ v_{n+1} = v_n + iu_n \end{cases}$$

1. Déterminer la forme algébrique de u_1 et v_1 .

2. On note $u_n = a_n + ib_n$ et $v_n = c_n + id_n$ avec a_n, b_n, c_n et d_n des nombres réels.

a) Donner les valeurs de a_0 ; b_0 ; c_0 et d_0 .

b) Déterminer l'expression de a_{n+1} , de b_{n+1} , de c_{n+1} et de d_{n+1} en fonction a_n, b_n, c_n et d_n .

3. On souhaite déterminer la forme algébrique de u_{100} et de v_{100} .

a) Recopier le tableau ci-dessous dans un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	a_n	b_n	c_n	d_n
2	0				
3	1				
4	2				

b) Compléter la colonne A pour qu'elle contienne tous les entiers de 1 à 100.

c) Compléter les cellules B2, C2, D2 et E2.

d) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ? dans la cellule C3 ? dans la cellule D3 ? et dans la cellule E3 ?

e) En étirant vers le bas, compléter les colonnes B,C,D et E.

f) En déduire la forme algébrique de u_{100} et v_{100} .