1

Nombres complexes : point de vue algébrique et polynômes

VIDÉO

Histoire des nombres complexes
lienmini.fr/maths-e01-01

Les premiers nombres, utilisés pour compter, étaient les entiers naturels. Ces nombres ne permettent pas de résoudre toutes les équations. Jusqu'en classe de Première, le plus grand ensemble de nombres étudié est l'ensemble des réels. Au XVI^{e} siècle, un nouvel ensemble de nombres, qui n'est pas inclus dans $\mathbb{R}$, est créé : l'ensemble des nombres complexes.
Aujourd'hui, les nombres complexes sont largement utilisés, notamment par les physiciens pour étudier des phénomènes acoustiques.

Peut-on trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40 ?

↪ Activité 2 p. 12

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-e01-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Réduire une expression

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (2 + 3x) + (1 - x)$

b) $B = (2 + 3x) - (1 - x)$

2 Utiliser la distributivité

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = 2 \times (1 - 2x)$

b) $B = (4 + 2x) \times (3 - 3x)$

3 Calculer avec des racines carrées

1. Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $B = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 - \sqrt{2}$ écrire l'expression suivante sans racine carrée au dénominateur : $C = \dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

3. En utilisant une méthode similaire à celle de la question **2.**, écrire l'expression suivante sans racine carrée au dénominateur : $D = \dfrac{1}{1 - \sqrt{3}}$.

4 Calculer un discriminant

Calculer le discriminant de chaque trinôme ci-dessous.

a) $2x^2 + 3x + 5$

b) $4x^2 - 20x + 25$

c) $2x^2 - 4x - 2$

d) $-2x^2 - 4x - 2$

5 Déterminer la forme canonique d'un trinôme

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $g(x) = 3x^2 + 9x + 18$

6 Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2 - 9x - 12 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

c) $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$

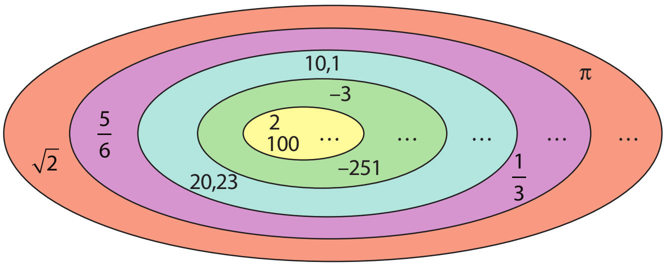
d) $-x^2 - x + 2 = 0$

Activités

10 min

1 Faire le point sur les ensembles de nombres

1. Recopier et compléter le schéma ci-dessous, en déterminant l'ensemble de nombres correspondant (par exemple on notera $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des réels).



2. On considère l'équation suivante : $x + 3 = 2$.
a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.
b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.

3. On considère l'équation suivante : $2x + 1 = 0$.
a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.
b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.
c) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

4. On considère l'équation $x^2 + 1 = 0$.
Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

↪ Cours 1 p. 14

Histoire des maths — 20 min

2 Découvrir une approche historique

On veut trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40.


Cardan

Au milieu du XVI^{e} siècle, Cardan donne des solutions de l'équation correspondant à ce problème : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.
Il nomme ces quantités « quantités sophistiquées ».
Plus tard, au XVII^{e} siècle, Descartes les nommera « quantités imaginaires ».
Au XVIII^{e} siècle, Euler introduit une nouvelle notation : il pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.

1. Montrer que le problème peut se traduire par l'équation $x \times (10 - x) = 40$.

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. En admettant que les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ de Cardan existent, montrer qu'elles vérifient bien l'équation. Pour cette question, on généralise la règle suivante à tous les nombres réels : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

4. On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.
a) En déduire que i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.
b) Déterminer la valeur de i^4.

5. En utilisant le nombre i, déterminer un nombre qui :
a) élevé au carré est égal à -4. **b)** élevé au carré est égal à -2. **c)** élevé au carré est égal à -15.

6. En utilisant le résultat de la question **5. c)**, réécrire les solutions proposées par Cardan en utilisant le nombre i.

↪ Cours 1 p. 14

3 Calculer avec des nombres complexes

25 min

A ▸ Addition et multiplication

1. Développer et simplifier les expressions suivantes : $A = (3 - 2x) + (-2 + x)$ et $B = (3 - 2x) \times (-2 + x)$.

2. En utilisant $\mathrm{i}^2 = -1$, développer et écrire les expressions suivantes sous la forme $a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.
$C = (3 - 2\mathrm{i}) + (-2 + \mathrm{i})$ et $D = (3 - 2\mathrm{i}) \times (-2 + \mathrm{i})$.

3. Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec a, b, a' et b' des réels.
Ces écritures sont la **forme algébrique** des nombres complexes z et z'.
Développer et écrire les expressions suivantes sous la forme $A + \mathrm{i}B$ avec A et B deux réels.
$E = z + z'$; $F = z - z'$ et $G = z \times z'$.

B ▸ Inverse

1. a) Déterminer la forme algébrique de $(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$.

b) En multipliant le dénominateur et le numérateur par $2 - \mathrm{i}$, déterminer la forme algébrique de $H = \dfrac{1}{2 + \mathrm{i}}$.

2. Soit a et b deux réels.

a) Déterminer la forme algébrique de $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$.

b) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $a - \mathrm{i}b$, déterminer la forme algébrique de $H = \dfrac{1}{a + \mathrm{i}b}$.

↪ Cours 2 p. 16

4 Découvrir le conjugué d'un nombre complexe

10 min

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.
On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z \times \overline{z}$.

2. Déterminer une condition sur z et $\overline{z}$ pour que :

a) z soit un nombre réel.

b) z soit un nombre imaginaire pur.

↪ Cours 3 p. 18

5 Résoudre des équations du second degré

20 min

1. On veut résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$.

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

b) Écrire $x^2 + 4$ sous la forme $x^2 - c^2$ avec c un nombre complexe.

c) En utilisant une identité remarquable, factoriser $x^2 + 4$.

d) En reconnaissant un produit nul, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 4 = 0$.

2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2 + 2x + 10 = 0$.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 10$. Déterminer la forme canonique de f.

b) Écrire $f(x)$ sous la forme $(x + c)^2 - d^2$ avec c et d deux nombres complexes.

c) En utilisant une identité remarquable, factoriser $f(x)$, puis résoudre $f(x) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

↪ Cours 4 p. 20

Cours

1 Ensemble des nombres complexes

Théorème Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes** ayant les propriétés suivantes.
- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Exemples

Les nombres 3 ; 5 et i appartiennent à $\mathbb{C}$. Les nombres $3 + i$ et $5i$ appartiennent à $\mathbb{C}$.

Propriété Écriture algébrique

Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.
Cette écriture s'appelle la **forme algébrique** de z.
- a est la **partie réelle** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$.
- b est la **partie imaginaire** de z. On note $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarque

Si $a = 0$ (soit $\mathrm{Re}(z) = 0$), on a $z = ib$. On dit que z est imaginaire pur.
L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
Si $b = 0$ (soit $\mathrm{Im}(z) = 0$), on a $z = a$. Alors z est réel.

Exemples

1. Soit z le nombre complexe tel que $z = 4 - 2i$. Alors $\mathrm{Re}(z) = 4$ et $\mathrm{Im}(z) = -2$.
2. Soit z' le nombre complexe tel que $z' = 3i$. Alors $\mathrm{Re}(z') = 0$ et $\mathrm{Im}(z') = 3$. z' est imaginaire pur.

Théorème Égalité dans $\mathbb{C}$

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels. Alors

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Remarque Ce théorème assure l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.

Démonstration

Si $a = a'$ et $b = b'$ alors $z = a + ib = a' + ib' = z'$.

Réciproquement, si $z = z'$, alors $a + ib = a' + ib'$. Donc $a - a' = i(b' - b)$.

Supposons par l'absurde que $b \neq b'$.

Alors on a $\dfrac{a - a'}{b' - b} = i$.

Or a, a', b, b' sont des réels, donc $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$. Donc $i \in \mathbb{R}$. Cela est absurde. Donc $b = b'$.

Par conséquent $a - a' = 0$, soit $a = a'$.

Corollaire Conséquences de l'égalité dans $\mathbb{C}$

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.
- $z \neq z' \Leftrightarrow a \neq a'$ ou $b \neq b'$
- $z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$
- $z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe

Énoncé

Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa forme algébrique, sa partie réelle et sa partie imaginaire.

a) $z = 3i - 4 + 2i - 1$ **b)** $z' = 3i - 5i + 0{,}5i$

Solution

a) $z = -4 - 1 + 3i + 2i = -5 + 5i$ 1 2

Donc $\text{Re}(z) = -5$ et $\text{Im}(z) = 5$. 3

b) $z' = 3i - 5i + 0{,}5i = (3 - 5 + 0{,}5)i = -1{,}5i$

Donc $\text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = -1{,}5$.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe, c'est l'écrire sous la forme $a + ib$.
a est la partie réelle et b est la partie imaginaire.

2 Si z et z' sont deux nombres complexes, alors $z + z' = z' + z$.

3 Attention, si $z = a + ib$ avec a et b deux réels, alors $\text{Im}(z)$ est égal à b et non ib.

À vous de jouer !

1 Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa forme algébrique.

a) $z = -4 + i + 2 - i$ **b)** $z = 5 + i \times i - 4$

2 Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

a) $z = 5i - 4 + i$ **b)** $z = 2 - i^2$

↪ Exercices 37 à 41 p. 28

Méthode 2 Utiliser l'égalité de deux nombres complexes

Énoncé

1. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que $(-1 + 2x) + i(1 + y) = 2 + 3i$.

2. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que $(x + y) + i(2x - y + 4) = 0$.

Solution

1. $(-1 + 2x) + i(1 + y) = 2 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2x = 2 \\ 1 + y = 3 \end{cases}$ 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ 2

Donc $x = \dfrac{3}{2}$ et $y = 2$.

2. $(x + y) + i(2x - y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x - (-x) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3} \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Donc $x = -\dfrac{4}{3}$ et $y = \dfrac{4}{3}$.

Conseils & Méthodes

1 $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$.

Et si on a $z = a + ib$ avec a et b deux réels, alors $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

2 Résoudre ensuite le système de deux équations à deux inconnues.

3 $0 = 0 + 0i$, donc $\text{Re}(0) = 0$ et $\text{Im}(0) = 0$.

À vous de jouer !

3 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :
$(x + 2) + i(x + y - 1) = 5 - 2i$.

4 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :
$(2x + y) + i(x + y - 1) = 0$.

↪ Exercices 42 à 44 p. 28

Cours

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Propriétés Addition et multiplication

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels.

① $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ ② $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Démonstration

L'addition et la multiplication suivent les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.

① $z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$
$= a + ib + a' + ib'$
$= a + a' + ib + ib'$
$= (a + a') + i(b + b')$

② $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib')$
$= a \times a' + a \times ib' + ib \times a' + ib \times ib'$
$= aa' + iab' + ia'b + i^2bb'$
$= aa' + iab' + ia'b - bb'$ car $i^2 = -1$
$= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Définition Opposé

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

z' est appelé opposé de z et on le note $-z$.

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels, alors $-z = (-a) + i(-b)$.

Exemple

Si $z = 2 - 7i$, alors $-z = -2 + 7i$.

Définition Soustraction

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels.
Alors $z - z'$ est défini par $z + (-z')$ et on a $z - z' = (a - a') + i(b - b')$.

Exemple

Si $z = 2 + 3i$ et $z' = -4 + 2i$, alors $z - z' = (2 - (-4)) + (3 - 2)i = 6 + i$.

Définition Inverse

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$.

z' est appelé inverse de z et on le note $\frac{1}{z}$.

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels et $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \times \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$, avec a et b deux réels.

Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib) \times (a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \times \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Exemple

Si $z = 2 + 3i$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{2^2 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Définition Quotient

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. Alors $\frac{z}{z'}$ est défini par $z \times \frac{1}{z'}$.

Exercices résolus

Méthode 3 Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes

Énoncé

On considère les deux nombres complexes : $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$ **b)** $4z_1$ **c)** $z_1 \times z_2$ **d)** z_1^2

Solution

a) $z_1 + z_2 = 5 - 2i + (-2 + 4i)$
$= 3 + 2i$ 1

b) $4z_1 = 4 \times (5 - 2i)$
$= 20 - 8i$ 2

c) $z_1 \times z_2 = (5 - 2i) \times (-2 + 4i)$
$= -10 + 20i + 4i - 8i^2$
$= -10 + 20i + 4i + 8$ 3
$= -2 + 24i$

d) $z_1^2 = (5 - 2i) \times (5 - 2i)$ 4
$= 25 - 10i - 10i + 4i^2$
$= 25 - 10i - 10i - 4$
$= 21 - 20i$

Conseils & Méthodes

1 La forme algébrique est $a + ib$ avec a et b deux réels.

2 On développe comme dans $\mathbb{R}$.

3 $i^2 = -1$

4 $z^2 = z \times z$

À vous de jouer !

5 Soit $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = -3 + 2i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 - z_2$ **b)** $-3z_1$ **c)** $2z_1^2$

6 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(3 - i) \times (4 + 2i)$ **b)** $(5 - i) \times (5 + i)$

↪ Exercices 45 à 53 p. 28

Méthode 4 Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes

Énoncé

1. Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique : $z_1 = \frac{1}{2i}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(5 - i) \times z - i = i$. On donnera la ou les solution(s) sous forme algébrique.

Solution

1. $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{2i \times (-2i)} = \frac{-2i}{-4i^2} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$ 1

2. $(5 - i) \times z - i = i \Leftrightarrow (5 - i) \times z = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{5 - i}$ 2

$\Leftrightarrow z = \frac{2i \times (5 + i)}{(5 - i)(5 + i)}$ 3 $\Leftrightarrow z = \frac{10i + 2i^2}{25 - i^2}$ 4

$\Leftrightarrow z = \frac{10i - 2}{25 + 1} \Leftrightarrow z = \frac{-2 + 10i}{26} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$

Donc $S = \left\{-\frac{1}{13} + \frac{5}{13}i\right\}$.

Conseils & Méthodes

1 Si $z = a + ib$, pour écrire l'inverse de z sous forme algébrique, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par $a - ib$.

2 Pour résoudre l'équation, chercher à isoler l'inconnue (z).

3 Le dénominateur est $5 - i$. Pour écrire le nombre complexe sous forme algébrique, multiplier le numérateur et le dénominateur par $5 + i$.

4 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

À vous de jouer !

7 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \frac{1}{3 + i}$ **b)** $z_2 = \frac{1}{i}$

8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera la solution sous forme algébrique.

a) $(1 - i)z = 1 + i$ **b)** $(5 + 3i)z - 2 = i$

↪ Exercices 54 à 61 p. 29

Cours

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition **Conjugué d'un nombre complexe**

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b deux nombres réels.
Alors le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

Exemple Le conjugué de $z = 3 + 1{,}5\mathrm{i}$ est $\overline{z} = 3 - 1{,}5\mathrm{i}$.

Propriétés **Propriétés du conjugué**

Pour tout nombre complexe z, on a :

① $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
② $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
③ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
④ $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
⑤ $\overline{\overline{z}} = z$

Démonstration

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.
① $z + \overline{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$
② $z - \overline{z} = a + \mathrm{i}b - (a - \mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b - a + \mathrm{i}b = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
③ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$
④ $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
⑤ $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$. Donc $\overline{\overline{z}} = a + \mathrm{i}b = z$

Propriétés **Opérations avec les conjugués**

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

① $\overline{-z} = -\overline{z}$
② $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
③ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
④ **pour tout entier naturel n,** $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
⑤ **Si $z \neq 0$,** $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
⑥ **Si $z \neq 0$,** $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Démonstration

VIDÉO **Démonstration** lienmini.fr/maths-e01-04

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ avec a, b, a' et b' des réels.
② D'une part, $z + z' = a + a' + \mathrm{i}(b + b')$, donc $\overline{z + z'} = a + a' - \mathrm{i}(b + b')$.
D'autre part, $\overline{z} + \overline{z'} = a - \mathrm{i}b + a' - \mathrm{i}b' = a + a' - \mathrm{i}(b + b')$.
Donc $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
③ D'une part, $z \times z' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$, donc $\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - \mathrm{i}(ab' + a'b)$.
D'autre part, $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') = aa' - \mathrm{i}ab' - \mathrm{i}a'b + \mathrm{i}^2bb' = aa' - bb' - \mathrm{i}(ab' + a'b)$.
Donc $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
④ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $(\overline{z})^0 = 1$. Donc $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$.
$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
⑤ Si $z \neq 0$, $z \times \dfrac{1}{z} = 1$, donc $\overline{z \times \dfrac{1}{z}} = \overline{1}$. Donc $\overline{z} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1$, soit $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
⑥ Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(z' \times \dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Exercices résolus

Méthode 5 Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Énoncé

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Z_1 = z - \overline{z}$.

a) Déterminer le conjugué de Z_1 en fonction de z et $\overline{z}$.

b) Z_1 est-il un nombre réel, imaginaire pur ou aucun des deux ?

2. Reprendre les questions précédentes avec $Z_2 = z \times \overline{z}$.

Solution

1. a) $\overline{Z_1} = \overline{z - \overline{z}} = \overline{z} - \overline{\overline{z}}$ **1** $= \overline{z} - z$ **2**

b) $\overline{Z_1} = -(z - \overline{z}) = -Z_1$ **3** Donc Z_1 est un nombre imaginaire pur.

2. a) $\overline{Z_2} = \overline{z \times \overline{z}} = \overline{z} \times \overline{\overline{z}}$ **4** $= \overline{z} \times z$

b) $\overline{Z_2} = \overline{z} \times z = z \times \overline{z} = Z_2$. Donc Z_2 est un nombre réel.

Conseils & Méthodes

1 $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{-z} = -\overline{z}$

Donc $\overline{z - z'} = \overline{z + (-z')} = \overline{z} - \overline{z'}$.

2 $\overline{\overline{z}} = z$

3 Soit z un nombre complexe.
Pour montrer que z est un nombre réel, on peut montrer que $z = \overline{z}$.
Pour montrer que z est un nombre imaginaire pur on peut montrer que $z = -\overline{z}$ ou $\overline{z} = -z$.

4 $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

À vous de jouer !

9 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

10 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

↪ Exercices 62 à 69 p. 29

Méthode 6 Résoudre une équation faisant intervenir z et $\overline{z}$

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $-\overline{z} = 5 - \text{i}$ **b)** $2z + \overline{z} = 3 - 2\text{i}$

Solution

a) $-\overline{z} = 5 - \text{i} \Leftrightarrow \overline{z} = -5 + \text{i}$ **1** $\Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{-5 + \text{i}}$ **2** $\Leftrightarrow z = -5 - \text{i}$

Donc $S = \{-5 - \text{i}\}$.

b) $2z + \overline{z} = 3 - 2\text{i}$ **3**

Posons $z = a + \text{i}b$ avec a et b deux réels.

$$2z + \overline{z} = 3 - 2\text{i} \Leftrightarrow 2(a + \text{i}b) + (a - \text{i}b) = 3 - 2\text{i}$$ **4**

$$\Leftrightarrow 2a + 2\text{i}b + a - \text{i}b = 3 - 2\text{i}$$

$$\Leftrightarrow 3a + \text{i}b = 3 - 2\text{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$ **5** $$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Donc $S = \{1 - 2\text{i}\}$.

Conseils & Méthodes

1 Isoler l'inconnue.

2 Pour obtenir z dans le membre de gauche de l'égalité, on prend le conjugué de chaque membre. En effet, $\overline{\overline{z}} = z$.

3 Dans cette équation, on retrouve z et $\overline{z}$. On ne peut donc pas utiliser la même méthode que la question **a)** et isoler l'inconnue.

4 Si $z = a + \text{i}b$, alors $\overline{z} = a - \text{i}b$.

5 $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$.

À vous de jouer !

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $2\overline{z} = 4 + \text{i}$ **b)** $-3\overline{z} = -2 - \text{i}$

12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $z - 3\overline{z} = 6 - 2\text{i}$ **b)** $-z + 4\overline{z} = 5 - 7\text{i}$

↪ Exercices 70 à 73 p. 29

4 Formule du binôme et équations du second degré

Propriété Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n, on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration

VIDÉO Démonstration lienmini.fr/maths-e01-05

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

Initialisation : pour $n=0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \times (a+b) = a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \text{ (d'après la relation de Pascal)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Propriété Résolution d'une équation de la forme $z^2 = a$

On considère l'équation $z^2 = a$ avec a un réel.
Si $a > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes : $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Propriété Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c trois réels.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- **Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.**
- **Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.**
- **Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.**
- **Si $\Delta \neq 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.**

Exercices résolus

Méthode 7 Utiliser la formule du binôme de Newton

Énoncé

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer la forme algébrique de $(1+i)^4$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le nombre complexe $z=(a+i)^3$ est-il un nombre imaginaire pur ?

Solution

1. $(1+i)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k i^{n-k}$ **1**

$= \binom{4}{0}1^0i^4 + \binom{4}{1}1^1i^3 + \binom{4}{2}1^2i^2 + \binom{4}{3}1^3i^1 + \binom{4}{4}1^4i^0$

$= 1\times1\times1 + 4\times1\times(-i) + 6\times1\times(-1) + 4\times1\times i + 1\times1\times1$ **2**

$= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$

2. $z=(a+i)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^k i^{n-k}$ **3** $= \binom{3}{0}a^0i^3 + \binom{3}{1}a^1i^2 + \binom{3}{2}a^2i^1 + \binom{3}{3}a^3i^0$

$= 1\times1\times(-i) + 3\times a\times(-1) + 3\times a^2\times i + 1\times a^3\times 1$ **2**

$= (-3a+a^3) + i(-1+3a^2)$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow -3a + a^3 = 0$ **4** $\Leftrightarrow a\times(-3+a^2)=0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $-3+a^2=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a^2=3 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$

Donc z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $a=0$ ou $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a=1$ et $b=i$.

2 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$. Et $i^2=-1$.

Donc $i^3 = i^2\times i = -i$ et $i^4 = i^2\times i^2 = 1$.

3 Appliquer la formule du binôme de Newton avec a et $b=i$.

4 z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$.

À vous de jouer !

13 En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer la forme algébrique de $(1-i)^5$.

14 Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z=(a-i)^3$, avec $a\in\mathbb{R}$. Déterminer la(les) valeur(s) de a pour lesquels z est un nombre réel.

↪ Exercices 74 à 78 p. 30

Méthode 8 Résoudre des équations du second degré dans ℂ

Énoncé

Résoudre dans ℝ puis dans ℂ les équations suivantes. **a)** $z^2+10=0$ **b)** $z^2-4z+5=0$

Solution

a) $z^2+10=0 \Leftrightarrow z^2=-10$. Dans ℝ, $S=\varnothing$.

Dans ℂ, $S=\left\{-i\sqrt{10}\,;\,i\sqrt{10}\right\}$. **1**

b) $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2 - 4\times1\times5 = -4 < 0$ **2**

Dans ℝ, $S=\varnothing$. Dans ℂ, $z_1 = \dfrac{-(-4)-i\sqrt{4}}{2\times1} = 2-i$

et $z_2 = \dfrac{-(-4)+i\sqrt{4}}{2\times1} = 2+i$. **3** Donc dans ℂ, $S=\{2-i\,;\,2+i\}$.

Conseils & Méthodes

1 On a une équation de la forme $z^2=a$ avec $a<0$. Donc les solutions dans ℂ sont $-i\sqrt{|a|}$ et $i\sqrt{|a|}$.

2 On a une équation du second degré à coefficients réels. Ici $a=1$; $b=-4$ et $c=5$. On commence par calculer Δ.

3 $\Delta<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

À vous de jouer !

15 Résoudre dans ℝ, puis dans ℂ les équations suivantes.
a) $z^2-5=0$ **b)** $z^2+5=0$ **c)** $z^2=-9$

16 Résoudre dans ℝ, puis dans ℂ les équations suivantes.
a) $4z^2-20z+25=0$ **b)** $2z^2-4z+4=0$

↪ Exercices 79 à 82 p. 30

5 Factorisation et racines d'un polynôme

Définition Polynôme de degré n à coefficients réels et racine

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **polynôme** P de degré n à coefficients réels est une expression s'écrivant sous la forme : $P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, avec $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ des réels tels que $c_n \neq 0$.
- a est une **racine** de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Propriété Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$

Soit n un nombre entier naturel non nul. Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z, on a : $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-06

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$:
« $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$. ».
Initialisation : pour $n = 1$, $z^1 - a^1 = z - a = (z - a) \times Q(z)$, avec $Q(z) = 1$.
Q est un polynôme de degré 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire :
« $z^{n+1} - a^{n+1} = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus n.».
$z^{n+1} - a^{n+1} = z \times z^n - a^{n+1} = z \times [a^n + (z - a) \times Q(z)] - a^{n+1}$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$
$= z \times a^n + z(z - a) \times Q(z) - a^{n+1} = a^n (z - a) + z(z - a) \times Q(z) = (z - a) \times [a^n + z \times Q(z)]$
$= (z - a) \times R(z)$ en posant $R(z) = a^n + z \times Q(z)$.
Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$, donc R est un polynôme de degré au plus n.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Propriété Factorisation d'un polynôme par $z - a$

Soit P un polynôme de degré n et a un nombre complexe tel que $P(a) = 0$.
Alors pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-06

Soit P un polynôme tel que $P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$.
$P(z) = P(z) - P(a)$ car $P(a) = 0$.
$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 - (c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0)$.
$P(z) = c_n(z^n - a^n) + c_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + c_2(z^2 - a^2) + c_1(z - a)$
$P(z) = c_n(z - a)Q_n(z) + c_{n-1}\,(z - a)Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2(z - a)Q_2(z) + c_1(z - a)$ d'après la propriété précédente, avec $Q_2, \ldots, Q_n$ des polynômes de degré au plus $n - 1$.
$P(z) = (z - a)[c_n Q_n(z) + c_{n-1}Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2 Q_2(z) + c_1] = (z - a)Q(z)$
en posant $Q(z) = c_n Q_n(z) + c_{n-1}Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2 Q_2(z) + c_1$. Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Propriété Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration ➜ Apprendre à démontrer p. 26

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-07

Corollaire Nombre de solutions d'une équation polynomiale

Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est inférieur ou égal à son degré.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e01-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 9 — Factoriser un polynôme de la forme $z^n - a^n$

Énoncé

Factoriser $z^3 - \mathrm{i}^3$ par $(z - \mathrm{i})$.

Solution

$z^3 - \mathrm{i}^3 = (z - \mathrm{i})(az^2 + bz + c)$ **1**

Or $(z - \mathrm{i})(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - \mathrm{i}az^2 - \mathrm{i}bz - \mathrm{i}c$ **2**

$= az^3 + (b - \mathrm{i}a)z^2 + (c - \mathrm{i}b)z - \mathrm{i}c$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - \mathrm{i}a = 0 \\ c - \mathrm{i}b = 0 \\ -\mathrm{i}c = -\mathrm{i}^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \mathrm{i}a \\ c = \mathrm{i}b \\ c = \mathrm{i}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \mathrm{i} \\ c = \mathrm{i} \times \mathrm{i} \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \mathrm{i} \\ c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ Donc $z^3 - \mathrm{i}^3 = (z - \mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1)$.

Conseils & Méthodes

1 $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1 = 2$ car $n = 3$.

2 Développer l'expression, puis identifier les coefficients.

À vous de jouer !

17 Factoriser $z^3 - 2^3$ par $(z - 2)$.

18 Factoriser $z^3 - (3\mathrm{i})^3$ par $(z - 3\mathrm{i})$.

↪ Exercices 83 à 88 p. 30

Méthode 10 — Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels

Énoncé

On considère l'équation $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.

1. Vérifier que 2 est une solution de l'équation.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

Solution

1. $2^3 - 2 \times 2^2 + 2 - 2 = 0$. Donc 2 est une solution de l'équation.

2. $z^3 - 2z^2 + z - 2$ est un polynôme de degré 3. **1**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$ **2**

$(z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$ **3**

$= az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + 2a \\ c = 1 + 2b \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$ **4**

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 = -1$ **5**

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -\mathrm{i}$ ou $z = \mathrm{i}$. Donc $S = \{2\,;-\mathrm{i}\,;\mathrm{i}\}$.

Conseils & Méthodes

1 Pour résoudre une équation de degré 3 dont on connaît déjà une solution, factoriser afin de se ramener à un produit nul.

2 $z^3 - 2z^2 + z - 2$ un polynôme de degré 3 et 2 est une racine. D'après la propriété du cours, on a $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus 2 soit $Q(z) = az^2 + bz + c$.

3 Développer l'expression, puis identifier les coefficients.

4 Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

5 On a une équation de la forme $z^2 = a$ avec $a < 0$. Donc les solutions sont $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

À vous de jouer !

19 On considère l'équation $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$.
1. Vérifier que -3 est une solution de l'équation.
2. Déterminer toutes les solutions complexes de l'équation.

20 On considère l'équation $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$.
1. Vérifier que 1 est une solution de l'équation.
2. Déterminer toutes les solutions complexes de l'équation.

↪ Exercices 89 à 92 p. 30

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e01-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 11 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Cours 4 p. 20 et Cours 5 p. 22

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $5-2i+2iz=3z+4$ **b)** $z^2+1=z$

c) $z=2\times\overline{iz}+5i-2$ **d)** $z^4-16=0$

Solution

a) $5-2i+2iz=3z+4 \Leftrightarrow 2iz-3z=4-5+2i$ **1**

$\Leftrightarrow (-3+2i)z=-1+2i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-1+2i}{-3+2i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(-1+2i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3+2i-6i-4i^2}{(-3)^2-(2i)^2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3+2i-6i+4}{9+4}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{7}{13}-\dfrac{4}{13}i$

Donc $S=\left\{\dfrac{7}{13}-\dfrac{4}{13}i\right\}$.

b) $z^2+1=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0$ **2**

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$. $\Delta<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\dfrac{-(-1)-i\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2=\dfrac{-(-1)+i\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Donc $S=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\,;\,\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

c) Posons $z=a+ib$ avec a et b deux réels. **3** On a alors $iz=ia+i^2b=-b+ia$. Donc $\overline{iz}=-b-ia$

$z=2\times\overline{iz}+5i-2 \Leftrightarrow a+ib=2(-b-ia)+5i-2$

$\Leftrightarrow a+ib=-2b-i2a+5i-2$

$\Leftrightarrow a+ib=-2b-2+i\times(5-2a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2b-2 \\ b=5-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-2(5-2a)-2 \\ b=5-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-10+4a-2 \\ b=5-2a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a=-12 \\ b=5-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-3 \end{cases}$

Donc $S=\{4-3i\}$.

d) $z^4-16=0 \Leftrightarrow (z^2-4)(z^2+4)=0$ **4**

$\Leftrightarrow z^2-4=0$ ou $z^2+4=0$

$\Leftrightarrow z^2=4$ ou $z^2=-4$

Donc $S=\{-2\,;\,2\,;\,2i\,;\,-2i\}$.

Conseils & Méthodes

On a plusieurs méthodes pour résoudre une équation.

1 On peut chercher à isoler l'inconnue lorsque cela est possible.

2 Lorsqu'on a une équation du second degré, on calcule le discriminant et on utilise les formules du cours.

3 On peut utiliser la forme algébrique et poser $z=a+ib$ avec a et b deux réels, puis identifier les parties réelles et les parties imaginaires.

4 On peut chercher à factoriser pour se ramener à un produit nul.

À vous de jouer !

21 En utilisant la méthode de son choix, résoudre les équations suivantes.

a) $3z-4=iz+5i-1$ **b)** $z=-\dfrac{2}{z}+1$

22 En utilisant la méthode de son choix, résoudre les équations suivantes.

a) $z=4\times\overline{z}+4-2i$ **b)** $(z+i)\times z^2+(z+i)\times5=0$

Exercices 107 à 125 p. 32

Méthode

12 Étudier une suite de nombres complexes

Cours 1 p. 14 et Cours 2 p. 16

Énoncé

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.

2. On considère le nombre complexe $z_A = 1 + \mathrm{i}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{i} \times u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

c) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

d) Déterminer la forme algébrique de z_{100}.

Solution

1. $z_1 = \mathrm{i} \times z_0 + 2 = \mathrm{i} \times 0 + 2 = 2$ **1**

$z_2 = \mathrm{i} \times z_1 + 2 = \mathrm{i} \times 2 + 2 = 2 + 2\mathrm{i}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A$ **2**

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times z_n + 2 - (1 + \mathrm{i}) \\ &= \mathrm{i} \times z_n + 2 - 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times z_n + 1 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Or $u_n = z_n - z_A$ donc $z_n = u_n + z_A = u_n + 1 + \mathrm{i}$. **3**

Donc
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times (u_n + 1 + \mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times u_n + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times u_n \text{ car } \mathrm{i}^2 = -1 \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ ». **4**

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = z_0 - z_A = 0 - (1 + \mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i}$ et $(-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0 = -1 - \mathrm{i}$.

Donc $u_0 = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times u_n \\ &= \mathrm{i} \times (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - z_A$. Donc $z_n = u_n + z_A$. Donc $z_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n + 1 + \mathrm{i}$.

d) $z_{100} = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{100} + (1 + \mathrm{i})$. Or $\mathrm{i}^2 = -1$. Donc $\mathrm{i}^{100} = (\mathrm{i}^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$. **5** Donc $z_{100} = (-1 - \mathrm{i}) \times 1 + 1 + \mathrm{i} = 0$.

Conseils & Méthodes

1 On a $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2$. Remplacer n par la valeur que l'on veut. Ici $n = 0$, puis $n = 1$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - z_A$.
On peut donc remplacer n par l'entier naturel que l'on veut. Ici on choisit $n + 1$.

3 On exprime z_n en fonction de u_n puis on remplace dans l'expression de u_{n+1}.

4 Le résultat ressemble à celui des suites géométriques. Mais nous ne l'avons pas démontré avec les nombres complexes. Nous allons donc le démontrer par récurrence.

5 $a^{m \times n} = (a^m)^n$.

À vous de jouer !

23 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.

2. On considère le nombre complexe $z_A = -1 + \mathrm{i}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{i} \times u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$.

c) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

d) Déterminer la forme algébrique de z_{62}.

24 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

3. En déduire la valeur de z_{99}.

Exercices 126 à 129 p. 33

Exercices apprendre à démontrer

DÉMO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-07

La propriété à démontrer Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

On utilisera un raisonnement par récurrence. On admettra que si a est une racine d'un polynôme Q de degré n, alors $Q(z) = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Comprendre avant de rédiger

Testons la propriété pour $n = 2$. Un polynôme de degré 2 est un polynôme de la forme $Q(z) = az^2 + bz + c$, avec a, b et c trois réels, tels que $a \neq 0$. Selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, Q admet deux racines réelles (si $\Delta > 0$), une racine réelle (si $\Delta = 0$) ou deux racines complexes conjuguées (si $\Delta < 0$). Donc Q admet au plus deux racines.

Rédiger

Étape 1
On identifie la propriété à démontrer par récurrence.

Étape 2
Pour l'initialisation, on montre que $P(0)$ est vraie.

Une fonction polynôme de degré n est une fonction de la forme $Q(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, avec $c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n$ des réels tels que $c_n \neq 0$.

Étape 3
Pour l'hérédité, on considère un entier naturel n et on suppose que $P(n)$ est vraie. Il faut alors démontrer que $P(n + 1)$ est vraie.

Étape 4
On fait une disjonction de cas : soit Q n'admet aucune racine, soit il admet une racine.

Si a est une racine de Q, alors on factorise Q par $z - a$.

Au plus n racines signifie $0\,;1\,;2\,;\dots\, n-1$ ou n racines

Étape 5
b est une racine de Q si, et seulement si, $Q(b) = 0$.

On reconnaît un produit nul, puis on utilise l'hypothèse de récurrence.

$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Étape 6
On conclut pour tout entier naturel n

La démonstration rédigée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines. »

Initialisation : pour $n = 0$, Un polynôme de degré nul est un polynôme constant. Un polynôme constant non nul n'admet aucune racine. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire : « Un polynôme non nul de degré $n + 1$ admet au plus $n + 1$ racines. »

Soit Q un polynôme de degré $n + 1$.

Si Q n'admet aucune racine, alors $P(n + 1)$ est vraie.

Si Q admet une racine a, alors $Q(z) = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus n.

b racine de $Q \Leftrightarrow (b - a) \times R(b) = 0$

$\Leftrightarrow b - a = 0$ ou $R(b) = 0$

$\Leftrightarrow b = a$ ou $R(b) = 0$

Or R admet au plus n racines. Donc Q admet au plus $n + 1$ racines. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Pour s'entraîner

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \overline{z_n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_{2n} = z_0$.