TP et problèmes thématiques

Thème 1 Modèles définis par une fonction d'une variable 247

Thème 2 Modèles d'évolution 252

Thème 3 Approche historique de la fonction logarithme 258

Thème 4 Calculs d'aires 263

Thème 5 Répartition des richesses, inégalités 268

Thème 6 Inférence bayésienne 273

Thème 7 Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage 277

Thème 8 Temps d'attente 282

Thème 9 Corrélation et causalité 287

Thème 1

Modèles définis par une fonction d'une variable

30 min

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

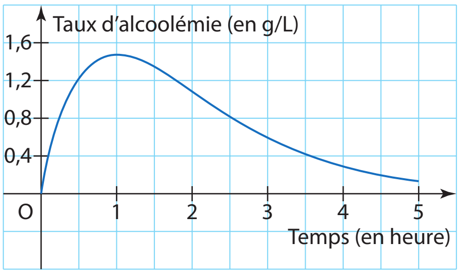
Spécialité : SVT

Vers le sup : Médical, paramédical

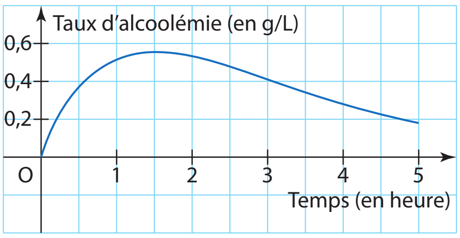
1 Alcool au volant

➡ **Objectif : Déterminer la durée minimale nécessaire, après une absorption d'alcool pour reprendre le volant sans risque.**

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une personne (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool. On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_1$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun et la courbe $\mathscr{C}_2$ représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

A ▸ Observation graphique

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.

2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux d'alcoolémie maximum dans le sang autorisé au volant est de 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

3. Depuis le 1er juillet 2015, le taux maximum d'alcoolémie dans le sang autorisé au volant pour un jeune conducteur (moins de deux ans après l'obtention du permis) est de 0,2 g/L. Dans chacun des deux cas, déterminer à partir de quel moment, après absorption de l'alcool, un jeune conducteur pourra reprendre le volant en respectant la législation.

B ▸ Modélisation

On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) pendant les cinq heures suivant l'absorption est modélisé en fonction du temps (exprimé en heures) :

– par une fonction f_1 lorsque l'alcool est absorbé à jeun ;

– par une fonction f_2 lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments.

On admet que :

– les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la partie **A** sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2 ;

– la fonction f_1 est définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $f_1(t) = 4te^{-t}$;

– la fonction f_2 est définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $f_2(t) = ate^{bt}$ où a et b désignent des nombres réels non nuls.

1. On désigne par f_2' la fonction dérivée de f_2 sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

a) Déterminer $f_2'(t)$.

b) On admet que $f_2'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. En déduire la valeur exacte de b.

2. On admet que $f_2(3) = 0{,}4$. Déterminer une valeur approchée au millième de a.

3. Déterminer, par le calcul, le temps au bout duquel le taux d'alcoolémie maximal est atteint et sa valeur lorsque l'alcool est absorbé à jeun.

4. Résoudre l'équation $f_1(t) = 0{,}985te^{-\frac{2}{3}t}$. Interpréter le résultat.

D'après Bac ES, Polynésie, septembre 2006.

Thème 1

20 min

2 Satellites dans l'espace

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : Physique

Vers le sup : PCSI

➡ **Objectif : Déterminer le temps restant avant la rentrée atmosphérique d'un satellite.**

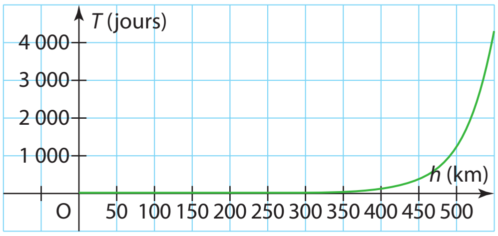
En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé **rentrée atmosphérique**.
Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h, exprimée en kilomètres, de son orbite.
Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

A ▸ Étude d'un premier satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h) = K \times 0{,}012\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

Le nombre K est appelé coefficient balistique du satellite.
La fonction T associée à ce satellite est représentée ci-dessous.



1. À quelle altitude minimale faut-il mettre en orbite ce satellite pour que le temps restant avant sa rentrée atmosphérique soit au moins égal à 1 000 jours ?

2. Si l'orbite du satellite est située à 530 km, quel est le temps restant avant sa rentrée atmosphérique ?

3. Déterminer une valeur approchée au dixième du coefficient balistique de ce satellite.

B ▸ Étude du satellite Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique égal à 11.
La fonction T, associée à ce dernier, est donc définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$T(h) = 0{,}132\mathrm{e}^{0{,}025(h-150)}.$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude $h = 575$ km.

Calculer le temps restant avant la rentrée atmosphérique de ce satellite. Arrondir au jour près.

2. Déterminer la limite de T en $+\infty$.

3. a) Déterminer la dérivée T' de T.
b) En déduire le sens de variation de la fonction T sur $[0\,;+\infty[$.
c) Quelle interprétation peut-on en déduire ?

4. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.
a) Montrer que $T(h + 10) = \mathrm{e}^{0{,}25} \times T(h)$.
b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

D'après Bac STI2D, Antilles Guyane juin 2019.

35 min

3 Aire maximale d'un trapèze

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3
- Calcul intégral .... Chapitre 6

Vers le sup : MPSI

➡ **Objectif : Déterminer l'aire maximale d'un trapèze inscrit à l'intérieur d'une parabole.**

A ▶ Recherche de *f*

On considère une fonction *f* du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère telle que $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en 5 et l'axe des abscisses en –2 et 6.

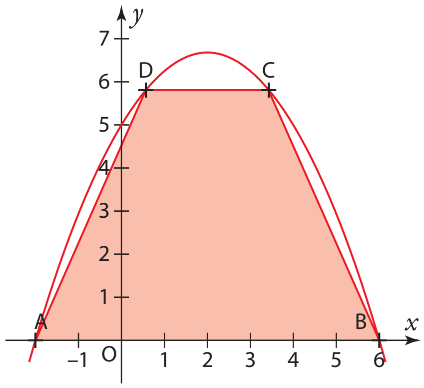
1. Déterminer les valeurs de *a*, *b* et *c*.

2. Étudier les variations de *f* et déterminer son axe de symétrie.

B ▶ Optimisation d'une aire

On admet, dans cette partie, que la fonction *f* est définie par $f(x) = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{3}x + 5$ sur l'intervalle [–2 ; 6].

On note A et B les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses tels que $x_A < x_B$.
Soit $\mathscr{C}$ un point d'abscisse x de $\mathscr{C}$ tel que $x \in [2 ; 6]$ et les points D de C tel que ABCD soit un trapèze.
L'objectif de cette partie est de déterminer l'abscisse du point C pour que l'aire du trapèze ABCD soit maximale.



1. Exprimer la longueur DC en fonction de x.

2. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ du trapèze ABCD en fonction de x.

3. Déterminer les variations de $\mathscr{A}$.

4. En déduire l'aire maximale du trapèze ABCD et l'abscisse du point C pour laquelle elle est obtenue.

15 min

4 Coût minimal moyen

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie

➡ **Objectif : Déterminer le minimum d'un coût moyen de la production d'un article.**

Une entreprise fabrique et commercialise un article dont la production est comprise entre 1 000 et 7 000 pièces par semaine.
On modélise le coût de fabrication, exprimé en milliers d'euros, par la fonction *f* définie sur l'intervalle [1 ; 7] par :

$$f(x) = 1{,}5x^3 - 9x^2 + 24x + 48$$

où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués.
On note *C* la fonction définie sur l'intervalle [1 ; 7] représentant le coût moyen par article fabriqué, exprimé en euros.
On a, par conséquent, pour tout x de [1 ; 7] :

$$C(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

1. Déterminer la dérivée *C′* de la fonction *C*.

2. a) Étudier les variations de la fonction *C* sur l'intervalle [1 ; 7].
b) Déterminer, en milliers, le nombre d'articles à fabriquer pour que le coût moyen par article soit minimal.

D'après BAC ES, Amérique du Sud, novembre 2015.

Thème 1

50 min

5 Étude de marché

➡ **Objectif : Déterminer un bénéfice maximal.**

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Convexité .... Chapitre 3

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie

Un producteur de légumes livre directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

A ▸ Coût marginal

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois.
Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10\,.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.
Le coût marginal est défini comme la variation du coût liée à la production d'une unité supplémentaire. On le note C_m.

1. Déterminer une expression de $C_m(x)$.

2. Calculer $C'(x)$.

3. Tracer, sur la calculatrice, les courbes représentatives de C_m et de C' sur l'intervalle [0 ; 10].
Que peut-on remarquer ?

B ▸ Variation du coût marginal

Dans cette partie, on assimile le coût marginal à la fonction dérivée de C, c'est-à-dire que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10] :

$$C_m(x) = C'(x).$$

1. Calculer $C_m(6)$.
Interpréter le résultat.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C.
a) Déterminer $C''(x)$.
b) Déterminer le plus grand intervalle de la forme [0 ; a] inclus dans [0 ; 10] sur lequel la fonction C est convexe.
c) Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ?
Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

C ▸ Bénéfice maximal

On admet que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R est exprimée en centaines d'euros.

1. Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.

2. Vérifier que le bénéfice $B(x)$ en fonction de x est donné par :

$$B(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{5}{16}x^3 + 15x - 10\,.$$

3. Déterminer $B'(x)$.

4. Dans cette question, on cherche à déterminer le signe de $B'(x)$.
a) Calculer et déterminer le signe de $B''(x)$ sur [0 ; 10].
b) En déduire les variations de B' sur [0 ; 10].
c) Démontrer qu'il existe exactement deux valeurs α et β telles que $B'(\alpha) = B'(\beta) = 0$ avec $0 < \alpha < 7{,}5$ et $7{,}5 < \beta < 10$.
d) Donner une valeur approchée au centième de α et de β.
e) En déduire le signe de $B'(x)$ sur [0 ; 10].

5. Déterminer le nombre de paniers pour lequel le bénéfice est maximal et le calculer.

D'après Bac ES, Antilles, septembre 2014.

40 min

6 Évolution d'une population

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

➡ **Objectif : Déterminer si une espèce est en voie de disparition.**

Le hérisson européen est une espèce menacée dont l'étude de la population a été surtout menée au Royaume-Uni.
Les causes de cette disparition sont le trafic automobile, ainsi que l'utilisation de certains pesticides.
La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 35\mathrm{e}^{-0{,}053x}$$

modélise l'évolution, au Royaume-Uni, du nombre de hérissons (exprimé en millions).
Les années sont numérotés à partir de 1950 en prenant $x = 0$ pour l'année 1950, $x = 1$ pour 1951,…, $x = 10$ pour 1960 et ainsi de suite.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
b) Interpréter graphiquement ce résultat.
c) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. a) Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Des études statistiques britanniques démontrent que la population de hérissons est passée d'environ 35 millions en 1950 à 1 million en 2017 au Royaume-Uni.
Retrouver ces résultats à l'aide du modèle proposé dans cet exercice.

4. a) Résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ en donnant le résultat arrondi à l'unité près.
b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. En ne prenant en considération que le seul critère énoncé ci-dessous et les informations suivantes, expliquer dans quelle catégorie (vulnérable, en danger, en voie d'extinction) se situe le hérisson européen au Royaume-Uni depuis 1950.

L'Union Internationale pour la Conservation de la Nature (UICN) a établi plusieurs critères pour déterminer si une espèce est menacée ou non. En simplifiant, l'un d'entre eux précise :

- une espèce est « vulnérable » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 30 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes ;
- une espèce est « en danger » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 50 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes ;
- une espèce est en « voie d'extinction » lorsqu'il y a réduction constatée ou modélisée des effectifs d'au moins 80 % depuis 10 ans ou trois générations, selon la plus longue des deux périodes.

La durée de vie d'une génération de hérissons européens est de 4 à 5 ans ; dans cet exercice, on prendra la valeur de 5 ans.

Sauvonslesherissons.fr et uicn.fr/liste-rouge-mondiale/

D'après BAC STAV, France métropolitaine, 2018.

Thème 2 Modèles d'évolution

TICE 30 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets................ Chapitre 1

Spécialité : SES

Versw le sup : Économie

1 TP Amortissement d'une dette par annuités constantes

➡ **Objectif : Déterminer la durée d'un remboursement par annuités constantes.**

Isabelle contracte un prêt de 50 000 € le 1er septembre 2020 à un taux fixe de 1,5 %. Les intérêts de l'emprunt se calculent sur la somme qu'il reste à rembourser.

Elle a choisi de verser des annuités de remboursement constantes de 3 000 €.

Une partie servira à payer les intérêts et le reste à payer l'amortissement (remboursement) du prêt.

La première année, les intérêts représentent 1,5 % de 50 000 €, soit 750 €. Sur les 3 000 € qu'elle verse, elle ne rembourse réellement que 3 000 – 750 = 2 250. C'est l'amortissement. Il lui reste 50 000 – 2 250 = 47 750 € à rembourser après un an. L'année suivante, les 1,5 % d'intérêts s'appliqueront à 47 750 € l'année suivante.

On note :
- (u_n) la suite correspondant aux intérêts versés la n-ième année,
- (v_n) la suite correspondant à l'amortissement, c'est-à-dire la part du capital qui est remboursé la n-ième année,
- (w_n) la suite correspondant à la somme de capital encore dû au début de la n-ième année.

1. On a $w_1 = 50\,000$. Déterminer la valeur de u_1, v_1 et w_2.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, donner une relation entre u_n et v_n.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, donner une relation entre v_n, w_n et w_{n+1}.

On veut calculer le nombre d'années nécessaire pour rembourser le prêt.

4. Reproduire sur un tableur le tableau suivant.

	A	B	C	D	E
1	Année	Montant dû (w_n)	Amortissement (v_n)	Intérêts (u_n)	Annuité
2	1	50000			
3	2				

5. Remplir la colonne E.

6. Quelle formule faut-il rentrer : **a)** dans la cellule D2 ? **b)** dans la cellule C2 ? **c)** dans la cellule B3 ?

7. En étirant vers le bas, compléter : **a)** la colonne D. **b)** la colonne C. **c)** la colonne B.

8. Déterminer combien d'années il lui faudra pour rembourser son emprunt.

20 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets................ Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien........... Chapitre 4

Spécialité : PC, SVT

Vers le sup : Médical, Paramédical

2 Décroissance radioactive

➡ **Objectif : Déterminer une demi-vie.**

L'iode 131 est un isotope radioactif utilisé en médecine pour les radiothérapies dans les cancers de la thyroïde.

Le patient doit prendre une gélule contenant 0,01 mg d'iode 131 au début de son traitement.

Chaque jour, les noyaux d'iode 131 se désintègrent et la masse de la substance radioactive diminue de 8 %.

On note u_n la masse d'iode 131 exprimée en mg présente dans le patient n jours après l'ingestion de la gélule.

1. Donner la valeur de u_0 et u_1.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer combien de jours sont nécessaires pour que la masse d'iode 131 dans le patient devient inférieure à 0,001 mg.

5. On appelle demi-vie le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs d'iode 131 se désintègrent. Déterminer la valeur de la demi-vie de l'iode 131.

TICE 30 min

3 TP Déplacement d'un solide dans un liquide visqueux

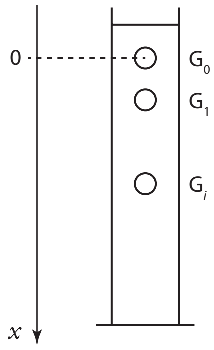
Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

Vers le sup : Physique

➡ **Objectif : Déterminer la vitesse limite ou l'angle d'un lancer.**

A ▸ Chute sans vitesse initiale

On lâche, sans vitesse initiale, une bille d'acier dans un tube contenant un liquide visqueux. On note m la masse de la bille, g l'intensité de la pesanteur, t le temps et v la vitesse de la bille. L'étude mécanique du système permet de démontrer que la fonction v vérifie $v'(t) = -\frac{k}{m}v(t) + \alpha g$ où k et α sont deux constantes positives dépendant de la matière de la bille et du liquide.

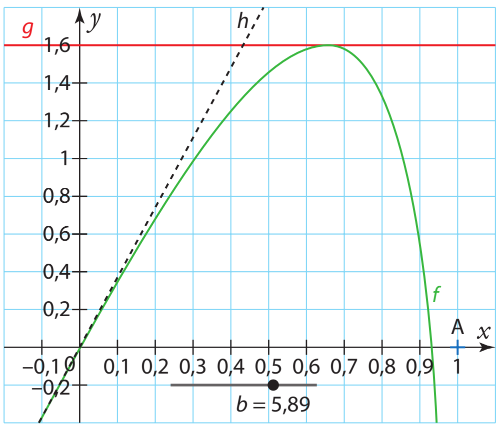


1. Déterminer la fonction v.

2. Montrer que la bille ne pourra pas dépasser une vitesse limite.

B ▸ Chute avec vitesse initiale

On lance vers le haut une bille d'acier dans un fluide visqueux. Les expériences en laboratoire montrent que la trajectoire obtenue est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,,1[$ par $f(x) = bx + 2\ln(1-x)$ où $(x, f(x))$ sont les coordonnées de la bille dans un repère orthonormé d'unité 1 mètre.



1. a) Ouvrir GeoGebra. Créer un curseur b compris entre 0 et 10 et la fonction f.

b) En utilisant le curseur, quelle semble être la distance maximale que peut atteindre la bille ? Pourquoi ?

c) En utilisant le curseur, quelles semblent être les valeurs de b pour lesquelles la trajectoire n'est pas définie ?

d) Modifier le curseur pour que b varie entre 2 et 10.

e) En utilisant le curseur, déterminer les valeurs de b pour lesquelles la hauteur maximale de la bille est 1,6 mètre.

2. Par le calcul.

a) Déterminer une condition sur b rendant possible la modélisation de l'expérience par cette fonction f.

b) Montrer que la fonction f admet un maximum en x égale à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

c) Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans la suite, on choisit $b = 5,65$ et on souhaite déterminer l'angle de tir θ de la bille pour qu'elle atteigne 1,6 mètre. L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

a) Établir l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.

b) On note A le point de coordonnée (1 ; 0) et B le point de T_0 d'abscisse 1. Déterminer les longueurs du triangle OAB.

c) Exprimer $\cos\theta$ en fonction de b.

d) Déterminer θ.

Thème 2

Histoire des maths

55 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SVT

Vers le sup : Biologie

4 Dynamique des populations : modèle de Malthus

➡ **Objectif : Comprendre la modélisation d'un phénomène biologique, l'appliquer et étudier ses limites.**

C'est en 1798 que le Révérend Thomas Robert Malthus a formulé son « principe de population » : « Si elle n'est pas freinée, la population s'accroît en progression géométrique. Les subsistances ne s'accroissent qu'en progression arithmétique. »

A ▸ Étude discrète

On considère une population P dont la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est constante et égale à r exprimé sous forme décimale (r est appelé coefficient de croissance). On note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.

1. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.

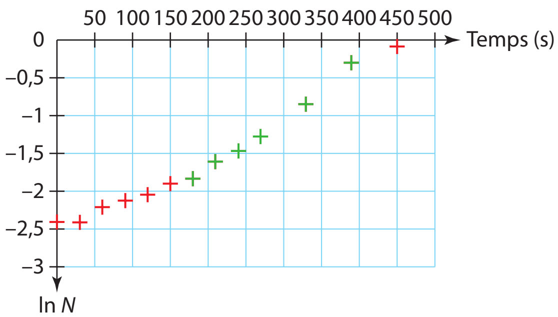
2. Exprimer P_n en fonction de n et P_0.

3. Représenter graphiquement P_n pour $r = 0{,}3$, $P_0 = 1$ puis $r = 1{,}2$ et $P_0 = 200$.

4. Par définition, $a^n = \mathrm{e}^{n \ln a}$. Expliquer pourquoi le modèle de Malthus est aussi appelé le modèle exponentielle.

B ▸ Une application : population de la levure de bière

La levure est utilisée en agro-alimentaire pour la production de levain qui est ensuite un élément essentiel de la fabrication du pain. Diverses levures existent qui n'ont pas la même vitesse de croissance. Elles sont donc étudiées en laboratoire pour ensuite être commercialisées. Dans cet exemple, un milieu nutritif est ensemencé avec *Saccharomyces cerevisiae*. On dénombre le nombre de levures N au cours du temps t au fur et à mesure de la croissance. On trace la courbe en mettant le temps en abscisses et $\ln N$ en ordonnées.



1. Que peut-on dire de la courbe entre 175 et 400 s ?

2. On considère que la courbe est une droite entre 175 et 400. Déterminer un ajustement avec la droite des moindres carrées.

3. Expliquer pourquoi le modèle de Malthus s'applique entre $t = 175$ et $t = 400$ et définir les caractéristiques de la suite donnant le nombre de levures à chaque seconde.

C ▸ Les limites du modèle

En août 1944, des gardes côtes américains installent sur l'île Saint Matthieu à l'ouest des côtes de l'Alaska une station d'étude et introduisent 29 rennes.
En 1957, le biologiste David Klein poursuit des recherches sur cette île et constate qu'il y a 1 350 rennes.
On suppose que la croissance de la population est de type Malthusien.
On note P_0 le nombre de rennes en 1944.

1. Vérifier que $P_{13} = 1\,350$.

2. Déterminer r le coefficient de croissance à 10^{-3} près puis déterminer P_n en fonction de P_0, n et r.

3. En 1963, il constate en survolant l'île que les rennes sont environ 6 000. Est-ce que la modélisation précédente s'applique ?

4. En 1966 les rennes ne sont plus que 42. Expliquer

5. Expliquer la citation de Malthus en vous inspirant de l'exemple.

Histoire des maths | TICE | 30 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Spécialité : SVT
Vers le sup : Biologie

2

5 TP Dynamique des populations : modèle de Verhulst discret

➡ **Objectif : Étudier le modele de Verhust discret et son application.**

Pierre François Verhulst, vers 1840, reprend les travaux de Malthus en introduisant dans les équations l'interaction des populations avec leur environnement.

A ▸ Comprendre l'équation logistique

On considère une population P et on note P_n le nombre d'individus de la population à l'année n.

Dans ce modèle, la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est une fonction affine de la population P_n qui s'écrit $r - b\,P_n$ avec r et b deux réels positifs.

1. On note K la constante $\frac{r}{b}$. Montrer que $a - bP_n = r\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to 0} (r - bP_n)$. Quelle est l'interprétation biologique de r ?

3. Déterminer $\lim\limits_{P_n \to K} (r - bP_n)$. Quelle est l'interprétation biologique de K ?

4. Établir que $P_{n+1} - P_n = rP_n\left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$ appelé suite logistique.

B ▸ Exemple de suites

1. Préparer un tableur comme ci-contre où les cases vertes sont renseignées par l'utilisateur et les cases roses calculent les termes de la suite.

a) Quelle formule entrer en D2 pour afficher la valeur renseignée par l'utilisateur en B3 ?

b) Quelle formule entrer en D3 pour calculer P_1 ? Étendre cette formule vers le bas.

2. À l'aide du tableur, représenter ces trois suites :
a) $K = 15$, $r = 0{,}6$ et $P_0 = 20$
b) $K = 15$, $r = 1.9$ et $P_0 = 14$
c) $K = 15$, $r = 2.4$ et $P_0 = 12$.

3. Décrire le comportement de ces trois suites.

	A	B	C	D
2	$K =$		Rang de la suite P_n	Valeur de P_n
3	$r =$		0	
4	$P_0 =$		1	
5			2	
6			3	
7			4	
8			5	
9			6	
10			7	
11			8	
12			9	
13			10	

C ▸ Évolution de la population d'éléphants

Àla fin du XIX^{e}, la population des éléphants est en voie d'extinction et un parc naturel entre l'Afrique du Sud et le Mozambique est créé : le parc Kruger. Le tableau ci-dessous indique les effectifs observés.

	1905	1923	1930	1939	1945	1950
Eff. observés	10	13	29	450	980	3010
	1960	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	
Eff. observés	5800	6500	7400	7200	7310	

1. Représenter cette suite.

2. Établir les caractéristiques de la suite logistique permettant de modéliser l'évolution de la population d'éléphant.

Thème 2

TICE 30 min

Contenus associés :
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5

Spécialités : SVT, SES

Vers le sup : Économie

6 TP Modèle de Verhulst continu

➡ **Objectif : Utilisation de l'équation différentielle logistique en économie.**

A ▶ Du discret au continu

On note $N(t)$ la population de la Terre à l'instant t mesuré en secondes. On considère, aux vues du grand nombre de personnes au monde (par exemple 139 millions de naissances en 2014), que l'accroissement de la population par seconde est constant, c'est-à-dire que $N(t+k) - N(t) = k(N(t+1) - N(t))$.

1. Que peut-on dire de $\dfrac{N(t+h) - N(t)}{h}$ quand h tend vers 0 ?

On suppose que les taux de naissances (noté α) et de décès (noté β) sont proportionnels à la taille de la population.

2. Exprimer $N'(t)$ en fonction de $N(t)$, α et β.
Résoudre l'équation différentielle.
Quel modèle d'évolution reconnaissez-vous ?
Établir le modèle de Verhulst continu à partir du modèle de Verhuslt discret.

B ▶ En économie

En mars 2019, deux ingénieurs ont mis au point un produit alimentaire révolutionnaire composé pour l'essentiel d'insectes. Ils sont parvenus à créer leur start-up et à commercialiser le produit. Devant le succès croissant de ce produit, la société a décidé de se développer en formant un réseau de franchises. Elle prévoit que le nombre de franchises croîtra de façon logistique avec un taux de croissance intrinsèque r égal à 0,4 et une capacité maximale de franchises K égale à 1 000 (fixée par la législation en vigueur). L'objectif est de retrouver l'expression de la fonction logistique associée.

1. On compte initialement 100 franchises. En notant $N(t)$ le nombre de franchises à la date t, écrire l'équation différentielle logistique associée.

2. On suppose que, pour tout t, $N(t)$ est non nul. On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

Vérifier que $P'(t) = \dfrac{-N'(t)}{N^2(t)}$ puis montrer que P est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$.

En déduire l'expression de $P(t)$, puis celle de $N(t)$.

Montrer que les solutions sont les fonctions de la forme $N(t) = \dfrac{1\,000}{1 + 9e^{-0{,}4t}}$.

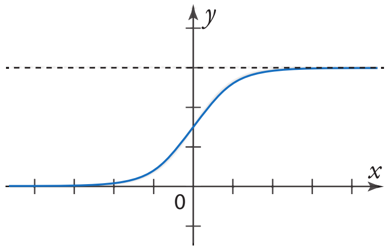
3. Combien de temps faudra-t-il pour que la société puisse compter 500 franchises ?

C ▶ Comportement des fonctions logistiques

Soit $K > 0$ et $r > 0$.

1. Montrer que $f(t) = K\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}$ est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$



2. Pour chacune des constantes suivantes, représenter les solutions. Que constate-t-on ?

$K = 15$, $r = 0{,}6$ et $y_0 = 20$ $\qquad$ $K = 15$, $r = 1{,}9$ et $y_0 = 14$ $\qquad$ $K = 15$, $r = 2{,}4$ et $y_0 = 12$.

Histoire des Maths | Algo | 50 min

7 TP Modèle proie prédateur

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Spécialité : SVT
Vers le sup : Biologie

➡ **Objectif : Établir un modèle proie prédateur à partir des données observées puis l'appliquer.**

A ▸ Évolution d'une population de lapins sans prédateur

« Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ? »

Leonardo Fibonacci – *Liber Abaci* – 1202

On note L_n le nombre de couples de lapins à la fin du n-ième mois et on précise que le premier couple est à son 1er mois d'existence.

1. À partir de combien de temps un couple devient fertile ? Combien de temps dure une gestation ?

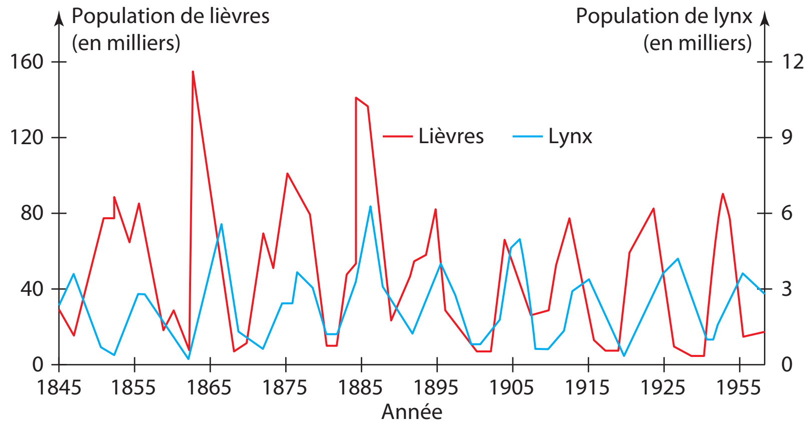
2. a) Justifier que $L_1 = 1, L_2 = 1$ et $L_3 = 2$.
b) Déterminer les huit premiers termes de la suite.

3. Exprimer L_{n+2} en fonction de L_n et L_{n+1}.

4. Représenter cette suite. Décrire l'évolution de la population de lapins.

B ▸ Évolution de la population du lièvre et du lynx dans la baie de Hudson

La compagnie de la baie de Hudson a réalisé des comptages de lièvres et de lynx entre 1845 et 1955.



1. Étudier l'évolution de la population des lièvres puis des lynx. Interpréter avec le contexte.

On note (u_n) la population des lynx et (v_n) la population des lièvres à l'année n. La population au temps $n + 1$ est la population au temps n auquel on ajoute les naissances et on ote les décès.

2. En l'absence de lynx, on suppose que les lièvres prolifèrent sans décès. On note a ($a > 0$) le taux de reproduction des lièvres sous forme décimale entre les années n et $n + 1$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

3. En l'absence de lièvre, on suppose que les lynx déperissent sans naissance. On note c le taux de mortalité sous forme décimale des lynx entre les années n et $n+1$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

4. On suppose que le taux de mortalité des lièvres est proportionnel au nombre de lynx et que le taux de natalité des lynx est proportionnel aux nombres de lièvres. Comment exprimer le taux de mortalité des lièvres et le taux de natalité des lynx ?

5. Expliquer le système de suites suivant où a, b, c, d sont des constantes positives

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1 - c)u_n + du_nv_n & \text{lynx} \\ v_{n+1} = (1 + a)v_n + bu_nv_n & \text{lièvres} \end{cases}$$

6. Les études biologiques montrent :
- qu'en l'absence de lynx, la population des lièvres augmentent de 5 % ;
- qu'en l'absence de lièvre, la population de lynx diminue de 3 %.

On suppose de plus que $b = 0{,}001$ et $d = 0{,}0002$.
Proposer une feuille de tableur permettant de calculer le n-ième terme des deux suites.

7. Représenter sur un même graphique les suites u_n et v_n en fonction de n pour $n = 0$ à $n = 450$. Comparer les résultats avec la question **1**.

Thème 3 Approche historique de la fonction logarithme

45 min

Contenus associés :
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie

1 Tables d'intérêt

➡ **Objectif : Déterminer une méthode rapide pour trouver le nombre d'années permettant de multiplier par *k* un capital donné.**

A ▶ Soit un capital C placé à un taux t d'intérêts composés. On cherche une méthode rapide pour déterminer approximativement le nombre d'années permettant de tripler ce capital.

1. a) Soit la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x).$$

Calculer $h'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de h sur $]-1\,;+\infty[$.

c) En déduire le signe de h sur $]-1\,;+\infty[$.

2. a) Soit la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-\ln(1+x).$$

Calculer $g'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de g sur $]-1\,;+\infty[$.

c) En déduire le signe de g sur $]-1\,;+\infty[$.

3. À l'aide des questions **1.** et **2.**, montrer que, pour tout $x\geqslant 0$:

$$x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x.$$

4. Pour des petites valeurs de x on peut considérer que $\ln(1+x)\approx x$ avec un majorant de l'erreur égal à $\frac{x^2}{2}$.

Expliquer pourquoi, afin de calculer mentalement le nombre d'années permettant de tripler un capital, on peut utiliser la règle : « Un capital triple au bout de $\frac{110}{t}$ années, avec t le taux d'intérêts, valable pour de petites valeurs de t. »

B ▶ On rappelle qu'un capital C placé à un taux de t % en composition annuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C\times\left(1+\frac{t}{100}\right)$; un capital C placé à un taux de t % en composition mensuelle signifie qu'au bout d'une année le nouveau capital est $C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{12}\right)}{100}\right)^{12}$.

1. En prenant $t = 5$ % et $C = 1\,500$ €, comparer les deux types de placements précédemment décrits.

2. En finance, on utilise le taux d'intérêt continu. On peut l'imaginer comme étant une périodicité infiniment petite. Soit un capital C placé à un taux de t % en composition sur une période m ; le capital C' au bout d'une année sera $C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^m$.

a) En utilisant le résultat $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$ expliquer pourquoi $\lim\limits_{m\to+\infty}C\times\left(1+\frac{\left(\frac{t}{m}\right)}{100}\right)^m=C\mathrm{e}^{\frac{t}{100}}$.

b) Avec un placement à intérêt continu, quel doit être le taux d'intérêt afin de pouvoir doubler son capital en un an ?

c) De façon générale, avec un placement à intérêt continu, quel doit être le taux d'intérêt afin de :
- multiplier par k son capital en un an ? Le taux d'intérêt trouvé dépendra de k.
- augmenter son capital de 70 % au bout de 5 ans ?

45 min

Contenus associés :
- Limites et continuité .... Chapitre 2

2 Relation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$

Objectif : **Découvrir une autre approche de la fonction ln.**

On cherche à déterminer les fonctions qui vérifient la relation fonctionnelle suivante :

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

A ▸ Recherche de solutions particulières

Parmi les fonctions suivantes, quelles sont celles qui vérifient la relation fonctionnelle ci-dessus ?

a) La fonction nulle.
b) La fonction linéaire $y = x$.
c) La fonction carrée.

B ▸ Recherche de quelques propriétés

1. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle, si elle est définie en 0, que vaut $f(0)$?
Montrer que, dans ce cas, il s'agirait nécessairement de la fonction nulle.

Coup de pouce $f(0) = f(0 \times 0)$

2. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle, montrer que :

$$f(1) = 0.$$

3. Quelle condition doit avoir une fonction vérifiant cette relation fonctionnelle afin d'être paire ?

4. Quelle que soit la fonction qui vérifie cette relation fonctionnelle :

a) Montrer que, pour $x \neq 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Coup de pouce $f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right)$

b) En déduire le signe de cette fonction dans le cas où f est paire.

Coup de pouce Faire une démonstration par disjonction de cas (si $x > 1$…).

5. Montrer par récurrence que $f(x^n) = n \times f(x)$.

C ▸ Cas particuliers des fonctions continues

On suppose dans la suite de l'activité que la fonction vérifiant cette relation fonctionnelle est non nulle et continue.
On considèrera les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $h > 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}.$$

3. En déduire que $f'(x) = f'(1)\ \frac{1}{x}$.

D ▸ Cas particulier de la fonction continue sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant $f'(1) = 1$

1. À l'aide de la réponse à la question précédente, déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Avec le même type de raisonnement, en déduire le signe de f selon les valeurs de x.

3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Coup de pouce
- Prendre $x = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(2^n) = +\infty$.
- Pour la limite en 0, utiliser $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Remarque On appelle ln la fonction vérifiant ces conditions.

Thème 3

Algo 45 min

Contenus associés :

- Limites et continuité .... Chapitre 2
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4

3 TP Approximation de ln 2 par dichotomie

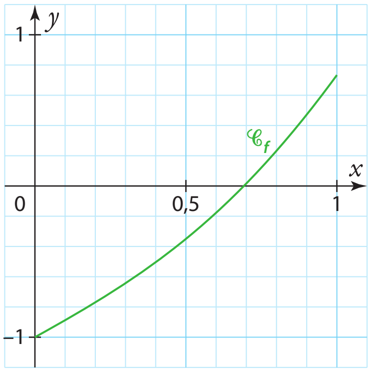
➡ **Objectif : Déterminer une valeur approchée de ln 2 à une précision 10^{-p} près, $p \in \mathbb{N}$.**

La méthode utilisée sera la méthode par dichotomie qui repose sur le théorème suivant.

▶ **Théorème** Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\,;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Il existe alors une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.

Dans la suite, on notera f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = e^x - 2.$$



1. Écrire la fonction **Python** `f` de paramètre un flottant `x` correspondant à la fonction numérique `f` mentionnée ci-dessus et qui retourne donc `e**x–2` (une ligne de code).

2. a) Écrire la fonction **Python** `Dicho` ayant pour paramètres des flottants `a` et `b`, une fonction `f` (vérifiant les hypothèses du théorème énoncé) et un entier naturel `n` qui retourne une valeur approchée de α, solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-p} près, à partir du programme incomplet écrit ci-dessous.

```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a>...:
        m=(a+b)/2
        if f(m)...:
            a=...
        else :
            b=...
    return...
```

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) En déduire une valeur approchée de ln 2 à 10^{-5} près à l'aide de la fonction `Dicho`, en saisissant sur la console `Dicho(a,b,f,n)` en ayant pris le soin de remplacer a, b et n par les valeurs adéquates.

3. a) Modifier le programme **Python** de façon à le rendre plus performant et qu'il puisse être également utilisé dans le cas d'une fonction non nécessairement croissante.

b) Le tester dans le cas où $f(x) = 2 - e^x$, la fonction f est ainsi décroissante, mais la solution de l'équation $f(x) = 0$ est toujours ln 2.

```
from math import*
def f(x):
    return...
def Dicho(a,b,f,n):
    while b-a>...:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(b)>0:
            a=...
        else :
            b=...
    return...
```

TICE | Algo | Histoire des maths | 45 min

Contenu associé :
• Fonction logarithme népérien .....Chapitre 4

4 TP Algorithme de Briggs

➡ **Objectif : Construire une table des logarithmes décimaux.**


Napier

Henry Briggs (1556-1630) est un mathématicien anglais qui fut coinventeur, avec John Napier, alias Neper, des logarithmes décimaux. On donne ci-dessous une description de sa méthode permettant de trouver une valeur approchée de log 5.
Cette méthode de Briggs a permis de construire la table des logarithmes décimaux publiée en 1624 et expliquée par Euler en 1748.

A ▸ Explication de la méthode de Briggs par Euler

DOCUMENT Table des logarithmes lienmini.fr/maths-t03-01

1. Télécharger la table des logarithmes à l'aide du lien ci-contre.

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui est celle des tables ordinaires, et proposons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre est renfermé entre les limites 1 et 10, dont les logarithmes sont 0 et 1, on procédera de la manière suivante à l'extraction des racines, et on continuera les opérations jusqu'à ce qu'on soit arrivé à des limites, qui ne diffèrent plus du nombre proposé 5.
Ainsi, en prenant des moyennes proportionnelles, on est parvenu à trouver Z = 5,000 000 ; à quoi répond le logarithme cherché 0,678 970 ; en supposant la base logarithmique $a = 10$.
Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à-peu-près. C'est de cette manière que Briggs et Ulacq ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.
Leonhard Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale.*

2. On appelle moyenne géométrique c de deux nombres a et b, le nombre c vérifiant $c = \sqrt{ab}$.
À partir de C, tous les nombres de la 1re colonne correspondent à des moyennes géométriques de deux nombres, expliquées en 3e colonne (ex. $\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{AB}}$), et tous les nombres de la 2e colonne correspondent à la moyenne arithmétique des deux nombres correspondants dans la 2e colonne (ex. $\log C = \dfrac{\log A + \log B}{2}$ où lC correspond à $\log C$).
La suite formée par les moyennes géométriques en 1re colonne converge vers 5 et la suite formée par les moyennes arithmétiques en 2e colonne converge vers log 5.
Avec cette méthode, détailler le calcul permettant d'obtenir le nombre D puis lD.

3. Le processus semble identique de C à F ; pourquoi diffère-t-il pour le calcul de G ?

4. Après plusieurs itérations de la méthode, on se rapproche du nombre 5 avec Z et une valeur approchée de log 5 est lZ.
Expliquer alors pourquoi il apparaît dans le texte la phrase :
« Par conséquent, $10^{\frac{69\,897}{100\,000}} = 5$ à peu près. »

B ▸ Construction de la table à l'aide d'un algorithme

1. On veut que l'algorithme ci-contre permette de déterminer une valeur approchée de log 5, avec une précision de 10^{-5} près. Par quelles valeurs faudrait-il alors remplacer x et p ?

2. Programmer cet algorithme en langage **Python** et vérifier que l'on retrouve effectivement la valeur approchée de log 5 annoncée dans la table de la partie **A**.

Coup de pouce Lors de la saisie de cet algorithme, il faudra :
① importer le module `math`.
② utiliser `math.sqrt` pour la racine carrée.

```
A ← 1
B ← 10
lA ← 0
lB ← 1
Tant que B − x > 10^−p faire
    Si √AB ≤ x alors
        A ← √AB
        lA ← (lA + lB)/2
    Sinon
        B ← √AB
        lB ← (lA + lB)/2
    Fin si
Fin du Tant que
Afficher lB
```

TICE Algo Histoire des maths 45 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien ..... Chapitre 4

5 TP Raréfaction des nombres premiers

➡ **Objectifs : Faire le lien entre la raréfaction des nombres premiers et la fonction ln.**

Au XIX^e siècle, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) a réussi à démontré la raréfaction des nombres premiers : plus le nombre entier naturel n est grand, plus la proportion $\frac{\pi(n)}{n}$, avec $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n, est petit et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Sa démonstration repose sur une approximation de $\pi(n)$, à savoir $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$.
Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), aurait découvert également cette relation à l'âge de 15 ans, en 1792.

Gauss

1. On donne ci-dessous un tableur dans lequel on peut lire : n un nombre entier naturel, $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n et $E(n) = \frac{n}{\pi(n)}$.

	A	B	C	D
1	***n***	$\pi(n)$	$E(n)$	
2	10	3	3,333333333	
3	100	25	4	0,666666667
4	1000	168	5,952380952	1,952380952
5	10000	1229	8,136696501	2,184315549
6	100000	9592	10,42535446	2,288657961
6	1000000	78498	12,73917807	2,313823606
6	10000000	664579	15,04712006	2,307941988
6	100000000	5761455	17,35672673	2,309606673

a) Retrouver mentalement la valeur de la cellule B2.
b) À partir de la cellule B3, la détermination de nombre premiers inférieurs à n est plus longue ; retrouver les valeurs des cellules B3 à B6 à l'aide d'un programme **Python**.
Compléter à cet effet le programme ci-après.

```
from math import*
def test_premier(N):
      b=0
      if N==1 :
            b=1
      else :
            for i in range(…,…):
                  if N%i==…:
                        b=1
      return …
def nom_nombres1ers(M):
      compteur=0
      for i in range(2,…):
            n=test_premier(i)
            if n==0 :
                  compteur=…
      return …
```

2. Télécharger la feuille de calculs de la question **1.** à partir du lien ci-contre.

TICE
Fichier Excel
lienmini.fr/maths-t03-02

a) Quelle formule doit-on saisir en C2 et copier glisser vers le bas ?
b) Quelle formule doit-on saisir en D3 et copier glisser vers le bas afin de calculer la différence de deux termes successifs ?
c) Compléter les colonnes C et D.
La suite $E(n)$ semble avoir un comportement qui se rapproche d'une suite (u_n). Quelle est la nature de cette suite ?
d) Soit (v_n) la suite définie par la colonne A, on a $v_1 = 10$; $v_2 = 100$…
Quelle est la nature de cette suite ?
On observe ainsi un lien entre une suite géométrique et une suite arithmétique, l'idée de la transformation d'un produit en somme, d'où la conjecture d'une progression arithmétique dont la raison serait de la forme $\ln(a)$.
e) Compte-tenu de la raison déterminée pour la suite (v_n), conjecturer la raison de la suite (u_n).
f) Vérifier cette conjecture à partir des valeurs obtenues à l'aide du tableur.

3. Rajouter en colonne E le calcul de $\ln(n)$ et vérifier le résultat découvert par Legendre et Gauss.

Calculs d'aires

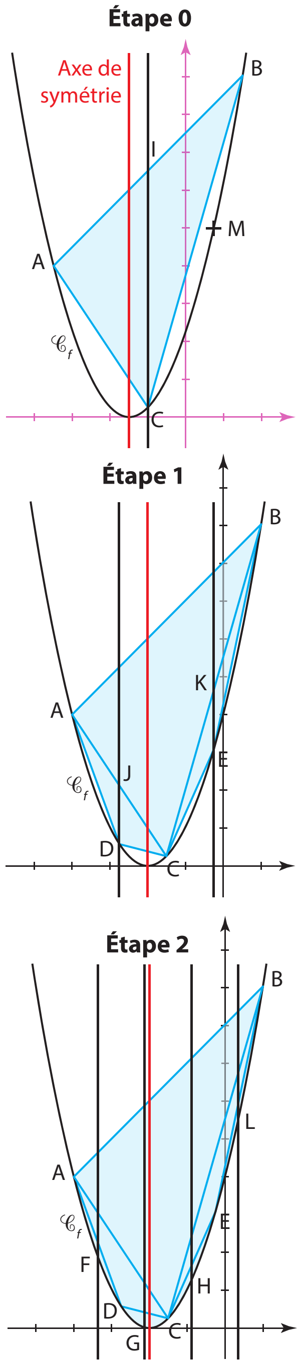
Thème 4

Histoire des maths TICE 55 min

Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Calcul intégral .... Chapitre 6

1 TP Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

➡ **Objectif : Comprendre l'algorithme qui approche l'aire du secteur parabolique à l'aide de triangles. Démontrer la formule à l'aide des suites géométriques.**



A ▸ Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

Soit la parabole d'équation $y = (x + 2)^2$ et A et B les points de la parabole d'abscisses respectives – 4 et 1.

1. À l'aide de GeoGebra, tracer cette parabole, placer les points A, B et I le milieu de [AB].

2. Placer C le point de la parabole et de la droite passant par I et parallèle à l'axe de symétrie de la parabole.
Quelle est la valeur de l'aire de ABC (noté a_0) affichée par le logiciel ?

3. Créer un point M libre sur la parabole et afficher l'aire du triangle ABM. Vérifier que ABC est bien le triangle de base [AB] d'aire maximale.

4. Calculer $\frac{4}{3}a_0$ et comparer ce nombre à l'aire $\mathscr{A}$ du secteur bleu clair.

B ▸ Démonstration de l'égalité $\mathscr{A} = \frac{4}{3}$ Aire (ABC)

Archimède démontre ce résultat : il approche l'aire $\mathscr{A}$ en construisant une suite (a_n) des sommes d'aires de triangles construits à l'intérieur de ce domaine.

1. On recommence le procédé de construction de triangles (vu en **A**) avec les deux secteurs de parabole de bases [AC] et [CB].
a) Tracer les triangles ACD et CBE d'aire maximale dans ces deux secteurs et constater que ACD et CBE ont la même aire.
b) On note a_1 la somme des aires de ces deux triangles. Vérifier que $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.
c) On contruit les triangles d'aire maximale dans chacun des secteurs de parabole de bases [AD], [DC], [CE] et [EB]. On note a_2 la somme des aires de ces quatre triangles.
Calculer l'aire des quatre triangles puis $\frac{a_1}{a_2}$.
d) On note (a_n) l'aire des triangles obtenus à l'étape n. Quelle semble être la nature de la suite (a_n) ?
e) Que représente $a_0 + a_1 + \dots + a_n$?

2. Quelle que soit la parabole, on peut construire avec le même procédé de tels triangles. On note a_0 l'aire de ABC et a_n la somme des aires des triangles construits à l'étape n. On admet que la suite (a_n) est toujours une suite géométrique de même raison q.
a) D'après l'exemple précédent, préciser la raison q puis exprimer a_n en fonction de a_0 et n.
b) Exprimer $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ en fonction de a_0 et n.
c) Déterminer $\lim_{n\to\infty}(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ et conclure que $= \frac{4}{3}a_0$.

Thème 4

Histoire des maths | TICE | 30 min

2 TP Quadrature de l'hyperbole

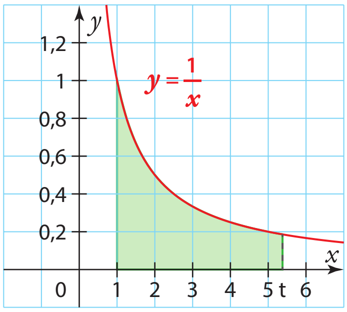
Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Fonction logarithme népérien .... Chapitre 4
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5
- Calcul intégral .... Chapitre 6

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique

➡ **Objectif : Étudier des algorithmes permettant de calculer l'intégrale de la fonction inverse.**

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et t un réel supérieur à 1. On note $I(t)$ l'aire sous la courbe de la fonction f entre 1 et t.



A ▸ Méthode de Grégoire de Saint-Vincent

1. Montrer que pout tout $t \geqslant 1$, $I(t) = \ln t$.

2. On considère la suite (t_n) géométrique de raison 2 et de premier terme $t_0 = 1$.

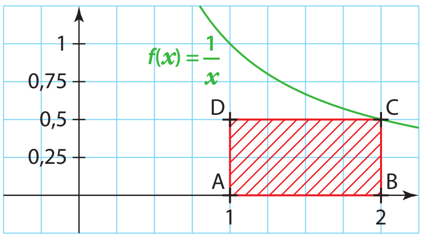
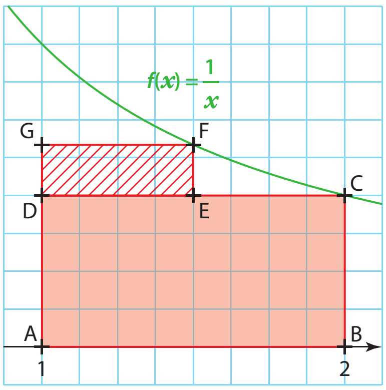
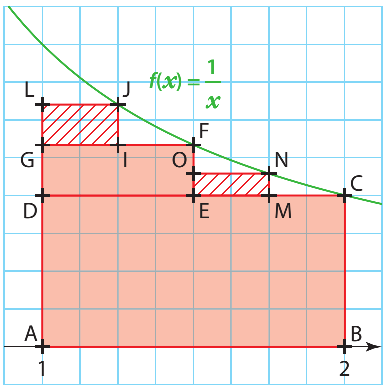
a) Donner l'expression de t_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.

b) Monter que $I(t_{n+1}) = I(t_n) + \ln 2$. Quelle est la nature de la suite $I(t_n)$?

c) Expliquer la phrase de Grégoire de Saint Vincent : « Si les abscisses d'une hyperbole équilatère croissent en progression géométrique, les aires des surfaces découpées entre l'hyperbole et son asymptote par les lignes ordonnées correspondantes croissent en progression arithmétique ».

B ▸ Calcul d'une valeur approchée de ln 2 par la méthode de Brouncker

Lord William Brouncker (1620-1680) propose d'approcher $I(2) = \ln 2$ par des aires de rectangles situés sous l'hyperbole.

Étape 1	Étape 2	Étape 3
 A(1 ; 0) B(2 ; 0) C(2 ; 0,5) D(1 ; 0.5)	 E est le milieu de [DC] F appartient à l'hyperbole	 I et M sont les milieux de [GF] et [EC] J et N appartiennent à l'hyperbole

1. a) En suivant le même procédé, combien de rectangle devrait-on construire à l'étape 4 ?

b) Calculer l'aire des rectangles ABCD, DEFG, GIJL et EMNO.

c) Montrer que chaque aire de rectangle peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2i\quad(2i\ -\ 1)}$ avec i un entier que l'on précisera.

d) Donner une estimation de ln2.

2. On admet que les n premiers rectangles construits vont tous avoir une aire de la forme $\frac{1}{2i\quad(2i\ -\ 1)}$ avec i entier compris entre 1 et n.

a) Écrire un programme en **Python** permettant de calculer la somme des n premiers rectangles.

b) Exécuter le programme pour $n = 100$. Que constate-t-on ?

TICE 30 min

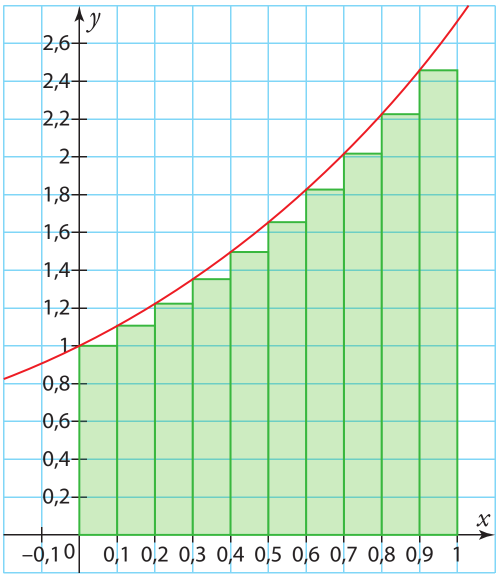
Contenus associés :
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1

Vers le sup :

3 TP Approximation de l'air sous la courbe de la fonction exponentielle

➡ **Objectif : Approcher l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle.**

Soit f la fonction définit sur $[0\ ,\ 1]$ par $f(x) = e^x$. On souhaite approcher l'aire sous la courbe entre 0 et 1.



1. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en 10 intervalles de même amplitude. On définit une suite de rectangles inférieurs comme ci-contre. La figure est composée de 10 rectangles, on note U_{10} l'aire des rectangles inférieurs.

a) Quelle est la largeur de chaque rectangle ?

b) Quelles sont les longueurs des deux premiers rectangles ?

c) Écrire U_{10} en fonction de f puis donner une valeur approchée de U_{10} à 10^{-2}.

2. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en n intervalles de même amplitude et on construit la suite des rectangles inférieurs.

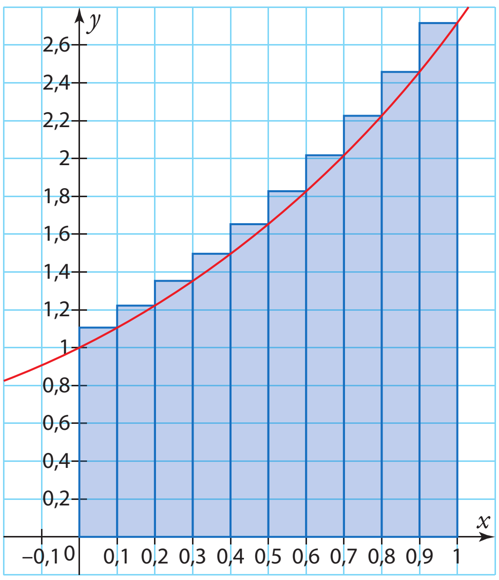
a) Écrire U_n en fonction de n et de f.

b) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note (u_m) la suite définit pour $m \geqslant 0$ par $u_m = (e^{\frac{1}{n}})^m$. Quelle est la nature de la suite (u_m) ?

c) Calculer $u_0 + u_1 + \ldots + u_9$ et déterminer U_{10}.

d) Exprimer U_n en fonction de u_m puis exprimer U_n en fonction de n.

3. On partage l'intervalle $[0\ ,\ 1]$ en 10 intervalles de même amplitude. On définit une suite de rectangles supérieurs comme ci-contre. La figure est composée de 10 rectangles, on note V_{10} l'aire des rectangles supérieurs.



a) Exprimer V_{10} en fonction de U_{10}. Donner une valeur approchée de V_{10} à 10^{-2} près.

b) Déterminer la monotonie des suites (U_n) et (V_n).

c) Exprimer la suite $(V_n - U_n)$ en fonction de n puis déterminer sa limite. Les suites (U_n) et (V_n) sont appelées suites adjacentes.

4. On appelle erreur de mesure la suite, notée (E_n), définit par la différence entre l'aire exacte $\mathscr{A}$ et l'aire approchée par la suite (U_n). On définit de même (F_n) par la différence entre l'aire exacte $\mathscr{A}$ et l'aire approchée par (V_n).

a) Calculer E_{10} et F_{10}.

b) Déterminer n pour que l'erreur de mesure E_n, soit inférieure à 10^{-5}.

c) Déterminer n pour que l'erreur de mesure V_n soit inférieure à 10^{-5}.

d) On note (W_n) la suite définit par $W_n = \dfrac{U_n + V_n}{2}$. Déterminer n pour que l'erreur de mesure soit inférieur à 10^{-5}.

Thème 4

4 TP

TICE 45 min

Estimation de l'aire sous la courbe par la méthode de Monte-Carlo

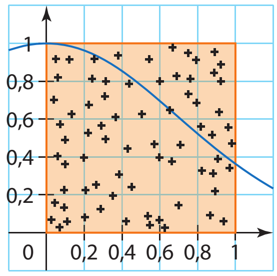
Contenus associés :
- Calcul intégral .... Chapitre 6
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique

➡ **Objectif : Estimer l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle [0 ; 1].**

A ▸ Interprétation de la situation



On considère le carré C de côté 1 et le domaine hachuré D sous la courbe de la fonction *f* comme illustré ci-contre.

Soit M(*x*, *y*) un point situé à l'intérieur du carré C.

1. À quelles conditions portant sur x et y, le point M :

a) est-il à l'intérieur du carré C ?

b) est-il à l'intérieur du domaine D ?

2. Une expérience aléatoire consiste à placer au hasard un point M à l'intérieur du carré C.

a) Quelles sont les issues possibles de cette expérience aléatoire ?

b) Montrer que la probabilité que ce point appartienne au domaine D est donnée par $p = \dfrac{\text{Aire (D)}}{\text{Aire (C)}}$.

c) Justifier alors que cette probabilité *p* est égale à $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

3. On répète *n* fois cette expérience aléatoire de façon indépendante. On compte le nombre *N* de fois où le point M appartient au domaine D.

a) Quelle est alors la fréquence f_M de l'événement « M appartient au domaine D » ?

b) Quel lien existe-t-il entre la probabilité *p* et la fréquence f_M ?

B ▸ Simulation

1. L'algorithme ci-contre permet de simuler *n* fois cette expérience aléatoire et de compter le nombre de fois où le point M appartient au domaine D.

```
n←?
S←0
Pour i allant de 1 à …
    x←Nombre aléatoire entre 0 et 1
    y←Nombre aléatoire entre 0 et 1
    Si y⩽ …
        alors S←S+1
    Fin si
Fin Pour
Afficher S
```

La valeur de *n* est saisie par l'utilisateur.

a) Compléter l'algorithme.

b) Quel est le résultat obtenu en sortie ?

c) Adapter l'algorithme pour que S soit une valeur approchée du domaine D.

2. a) Compléter le programme **Python** ci-contre, traduction de l'algorithme précédent.

```python
from math import *
from random import *
N = ................
C = 0
for k in range (N):
    x = ................
    y = ................
    if y < = exp(- x ** 2):
        C = C + 1
resultat = C/N
print (resultat)
```

b) Quelle est la valeur obtenue pour *n* = 1 000 ? En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

c) Après plusieurs essais, obtient-on toujours la même valeur ? Sinon, comment l'expliquer ?

d) Trouver une valeur de *n* pour laquelle on obtient les trois premières décimales de façon stable.

5 Approximation de π par les aires

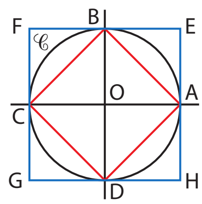
Contenus associés :

- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Calcul intégral .... Chapitre 6

➡ **Objectif : Effectuer une approximation de l'aire du cercle par des polygones inscrits et exinscrit.**

Dans « *L'art mathématique en neuf chapitres* », le mathématicien chinois Liu Hui (220 – 280) donne une valeur approchée du nombre irrationnel π, en encadrant l'aire d'un disque unité entre les aires de deux polygones réguliers. Le premier polygone est inscrit dans le cercle et a donc une aire inférieure à π, le second est exinscrit, son aire est donc supérieure à π.

A ▸ Entre deux carrés



Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. On considère le carré ABCD inscrit dans le cercle et le carré EFGH tangent au cercle en A, B, C et D.

1. Calculer la longueur AB.

2. Calculer les aires des deux carrés puis en déduire un premier encadrement de π.

B ▸ Entre deux hexagones réguliers

Ci-dessous, l'hexagone ABCDEF est inscrit dans $\mathscr{C}$ (**Figure ①**). L'hexagone IJKLMN est exinscrit, soit tangent à $\mathscr{C}$ en A, B, C, D, E et F. (**Figure ②**)

Figure ①

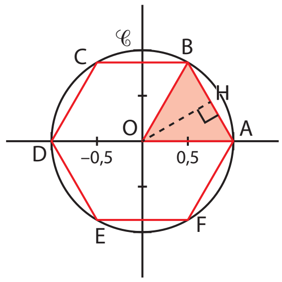
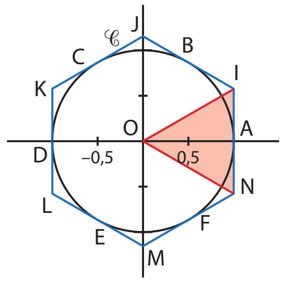


Figure ②



1. En se plaçant dans AOH, montrer que

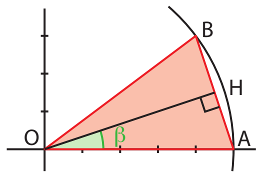
$\mathrm{OH} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\mathrm{AH} = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

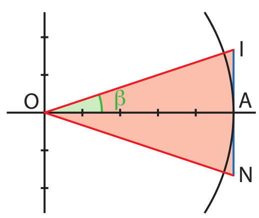
En déduire l'aire du triangle OAB, puis de l'hexagone ABCDEF.

2. Montrer que $\mathrm{AI} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$. Quelle est l'aire de l'hexagone IJKLMN ?

3. En déduire un nouvel encadrement de π.

C ▸ Généralisation avec deux polygones réguliers à *n* côtés





1. Le polygone à n côtés inscrit est composé de n triangles isocèles identiques à OBA. En se plaçant dans OAH, calculer OH et HA puis l'aire de OAB en fonction de β.

2. Le polygone à n côtés exinscrit est composé de n triangles isocèles identiques à OIN. En se plaçant dans OAI, calculer AI puis l'aire de OIN en fonction de β.

3. En déduire l'encadrement : $n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \leqslant \pi \leqslant n\tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

4. Plus on augmente le nombre de côtés des polygones, plus l'encadrement sera précis. Liu Hui a utilisé deux polygones réguliers de 96 côtés.
Donner l'encadrement obtenu avec 96 côtés puis une valeur approchée de π en faisant la moyenne des deux bornes de l'encadrement.

Thème 5 Répartition des richesses, inégalités

Contenus associés :
- Convexité .... Chapitre 3
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie, Sociologie

TICE 55 min

1 TP Courbe de Lorenz

➡ **Objectif :** Obtenir une courbe de Lorentz pour évaluer des inégalités.

A ▸ Exemple 1 : revenu disponible par ménage selon la tranche de revenu

Tranche de revenu annuel disponible	Limite supérieure de tranche (décile)	Revenu annuel moyen	Nombre d'unités de consom. moyen par ménage
< à D1	13 630	10 030	1,11
De D1 à D2	17 470	15 630	1,15
De D2 à D3	21 120	19 280	1,24
De D3 à D4	25 390	23 210	1,36
De D4 à D5	30 040	27 680	1,49
De D5 à D6	35 060	32 470	1,61
De D6 à D7	41 290	38 080	1,73
De D7 à D8	49 350	45 070	1,82
De D8 à D9	63 210	55 300	1,89
> D9	///	96 240	1,97

Champ : France métropolitaine, ménages dont le revenu est déclaré au fisc est positif ou nul et dont la personne de référence n'est pas étudiante.
Lecture : en 2015, les 10 % de ménages dont le revenu est compris entre 17 470 euros (D2) et 21 120 euros (D3) ont un revenu annuel disponible moyen de 19 280 euros.

Sources : Insee-DGFiP-Cnaf-Cnav-CCMSA, enquête Revenus fiscaux et sociaux, 2015

1. Le lien suivant permet de télécharger le tableau du revenu disponible par ménage selon la tranche de revenu, en 2015 et en euros.

Télécharger le tableau et le compléter en calculant pour chacune des tranches de déciles :

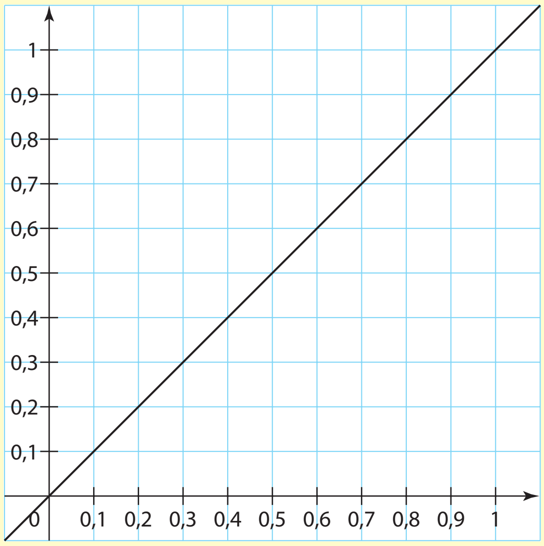
DOCUMENT Tableau du revenu disponible lienmini.fr/maths-t05-01

– le pourcentage de la masse totale des revenus disponibles (on vérifiera que le total des revenus annuels est de 362 990 euros) ;
– le cumul du pourcentage de la masse totale des revenus disponibles.

Coup de pouce

Les 10 % des ménages ayant un revenu disponible compris entre D4 et D5 ont un revenu annuel moyen de 27 680 euros, ce qui représente un pourcentage de $\frac{27\,680}{362\,990}$ 100 de la masse totale des revenus.

2. Représenter sur le tableur et sur le graphique ci-dessous le pourcentage cumulé de la masse totale des revenus disponibles en fonction des pourcentages des déciles correspondants. Joindre les points par des segments.



Dans ce type de graphique où les abscisses sont les déciles (cumul croissant de fréquences) et les ordonnées les parts d'une grandeur étudiée (cumul croissant de pourcentages), les courbes obtenues s'appellent des **courbes de Lorenz**. Elles mettent en évidence la répartition de la grandeur étudiée pour permettre des comparaisons.

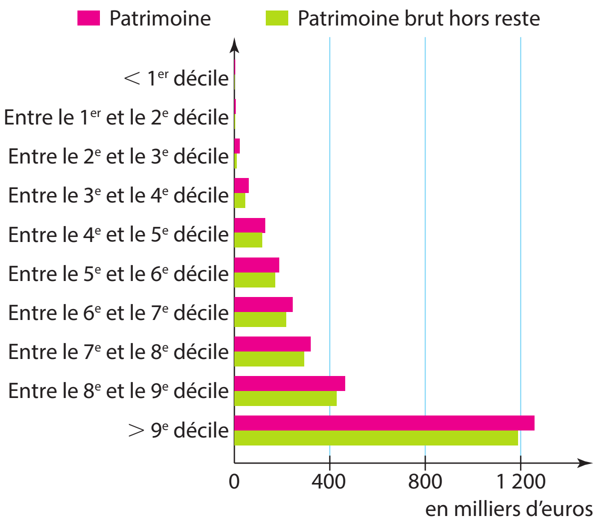
3. a) Quelle est l'interprétation de la diagonale du graphique ?
b) Quelle interprétation peut-on donner de l'éloignement de la courbe de Lorenz des revenus disponibles avec la diagonale ?

4. Une courbe de Lorenz est ajustée par une fonction f vérifiant les quatre conditions suivantes :
• f est définie sur l'intervalle [0 ; 1] (attention aux pourcentages compris entre 0 et 1) ;
• f est croissante sur [0 ; 1] et $f(x) \leqslant x$ pour $x \in [0\,;1]$;
• f est convexe ;
• $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On reprend l'étude du revenu disponible :
On considère la fonction $f(x) = 0{,}92x^2 + 0{,}08x$ avec $x \in [0\,;1]$.
Vérifier que cette fonction constitue un bon ajustement du revenu disponible et qu'elle correspond aux conditions d'une courbe de Lorentz.

5. À l'aide du tableur, trouver une fonction d'ajustement de tendance exponentielle, polynomiale.
• Ouvrir une feuille de calcul et recopier les colonnes cumul des pourcentages de la population et cumul des pourcentages des revenus du tableau de la question **1**.
• Sélectionner ces deux colonnes puis insérer un graphique : choisir nuage de points.
• Pour obtenir une courbe d'ajustement, choisir : éléments de graphique/courbe de tendance/autres options/polynomial/afficher l'équation.

B ▶ Exemple 2 : répartition du patrimoine

Patrimoine moyen par décile en 2015



Lecture : début 2015, les 10 % des ménages aux patrimoines les moins élevés détiennent un patrimoine brut moyen de 2 000 euros et de 200 euros de patrimoine restant.

Note : le patrimoine brut correspond au montant des actifs détenus par un ménage incluant la résidence principale, les éventuelles résidences secondaires, l'immobilier de rapport – c'est-à-dire rapportant un revenu foncier –, les actifs financiers du ménage, et les actifs professionnels lorsque le ménage a une activité d'indépendant à titre principal ou secondaire. Il inclut également depuis 2010 le patrimoine « restant » : les biens durables (voiture, équipement de la maison, etc.), les bijoux, les œuvres d'art et autres objets de valeur. Des améliorations de l'enquête entraînent une rupture de série à partir de 2010 (sur échantillonnage des hauts patrimoines, collecte du patrimoine « restant »).
Champ : France (hors Mayotte) ménages ordinaires.

Source : Insee, enquête Patrimoine.

1. Recopier et compléter le tableau donnant pour chaque décile le pourcentage détenu du patrimoine.

Masse du patrimoine détenue par	Patrimoine brut moyen en milliers d'euros	En %
Inférieur à D1	2	
Entre D1 et D2	7,8	
Entre D2 et D3	21,7	
Entre D3 et D4	61,3	
Entre D4 et D5	128,5	
Entre D5 et D6	186,5	
Entre D6 et D7	245,1	
Entre D7 et D8	319,1	12
Entre D8 et D9	463,8	17
Supérieur à D9	1 254	46,7

2. Construire sur le graphique précédent de l'exemple 1 la courbe de Lorentz de cette répartition.

3. À l'aide du tableur, déterminer une fonction de tendance polynomiale ou exponentielle g pouvant rendre compte de cette courbe. (On pourra admettre pour la suite que $g(x) = 2{,}88x^3 - 1{,}88x^2 + 0{,}53x$ est une approximation convenable.)

4. Des deux répartitions (Exemple 1 (revenus)et Exemple 2 (patrimoine)), quelle est la plus inégalitaire ?

Thème 5

2 TP TICE 55 min

Un indicateur d'inégalités : le coefficient de Gini

Contenus associés :

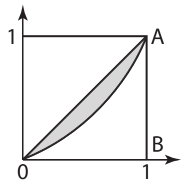
- Primitives et équations différentielles .. Chapitre 5
- Calcul intégral .... Chapitre 6

➡ **Objectif : Définir et calculer un coefficient de Gini.**

Remarque Cette activité doit être réalisée après le TP 1 dont elle utilise certaines réponses.

A ▸ Définition et calcul

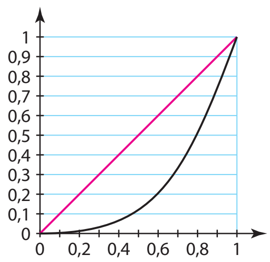
Plus la courbe de Lorentz est éloignée de la première bissectrice, plus la concentration de la grandeur étudiée est forte et la répartition inégalitaire.



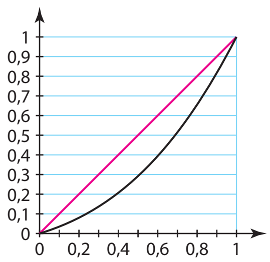
Cette concentration est mesurée par un indice appelé le **coefficient de Gini** défini par le nombre :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la concentration}}{\text{aire du triangle OAB}}$$

où l'aire de concentration est celle du domaine délimité par la courbe de Lorentz et la droite d'équation $y = x$.
Le coefficient de Gini est compris entre 0 et 1.
Si $\gamma = 0$, alors la répartition est parfaitement égalitaire.
Si $\gamma = 1$, alors la répartition est parfaitement inégalitaire.
On donne ci-dessous les courbes de Lorentz associées aux salaires de deux entreprises.



Entreprise 1



Entreprise 2

Dans quelle entreprise la répartition des salaires semble-t-elle la moins inégalitaire ?

> **Coup de pouce**
> Il faut pour cela calculer l'aire sous les courbes, c'est-à-dire les intégrales $\int_0^1 f(x)\,dx$ de chacune des deux fonctions.

B ▸ Comparaison de salaires dans deux entreprises

On reprend les courbes de Lorentz associées aux salaires de deux entreprises (partie **A**).

1. La courbe représentant l'entreprise 1 est celle d'une fonction convexe de la forme ax^3. Déterminer le signe puis la valeur du coefficient a.

2. La courbe représentant l'entreprise 1 est celle d'une fonction convexe f solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y + (2 - \mathrm{e})(1 - x) + 1$, avec $f(0) = 0$.

a) Montrer que la fonction affine $g(x) = (2 - \mathrm{e})x - 1$ est une solution particulière de (E).

b) Montrer qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si $y - g$ est solution de (E') : $y' = y$.

c) En déduire que la fonction f représentant l'entreprise 2 est $f(x) = \mathrm{e}^x + (2 - \mathrm{e})x - 1$.

3. Calculer le coefficient de Gini dans chacun des deux cas et en déduire une comparaison entre les deux entreprises.

C ▸ Comparaison de revenus des ménages

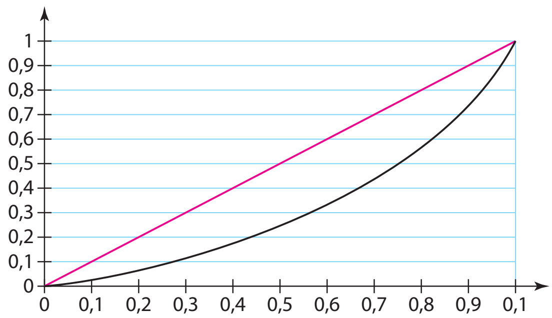
La courbe suivante rend compte de la concentration du revenu des ménages en France (*Source :* Insee, 2010).

1. Télécharger le graphique et y tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :
$f(x) = 1{,}5x^4 - 2x^3 + 1{,}4x^2 + 0{,}1x$.

a) Vérifier que la fonction f est une fonction convexe.

b) Expliquer pourquoi cette courbe est une bonne approche de la courbe de Lorentz du revenu.

> **DOCUMENT**
> Courbe revenu des ménages
> lienmini.fr/maths-t05-02



2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire le coefficient de Gini du revenu obtenu à l'aide de la courbe $\mathscr{C}$.

5

15 min

3 Mesurer des inégalités : avec des pourcentages et des indicateurs de dispersion

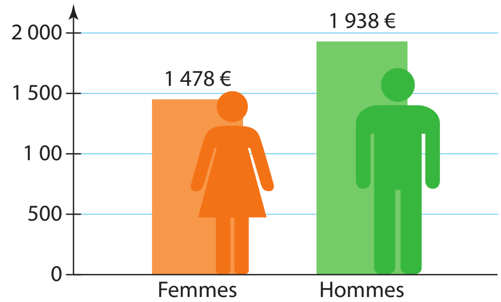
Contenus associés :
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES

Vers le sup : Économie, Sociologie

➡ **Objectif : Calculer un rapport interdécile.**

1. Dans un certain secteur d'activités on a relevé en 2015 le revenu salarial moyen par sexe .



a) Justifier l'affirmation suivante : « Les revenus salariaux féminins sont inférieurs de 24 % à ceux des hommes. »
b) De quel pourcentage faudrait-il augmenter le salaire des femmes pour que leurs revenus salariaux deviennent égaux à ceux des hommes ?

2. Calculer l'étendue puis le rapport interdécile pour chacune des distributions données dans le tableau ci-dessous.

Distribution des salaires mensuels nets de tous prélèvements en 2014

en euros courants

Déciles	Hommes	Femmes	Ensemble	F/H en %
D1	1 257	1 164	1 206	–7,4
D2	1 419	1 279	1 349	–9,9
D3	1 565	1 386	1 480	–11,4
D4	1 717	1 500	1 620	–12,6
Médiane (D5)	**1 893**	**1 636**	**1 783**	**–13,5**
D6	2 113	1 812	1 988	–14,2
D7	2 425	2 051	2 264	–15,4
D8	2 955	2 402	2 716	–18,7
D9	3 940	3 100	3 599	–21,3

Champ : salariés en équivalent temps plein du secteur privé et des entreprises publiques, y compris les bénéficiaires de contrats aidés et hors apprentis, stagiaires, salariés agricoles et salariés des particuliers-employeurs.
Lecture : en 2014, 10 % des salariés en équivalent temps-plein du secteur privé et des entreprises publiques, y compris les bénéficiaires de contrats aidés, gagnent un salaire mensuel net inférieur à 1 206 euros.

Source : Insee, 2014.

Coup de pouce

Rapport interdéciles : IDR $= \dfrac{Q_{0,9}}{Q_{0,1}}$

Rapport interquartiles : IQR $= \dfrac{Q_{0,75}}{Q_{0,25}}$

Thème 5 Répartition des richesses, inégalités

40 min

Contenus associés :
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : SES

Vers le sup : Sociologie

4 Des inégalités au niveau mondial

➡ **Objectif : Traduire des inégalités par le calcul d'indicateurs.**

On a classé dans les tableaux ci-dessous des résultats d'une étude (*source :* Unicef) portant sur les enfants en âge d'aller à l'école primaire et non scolarisés dans les pays de l'UE et dans les pays d'Afrique subsaharienne.

Étude portant sur 24 pays de l'UE

Masse des pays de l'UE	Quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés	Effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés
$<$ D1	1	
Entre D1 et D2	2	
Entre D2 et D3	2,5	
Entre D3 et D4	4	
Entre D4 et D5	5	
Entre D5 et D6	6,5	
Entre D6 et D7	10,5	
Entre D7 et D8	14,5	
Entre D8 et D9	18	
$>$ D9	67	

Étude portant sur 42 pays d'Afrique subsaharienne

Masse des pays de l'Afrique subsaharienne	Quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés	Effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) non scolarisés
$<$ D1	7	
Entre D1 et D2	45	
Entre D2 et D3	66	
Entre D3 et D4	79	
Entre D4 et D5	193	
Entre D5 et D6	357	
Entre D6 et D7	449	
Entre D7 et D8	678	
Entre D8 et D9	1022	
$>$ D9	2000	

1. Ouvrir une feuille de calcul, déterminer les effectifs cumulés de la quantité d'enfants (en milliers) en âge d'aller à l'école primaire non scolarisés.

2. Réaliser la courbe de Lorentz à partir de ces données.

3. Calculer le rapport interdéciles .

4. Des deux résultats des questions **2.** et **3.**, quel est celui qui traduit le mieux les inégalités de scolarisation entre pays de l'UE et pays d'Afrique subsaharienne ?

Inférence bayésienne

Thème 6

1 Test de dépistage d'une maladie

15 min

Contenus associés :
- Lois discrètes...Chapitre 7

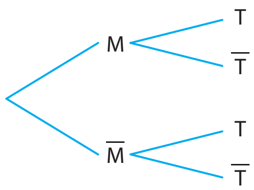
Spécialité : SVT

Vers le sup : Médecine

➡ **Objectif : Inverser une condition.**

Une maladie est présente dans la population, avec la proportion d'une personne malade sur 10 000. Le responsable d'un laboratoire pharmaceutique souhaite faire approuver un nouveau test de dépistage qui vérifie que, si une personne est malade, alors le test est positif à 99 %, et que, si une personne n'est pas malade, alors le test est positif à 0,1 %.
Pour savoir si le laboratoire peut commercialiser son test, on souhaite connaître la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.
On note M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. Donner à l'aide des événements M et T les probabilités $P(M)$, $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$

3. Calculer alors la probabilité $P(T)$ de l'événement T.

4. Exprimer la probabilité $P_T(M)$ qu'une personne soit malade si le test est positif, en fonction de $P(T)$, $P(M)$ et $P_M(T)$. Cette formule s'appelle la formule de Bayes.

La formule de Bayes a longtemps été appelée formule de probabilité des causes. Elle permet en effet de remonter le temps, c'est-à-dire de calculer la probabilité d'une cause sachant celle de sa conséquence.

5. Calculer la valeur de cette probabilité.

6. Conclure pour savoir s'il faut commercialiser ce test ou non.

2 De quelle urne vient la boule ?

15 min

Contenus associés :
- Lois discrètes...Chapitre 7

➡ **Objectif : Inverser une condition.**

On considère deux urnes : l'urne A contient 6 boules jaunes et 4 boules noires, l'urne B contient 3 boules jaunes et 5 boules noires.
On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On notera : A l'événement « l'urne choisie est l'urne A », B l'événement « l'urne choisie est l'urne B », R l'événement « la boule tirée est jaune » et N l'événement « la boule tirée est noire ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la boule tirée soit jaune.

3. Sachant que la boule tirée est jaune, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

Thème 6

25 min

3 Mails indésirables

➡ **Objectif :** Tester la pertinence de filtrages de mail.

Contenus associés :
- Lois discrètes...Chapitre 7

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique et statistiques décisionnelles, Sciences humaines

On étudie la manière dont une boîte mail va considérer qu'un mail est indésirable ou ne l'est pas.

A ▶ Premier exemple

On s'intéresse à la boîte mail d'une première internaute. On remarque que la moitié de son courrier est frauduleux et que 90 % de ses mails frauduleux contiennent le mot *urgent*. Seul 10 % du courrier non frauduleux contient ce mot. Le filtre en œuvre place tous les mails ayant le mot *urgent* dans la répertoire « Indésirables ».
Quelle est la probabilité qu'un mail contenant le mot *urgent* ne soit pas frauduleux ?

B ▶ Second exemple

On considère la boîte mail d'un second internaute, où les hypothèses sont les suivantes :
- un mail sur 200 provient d'une adresse inconnue ;
- un mail sur 800 est jugé indésirable ;
- un mail sur 5 contient le mot *urgent* et n'est pas indésirable.

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-dessous concernant l'adresse d'envoi.

Collègues	Amis	Publicité
0,4	0,1	…

Lorsque l'adresse est connue, on a les probabilités ci-dessous concernant le nombre de caractères du mail.

Inf. à 150	Entre 150 et 330	Sup. à 330
0,01	0,44	…

1. Recopier et compléter les tableaux avec les probabilités manquantes.

2. On considère un mail tiré au hasard dans cette boîte.
a) Déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un mail publicitaire provenant d'une adresse connue.
b) Lorsque l'adresse est connue, est-il plus probable de recevoir un mail indésirable entre 50 et 130 caractères ou un mail publicitaire ?

3. Sachant que le mail est indésirable, la probabilité qu'il contienne le mot *urgent* est 0,6.
a) Déterminer la probabilité qu'un mail contienne le mot *urgent*.
b) Donner alors la probabilité qu'un mail soit considéré indésirable sachant qu'il contient le mot *urgent*.

25 min

4 Chez le médecin

➡ **Objectif : Découvrir la spécificité et la sensibilité.**

Contenus associés :
- Lois discrètes..Chapitre 7

Spécialité : SVT

Vers le sup : Médecine

Après un test pour détecter une éventuelle allergie, son médecin convoque Tom pour lui annoncer que le test est positif. Pas de chance car ce type d'allergie ne touche que 0,1 % de la population. Tom demande donc à son médecin si ce test est fiable. Il lui répond que, si vous êtes allergique, alors le test est positif dans 90 % des cas, et que, si vous ne l'êtes pas, alors le test est négatif dans 97 % des cas.
Quelle est la probabilité que Tom soit vraiment allergique ?
On note C l'événement « être allergique » et T l'événement « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré de la situation.

2. Calculer la probabilité $P(\mathrm{T})$.

3. En déduire la probabilité cherchée.

4. Conclure.

5. Pour voir autrement ce paradoxe, considérons une population de 10 000 personnes.
Recopier et remplir le tableau suivant en arrondissant les valeurs à l'unité.

	T	$\overline{T}$	Total
M	Vrai positif	Faux négatif	Malade
$\overline{M}$	Faux positif	Vrai négatif	Non malade
Total	Test positif	Test négatif	10 000

6. Vérifier qu'on retrouve la probabilité cherchée.

7. La **sensibilité d'un test** est la probabilité que le test soit positif si la personne est allergique.
a) Déterminer une formule permettant de calculer la sensibilité à l'aide du tableau.
b) Que se passe-t-il si la sensibilité d'un test augmente ?
c) La calculer dans cet exemple.

8. La **spécificité d'un test** est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas allergique.
a) Déterminer une formule permettant de calculer la spécificité à l'aide du tableau.
b) Que dire si la spécificité d'un test augmente ?
c) La calculer dans cet exemple.

9. La sensibilité et la spécificité d'un test sont-elles dépendantes ? Comment réagissent-elles entre elles ?

10. On appelle prévalence, notée p, la probabilité $P(\mathrm{M})$ et on note SE la sensibilité et SP la spécificité.
La valeur prédictive positive (VPP) d'un test est la probabilité que la personne soit réellement allergique si son test est positif et la valeur prédictive négative (VPN) d'un test est la probabilité que la personne ne soit pas allergique si son test est négatif.
a) Donner les valeurs de VPP et VPN en fonction de p, SE et SP.
b) Les calculer dans cet exemple.

Thème 6

15 min

5 D'autres maladies

➡ **Objectif : Distinguer spécificité et sensibilité.**

Contenus associés :
• Lois discrètes..Chapitre 7
Spécialité : SVT
Vers le sup : Médecine

A ▸ La mucoviscidose

On s'intéresse au patient porteur d'une mutation dans le gène CFTR qui est impliqué dans la mucoviscidose.
En France, une personne sur 34 est porteuse de la mutation (cela n'implique pas d'être malade car il s'agit d'une maladie autosomique récessive).
Il existe un test pouvant détecter ces mutations avec une sensibilité de 85 % et une spécificité très proche de 100 %.
On note :
• M l'événement « être porteur de cette mutation » ;
• T l'événement « le test est positif ».

1. Traduire les probabilités de l'énoncé à l'aide des événements T et M.

2. Après avoir fait un test qui s'est révélé négatif, déterminer la probabilité d'être quand même porteur.

B ▸ L'appendicite

Pour diagnostiquer la présence d'une appendicite chez des patients présentant des douleurs abdominales aigues, on réalise une échographie de la région abdominale.
Parmi les 255 patients chez lesquels l'échographie était positive, 235 présentaient effectivement une appendicite.
Toutefois, 75 des 585 patients dont l'échographie était négative présentaient également une appendicite.

1. Représenter les données sous forme d'un tableau à double entrée.

2. Quelle est la spécificité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce La **spécificité d'un test** est la probabilité que le test soit négatif si la personne n'est pas porteuse de la maladie testée.

3. Quelle est la sensibilité du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Coup de pouce La **sensibilité d'un test** est la probabilité que le test soit positif si la personne est porteuse de la maladie testée.

4. Quelle est la valeur prédictive positive du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

5. Quelle est la valeur prédictive négative du diagnostic de l'appendicite par échographie abdominale ?
Que signifie la valeur obtenue ?

Répétition d'expériences indépendantes, échantillonnage

Thème 7

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : NSI

Vers le sup : Informatique, Statistiques

Algo 55 min

1 TP Simulation de variable aléatoire, comportement des moyennes d'échantillons

➡ **Objectif : Simuler des variables aléatoires.**

A ▶ Simulations d'une variable aléatoire

1. En **Python**, écrire une fonction `moyenne` de paramètre `L` de type liste de flottants, renvoyant la moyenne des éléments de `L`.

2. Écrire une fonction `ecart_type` de paramètre `L` de type liste de flottants qui :
- affecte `moyenne(L)` à une variable `m`,
- crée une liste `L2=[]` puis itère sur les éléments de `L` pour remplir la liste `L2` des $(x_i - m)^2$ où x_i sont les éléments de `L`,
- renvoie l'écart-type des éléments de `L`.

Coup de pouce $\sqrt{x}$ s'écrit `math.sqrt(x)`.

3. Écrire une fonction `simul_bernou` de paramètre `p` flottant (entre 0 et 1) qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
`random.random()` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1[$.

4. Justifier que la fonction `simul_binom` ci-dessous simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

```
def simul_binom(n,p):
    return sum([simul_bernou(p) for i in range(n)])
```

5. a) Quelle loi suit la variable aléatoire simulée par l'instruction `n*random.random()+1` ?
b) Justifier que la fonction ci-dessous simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\dots\,;n\}$.

```
def simul_uniforme(n):
    return math.floor(n*random.random()+1)
```

Coup de pouce `math.floor(x)` arrondit x à l'entier qui lui est inférieur ou égal.

B ▶ Avec la loi binomiale

On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ et $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$.

1. a) Que représente ce que renvoie `[simul_binom(n,p) for i in range(t)]` si `t` désigne la taille d'un échantillon ?
b) Que renvoie la fonction ci-dessous si `N` désigne un nombre d'échantillons ?

```
def serie_moyennes_binom(N,t,n,p):
    return [moyenne([simul_binom(n,p) for i in range(t)]) for i in range(N)]
```

2. a) Écrire une fonction `comparaison_binom1` de paramètres `N`, `t`, `n` et `p` qui calcule la liste des moyennes de N échantillons de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$, calcule l'écart-type s de ces moyennes puis affiche successivement s et $\frac{\sigma}{\sqrt{t}}$.
b) Que remarque-t-on quand on exécute plusieurs fois cette fonction ?

3. a) Écrire une fonction `comparaison_binom2` de paramètres `N`, `t`, `n` et `p` qui calcule la liste des moyennes de N échantillons de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$, calcule l'écart-type s de ces moyennes puis affiche la proportion de ces moyennes pour laquelle l'écart avec μ est inférieur ou égal à $2s$.
b) Que remarque-t-on quand on exécute plusieurs fois cette fonction ?

Thème 7

2 Tirages aléatoires avec remise

Algo · 30 min

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Vers le sup : SVT, Économie, Statistiques

➡ **Objectif : Simuler un tirage avec remise dans une urne.**

On considère une urne contenant 80 boules rouges et 20 boules vertes.

1. En **Python**, écrire une fonction `urne` sans paramètre simulant le tirage au sort d'une boule et renvoyant sa couleur.

Coup de pouce Utiliser `random.random()` ou `random.randint(a,b)`.

2. a) Compléter l'instruction suivante afin qu'elle renvoie un échantillon de taille `n` (un entier supposé connu par le programme) obtenu par tirages successifs avec remise dans cette urne : `[urne() for …]`.

b) À la suite de la fonction `urne`, écrire une fonction `echantillon` de paramètre `n` de type entier renvoyant la liste de la question **2. a)**. Exécuter le fichier et lancer `echantillon(50)` depuis la console.

3. Calculer la probabilité qu'on attende plus de 3 tirages avant d'obtenir la première boule verte.

4. a) Écrire une fonction `premier_vert` sans paramètre simulant ces tirages avec remise et renvoyant le rang du premier tirage auquel on obtient une boule verte.

b) Que donne la variable `m` ci-dessous ?

```
A = [premier(vert) for i in range(1000)]
m = sum(A)/1000
```

c) De quelle valeur le résultat doit-il être proche ? Vérifier avec l'ordinateur.

3 Vérification d'une pièce

Algo · 30 min

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, SVT

Vers le sup : Économie, Informatique

➡ **Objectif : Tester une pièce par construction d'un intervalle de fluctuation.**

Ben et Nat' jouent la vaisselle à PILE ou FACE tous les soirs avec la même pièce : si la pièce tombe sur PILE, Ben fait la vaisselle, si c'est FACE, c'est Nat'. Ben, qui a fait la vaisselle 110 fois sur les 200 derniers jours, se demande si la pièce n'est pas truquée.

1. On fait l'hypothèse que la pièce est équilibrée.

a) Quelle est alors la probabilité d'obtenir PILE ?

b) On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus lorsqu'on lance 200 fois cette pièce, dans ce cas où elle est équilibrée. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à cette variable aléatoire X.

c) Ben peut-il affirmer, au seuil de 95 %, que la pièce est truquée ?

2. Sur les 100 soirs qui suivent, Ben a fait la vaisselle 63 fois et Nat' 37 fois.
Ben a-t-il raison d'être de plus en plus suspicieux ?

3. a) Dans la calculatrice, rentrer la fonction $x \mapsto p(X \leqslant 173)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $p = x$ et $n = 300$.

b) Tabuler cette fonction à partir de $x = 0{,}5$ avec un pas de 0,01.

c) En déduire des valeurs pour la probabilité d'obtenir PILE pour lesquelles il serait tout à fait « normal » d'obtenir 173 PILE en 300 essais au seuil de 95 %.

d) Expliquer pourquoi il était légitime de penser *a priori* que la probabilité d'obtenir PILE puisse être 0,5 et dire s'il en va de même pour l'une des valeurs trouvées à la question précédente.

4. Proposer une méthode permettant d'estimer la probabilité que cette pièce tombe sur PILE.

Remarque Les tests et prises de décision permettent de tester les hypothèses d'un modèle pré-existant, en SES et en SVT notamment.

7

Algo — 55 min

4 Problème de surréservation

➡ Objectif : Programmer des fonctions avec la loi binomiale et les utiliser dans un cas de surréservation.

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, NSI

Vers le sup : Économie, Gestion, Informatique

A ▶ 1. On considère la fonction **parmi**, en langage Python, donnée ci-dessous.

```
def parmi(k,n):
    if k==0 or n==k:
        a=1
    else:
        a=parmi(k,n-1)+parmi(k-1,n-1)
    return a
```

a) Calculer les valeurs renvoyées par **parmi(1,1)** et **parmi(0,1)** puis par **parmi(1,2)**.

b) Calculer les valeurs renvoyées par **parmi(2,2)** et **parmi(0,2)** puis par **parmi(2,3)** et **parmi(1,3)**. En déduire **parmi(2,4)**.

c) Dans chacun des cas précédents, comparer **parmi(k,n)** et $\binom{n}{k}$. Que peut-on conjecturer sur la valeur renvoyée par **parmi(k,n)** pour tout $n \in \mathbb{N}$ et k entier entre 0 et n ?

2. Quelles sont les trois propriétés des coefficients binomiaux utilisés dans la fonction **parmi** ?

3. a) Ouvrir le lien ci-dessous dans lequel se trouve une fonction **parmi** telle que **parmi(k,n)** renvoie $\binom{n}{k}$ de manière optimisée.

PYTHON
Fonction parmi
lienmini.fr/maths-t07-01

b) Écrire une fonction **proba_bin** de paramètres **p** flottant et **n** et **k** entiers telle que **proba_bin(p,n,k)** renvoie $p(X=k)$.

c) Tester cette fonction avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

4. a) Écrire une fonction **seuil_bin** de paramètres **s** et **p** flottants et **n** entier telle que **seuil_bin(s,p,n)** renvoie le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant s$.

Coup de pouce On pourra considérer deux variables **k** et **p** (initialisées respectivement à 0 et $p(X=0)$) où **k** correspond à la valeur renvoyée par la fonction et **prob** à la probabilité $p(X \leqslant k)$.

b) Tester cette fonction avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

B ▶ Un organisateur de réceptions a envoyé 400 invitations (supposées indépendantes) pour un gala. Il considère que la probabilité qu'une personne invitée vienne effectivement au gala est de 74 %.

1. En utilisant la fonction **seuil_bin** écrite précédemment, déterminer le nombre minimal de repas à prévoir pour ce gala pour être sûr au seuil de 95 % qu'il y aura un repas pour chaque invité présent.

2. Reprendre la question précédente avec un seuil de 99 %.

C ▶ Pour aller plus loin

1. a) Écrire une fonction **proba_cum_bin** de paramètres **p** flottant et **n** et **k** entiers telle que **proba_cum_bin(p,n,k)** renvoie $p(X \leqslant k)$.

b) Écrire une fonction **seuil_bin2** de paramètres **s** et **p** flottants et **k** entier telle que **seuil_bin2(s,p,k)** renvoie le plus grand entier n tel que $p(X \leqslant k) \geqslant s$ où X suit la loi binomiale de paramètres p et n.

c) Tester ces fonctions avec quelques valeurs et vérifier les résultats obtenus avec la calculatrice.

2. Pour un autre gala, l'organisateur de réceptions dispose d'une salle de 250 places.
En utilisant la fonction **seuil_bin2** écrite précédemment, déterminer le nombre d'invitations maximal qu'il peut envoyer en restant sûr au seuil de 95 % que tous les invités auront une place.

Thème 7

30 min

5 TP Sondage et temps avant l'élection

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

➡ **Objectif : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.**

Un sondage publié par l'institut BVA le 7 décembre 2016 sur le premier tour de l'élection présidentielle française du 23 avril 2017, annonce des intentions de votes de 13 % pour M. Valls, 14 % pour J.-L. Mélenchon, 14 % pour E. Macron, 24 % pour F. Fillon et 24 % pour M. Le Pen. Les autres candidats ne sont pas listés dans ce sondage.

1. Vérifier la liste des candidats au 1er tour de cette élection présidentielle. Que peut-on penser du pourcentage d'intention de votes annoncé dans le sondage pour un des candidats ?

2. Ces intentions de votes sont annoncées avec une marge d'erreur d'environ 3 %.

a) En tenant compte de cette marge d'erreur, donner une fourchette du score attendu pour chaque candidat au 1er tour de cette élection.

b) Rechercher les scores effectifs des différents candidats au 1er tour de cette élection et les commenter en utilisant la question **2. a)**.

c) En avril 2017, le même institut de sondage annonce des intentions de votes de 19 % pour F. Fillon, 19,5 % pour J.-L. Mélenchon, 23 % pour M. Le Pen et 23 % pour E. Macron.
Que peut-on penser de ces estimations au regard des résultats obtenus par ces quatre candidats au 1er tour de cette élection ?

3. Que peut-on penser de l'intérêt de réaliser des sondages sur des élections ayant lieu dans plusieurs mois ?

30 min

6 TP Sondage et suffrage indirect

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

➡ **Objectif : Discuter des résultats d'un sondage dans une élection au suffrage indirect.**

Un sondage réalisé pour le Washington Post entre les 3 et 6 novembre 2016 donnait 49 % d'intention de votes pour H. Clinton et 46 % pour D. Trump à l'élection présidentielle du 8 novembre 2016.

1. a) Qui a gagné cette élection ? Que peut-on donc penser de ce sondage ?

b) Lors de cette élection, H. Clinton a obtenu 65 853 514 et D. Trump 62 984 828 des 136 669 276 votes exprimés.
Calculer leurs pourcentages de votes respectifs et les comparer aux résultats du sondage ?

c) L'élection présidentielle aux États-Unis se déroule-t-elle au suffrage universel direct comme en France ?

2. L'élection présidentielles aux Etats-Unis est une élection au suffrage indirect : chaque état possède un certain nombre de grands électeurs et la personne en tête dans un état y « remporte » tous les grands électeurs. Le ou la candidate ayant le plus de grands électeurs emporte l'élection.

a) Télécharger le fichier ci-dessous.

b) Dans les cellules B53 et C53, écrire une formule permettant d'obtenir les sommes des valeurs de chacune des colonnes B et C et les interpréter concrètement.

TICE — Fichier Excel — lienmini.fr/maths-t07-02

Coup de pouce Utiliser la fonction SOMME.

c) Écrire une formule dans la cellule D2 permettant de remplir la colonne D par recopie vers le bas puis la recopier vers le bas.

d) Sélectionner la plage A2 : D52 puis effectuer un tri décroissant selon le nombre de grands électeurs par millions d'habitants (Données>Trier).

e) Dans la cellule E2, écrire = SOMME(C$2 : C2) puis recopier vers le bas jusqu'à E52.

f) Expliquer pourquoi il « suffit » de gagner dans les états dans lesquels le nombre de grands électeurs par habitant est supérieur ou égal à 1,65 pour gagner l'élection.

g) Quelle proportion de la population habite ces états ?

h) Commenter le sondage de début d'énoncé.

7

7 TP 30 min

Sondage et marge d'erreur

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7

Spécialité : SES, HGSSP

Vers le sup : Économie, Sociologie, Sciences Po, Journalisme, Statistiques

➡ **Objectif : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.**

Un sondage IPSOS-SOPRA-STERIA mené fin avril 2017 pour le 2nd tour de l'élection présidentielle est accompagné du tableau ci-dessous portant sur les marges d'erreurs des sondages.

INTERVALLE DE CONFIANCE

(avec un niveau de confiance de 95 %)

SCORES OBTENUS

Taille d'échantillon	2 % ou 98 %	5 % ou 95 %	10 % ou 90 %	15 % ou 85 %	20 % ou 80 %	25 % ou 75 %	30 % ou 70 %	35 % ou 65 %	40 % ou 60 %	45 % ou 55 %	50 %
200 cas	2,0	3,1	4,3	5,1	5,7	6,1	6,5	6,8	6,9	7,1	7,1
500 cas	1,3	2,0	2,7	3,2	3,6	3,9	4,1	4,3	4,4	4,5	4,5
1 000 cas	0,8	1,4	1,8	2,3	2,5	2,7	2,9	3,0	3,0	3,1	3,1
2 000 cas	0,6	1,0	1,3	1,6	1,8	2,0	2,1	2,2	2,2	2,3	2,3
5 000 cas*	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4
6 000 cas	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1	1,2	1,3	1,3	1,4	1,4	1,4

1. D'après ce tableau, pourquoi l'institut annonce-t-il que pour un candidat ayant 25 % d'intentions de votes pour un sondage sur 5 000 personnes, le résultat attendu est entre 23,8 % et 26,2 %.

2. Le sondage accompagné par ce tableau a été réalisé sur 5 331 personnes, moins d'une semaine avant le 2nd tour des élections. Il donne 63 % d'intentions de votes à E. Macron et 37 % à M. Le Pen.
En prenant les valeurs les plus proches possibles dans le tableau, donner les fourchettes dans lesquelles devraient se trouver les résultats des deux candidats puis les comparer avec les résultats du 2nd tour de l'élection présidentielle 2017.

3. a) On considère que, pour un sondage, la marge d'erreur au seuil de 95 % est d'environ $2\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$
où f est l'intention de votes sous forme décimale et n le nombre de personnes interrogées.
Choisir une valeur de f et une valeur de n dans le tableau et retrouver la marge d'erreur annoncée.
b) Dans le document de l'institut IPSOS-SOPRA-STERIA accompagnant le tableau, on peut lire « le calcul n'est justifié que pour les sondages aléatoires. Il ne peut pas être déterminé dans le cas de sondages par quotas mais on considère qu'il est proche de celui des sondages aléatoires ».
Mener une rechercher sur les sondages « aléatoires » et « par quotas » et commenter cette phrase.

Thème 8 Temps d'attente

Contenus associés :
- Lois discrètes .... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : Informatique

Vers le sup : Sciences

TICE Algo 55 min

1 TP Jeu en réseau

➡ **Objectif :** Simuler la loi uniforme.

Axel et Wissam se donnent rendez-vous entre 18 h 00 et 19 h 00 pour se connecter et jouer ensemble. Les horaires de connexion, en heures, d'Axel et de Wissam, à partir de 18 heures, peuvent être modélisés par des variables aléatoires A et W qui suivent une loi uniforme sur [0 ; 1]. Par exemple, si A prend la valeur 0,75 $\left(=\frac{3}{4}\right)$, cela signifie qu'Axel se connecte à 18 h + 0,75 h, ce qui correspond à 18 h 45 min ; et si W prend la valeur $\frac{2}{3}$ (≈ 0,6667), cela signifie que Wissam se connecte à 18 h + $\frac{2}{3}$ h, ce qui correspond à 18 h 40 min. On souhaite déterminer la probabilité p que le premier connecté n'attende pas l'autre plus d'un quart d'heure.

A ▸ Simulation avec un tableur

Sur une feuille de calcul, on a simulé 1 000 valeurs de A et de W.

1. Télécharger la feuille de calcul à l'aide du lien ci-contre.

TICE Fichier Excel
lienmini.fr/maths-t08-01

2. Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule A2 (resp. C2) afin d'obtenir, par recopie vers le bas jusqu'à la cellule A1001 (resp. C1001), mille simulations de l'horaire de connexion d'Axel (resp. Wissam), en heures à partir de 18 h ?

3. Expliquer ce que font les formules qui figurent dans les cellules E2, G2 et H2 de la feuille de calcul.

4. Effectuer plusieurs simulations à l'aide de la touche F9. Noter les résultats obtenus pour la fréquence.

5. Que peut-on en déduire pour la probabilité p ?

B ▸ Simulation avec un algorithme

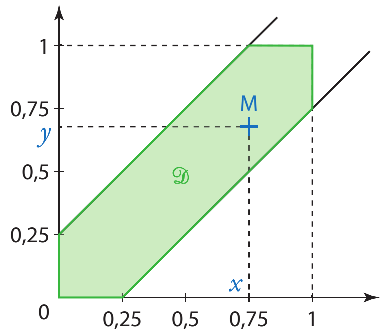
1. Compléter le programme suivant écrit en langage **Python** qui simule 100 000 temps d'attente possibles des deux joueurs et affiche la fréquence des temps d'attente inférieurs à un quart d'heure.

```
import random
c=0
for i in range(…):
    A=random.random()
    W=random.random()
    TA=abs(W-A)
    if TA<=…:
        c=c+1
print(…)
```

2. Exécuter plusieurs fois ce programme. Que peut-on dire de la probabilité p ?

C ▸ Représentation « graphique »

L'horaire de connexion d'Axel et l'horaire de connexion de Wissam peuvent être représentés dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, par un point M de coordonnées x et y où x et y sont des nombres réels de l'intervalle [0 ; 1]. Ainsi, le point $M\left(0,75 ; \frac{2}{3}\right)$ correspond à l'événement : « Axel s'est connecté à 18 h 45 et Wissam à 18 h 40. »



1. Justifier que la probabilité p cherchée est égale à $p = P\left(|y - x| \leqslant \frac{1}{4}\right)$.

2. Montrer que :

$$|y - x| \leqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} \leqslant y \leqslant x + \frac{1}{4}.$$

3. En déduire que, pour tous réels x et y de l'intervalle [0 ; 1], $|x - y| \leqslant \frac{1}{4}$ si et seulement si le point M(x ; y) appartient au domaine D coloré.

4. On admet que la probabilité p est égale à l'aire du domaine D. Déterminer p.

10 min

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : SES, Informatique

Vers le sup : Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

2 À la gare

➡ **Objectif : Manipuler une loi uniforme.**

À la gare de Fontainebleau, des trains pour Paris passent toutes les 30 minutes à partir de 6 h du matin.
Un individu arrive à la gare entre 6 h et 7 h et l'on suppose que l'heure de son arrivée, donnée par le nombre de minutes après 6 h, est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 60].
Quelle est la probabilité que l'individu ait à attendre moins de 10 minutes le prochain train? qu'il attende plus d'un quart d'heure ?

30 min

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité .... Chapitre 8

Spécialité : Physique, NSI

Vers le sup : Statistique et informatique décisionnelle

3 Loi exponentielle

➡ **Objectif : Retrouver les résultats du cours et les manipuler.**

A ▸ Quelques points théoriques

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

2. On note, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t) = te^{-\lambda t}$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a
$\lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - g'(t)$.
b) En déduire $\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$, puis en déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$.
c) En déduire l'espérance d'une loi exponentielle.

3. a) Résoudre l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$.
b) En déduire le temps de demi-vie d'une loi exponentielle.

B ▸ Durée de vie d'un appareil électronique

Dans un IUT d'informatique, les élèves utilisent un appareil électronique dont le fonctionnement repose sur deux composants : C_1 et C_2.
On suppose que leurs fonctionnements sont indépendants l'un de l'autre et l'on modélise leurs durées de vie par des variables aléatoires T_1 et T_2 suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. a) La durée de vie moyenne du composant C_1 est de 100 heures. En utilisant la question **2.** de la partie **A**, déterminer λ_1.
b) En moyenne, la moitié des composants C_2 ont une durée de vie inférieure ou égale à 120 heures. En utilisant la question **3.** de la partie **A**, déterminer λ_2.

2. L'appareil fonctionne à la seule condition que les deux composants fonctionnent tous les deux. On note T la variable aléatoire modélisant le temps de vie de l'appareil électronique.
a) Déterminer $P(T \leqslant x)$ en fonction de λ_1, λ_2 et x.
b) En utilisant la question **1.** de la partie **A**, que peut-on dire de la loi de T ?
c) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne plus de 100 heures ?

Thème 8

15 min

4 Parcoursup

➡ **Objectif :** **Utiliser une loi de probabilité.**

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité............ **Chapitre 8**

Spécialité : SES, NSI

Vers le sup : Sciences humaines, Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

Dans un lycée, les inscriptions sur Parcoursup sont organisées toutes sur la même journée.
Le temps de traitement de l'inscription dépend du nombre d'autres requêtes effectuées durant le même instant.
On suppose qu'en deçà d'un seuil fixé de 100 % de requêtes, l'inscription est pratiquement immédiate ; qu'entre 100 % et 200 % le temps d'inscription est de 10 secondes ; qu'entre 200 % et 350 %, le temps est de 25 secondes et qu'entre 350 % et 1 000 %, il faut attendre une minute.
La proviseure avait pris des notes sur le déroulement de l'an passé. En se basant sur ces notes, elle a pu établir qu'il y a une chance sur cinq que le nombre de requêtes sur Parcoursup soit en dessous de 100 %, une chance sur dix qu'il soit entre 100 % et 200 % et trois chances sur dix qu'il soit entre 200 % et 350 %.

On modélise le temps de traitement de l'inscription sur Parcoursup par une variable aléatoire T.

1. Déterminer la loi de probabilité de T et représenter graphiquement cette loi.

2. Calculer l'espérance ainsi que la variance de T. Interpréter ces résultats.

3. À 9 h, une très grande partie du lycée effectue l'inscription.
La proviseure est certaine que le nombre de requête dépasse alors le seuil de 100 %.
Une élève lui demande s'il est normal qu'au bout de 30 secondes le traitement de l'inscription ne soit pas encore effectué.
Que doit-elle répondre ?

20 min

5 Rendez-vous à l'opéra

➡ **Objectif :** **Manipuler et représenter une loi uniforme.**

Contenus associés :
- Lois de probabilité à densité............ **Chapitre 8**

Spécialité : SES, Informatique

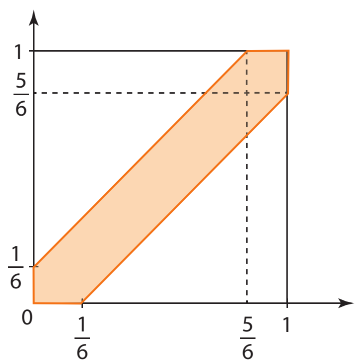
Vers le sup : Sciences humaines, Gestion, Statistique et informatique décisionnelle

À l'opéra de Vichy, les portes s'ouvrent 30 minutes avant le début de chaque spectacle. Pour la représentation du *Misanthrope* de Molière, Alexis et Camille se donnent rendez-vous entre 15 h 30 et 16 h. Chacun attend l'autre cinq minutes avant de rentrer dans l'opéra.

On modélise les instants d'arrivée après 15 h30 par une loi uniforme sur [0 ; 1].

1. À 15 h 50, une sonnette retentit, annonçant le début imminent de la représentation.
a) Quelle est la probabilité que Camille entre avant la sonnette ? Même question pour Alexis.
b) Quelle est la probabilité que Camille et Alexis entrent avant la sonnette ?

2. On donne le graphique ci-contre.
a) Que représente l'aire de la surface colorée dans le contexte de l'exercice ?
b) En déduire la probabilité que Camille et Alexis entrent ensemble à l'opéra.



Algo 55 min

6 TP Datation au carbone 14

➡ **Objectif :** Simuler une durée de vie.

Contenus associés :
- Primitives et équations différentielles. Chapitre 5
- Lois discrètes ..... Chapitre 7
- Lois de probabilité à densité ..... Chapitre 8

Spécialité : Physique, SVT, NSI

Vers le sup : Biologie, Physique, Archéologie

8

A ▸ Désintégration du carbone 14

On note T la variable aléatoire modélisant le temps de vie de l'atome.

Le phénomène radioactif peut être expliqué de la manière suivante : la probabilité qu'un atome radioactif se désintègre durant un intervalle de temps est proportionnelle à l'intervalle de temps considéré.

1. Si l'on note F la fonction de répartition de T, on admet que cela implique que F vérifie l'équation différentielle suivante :
$F'(x) = \lambda(1 - F(x))$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer alors une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b) Reconnaître la loi de T.

2. La fonction suivante, écrite en langage **Python**, simule la durée de vie d'un atome de carbone 14.
Expliquer cette fonction.

```
from math import*
from random import random
def desintegration(l):
    x=random()
    y=-log(1-x)/l
    return y
```

3. On rappelle que le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$ d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par $t_{\frac{1}{2}} = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

Des mesures physiques nous donnent dans le cas du carbone 14 la valeur $t_{\frac{1}{2}} = 5\,730$ ans

a) Déterminer λ. Cette valeur est appelée constante de radioactivité.

b) Que faut-il écrire à la suite du programme de la question **2.** pour obtenir la simulation de la durée de vie avec cette valeur de λ ?
Programmer alors cette fonction.

B ▸ Datation

On considère un gramme d'un organisme fossile dont on veut établir la datation et on note n le nombre d'atomes de carbone 14 présents.

On fait l'hypothèse qu'à la mort de cet organisme, un gramme de matière contenait $N = 7{,}0 \times 10^{10}$ atomes de carbone 14. On note B_i la variable aléatoire égale à 1 si l'atome de carbone 14 numéro i s'est désintégré et à 0 sinon, pour $i \in \{1 ; ... ; N\}$.

1. À quoi correspond la quantité $B_1 + B_2 + ... + B_N$?

2. Pour $i \in \{1 ; ... ; N\}$, quelle est la loi de B_i ?

3. a) Exprimer de manière algébrique la fréquence d'atomes désintégrés lors de l'expérience.

b) Compléter alors la fonction écrite en langage **Python** qui simule l'expérience, afin qu'elle renvoie cette fréquence. Programmer ensuite cette fonction.

```
def frequence(N,t,l):
    S=0
    for i in range(N):
        if random()<1-exp(-l*t):
            S=S+1
    return ...
```

c) En fixant une valeur de t et en choisissant la valeur de λ déterminée dans la partie précédente, représenter graphiquement cette fréquence en fonction de N.

d) Émettre une conjecture quant à la convergence de cette fonction. Que représente cette limite ?

4. Déduire des questions précédentes l'approximation suivante : $\dfrac{N-n}{N} = 1 - e^{-\lambda t}$.

5. En déduire qu'une approximation de t peut être donnée par $\dfrac{\ln(N) - \ln(n)}{\lambda}$.

Thème 8

30 min

7 Greffes de rosiers

➡ **Objectif :** **Justifier et manipuler une loi géométrique.**

Contenus associés :
• Lois discrètes .... Chapitre 7
Spécialité : SVT
Vers le sup : Biologie, Agronomie

Thibault aide tous les week-ends sa grand-mère dans la greffe de ses rosiers. Lorsqu'une greffe est effectuée, ils constatent dès la semaine suivante si elle a pris ou non.
On note $p = 0{,}6$ la probabilité qu'une greffe prenne.
La grand-mère de Thibault possède 20 rosiers.

1. a) Par quelle loi peut-on modéliser une tentative de greffe sur un rosier ?
b) Thibault choisit de considérer un schéma de Bernoulli et une loi binomiale pour modéliser le nombre de greffes G nécessaires pour un rosier.
Rédiger cette modélisation et calculer selon celle-ci la probabilité qu'un rosier ne soit pas greffé avant 4 semaines.

2. La grand-mère de Thibault regarde la modélisation et s'exclame : « Ton hypothèse est trop forte, tu vois bien que si une greffe prend, il n'est plus la peine d'essayer une nouvelle fois ! »
Le garçon répond alors : « Mais oui bien sûr, il s'agit en réalité du premier succès de mon schéma de Bernoulli. »
a) Justifier alors la loi réelle de G.
Le résultat de probabilité de la question **1. b)** change-t-il alors?
b) Déterminer l'espérance de G.
Interpréter ce résultat dans le contexte.

3. On note X le nombre total de greffes nécessaires pour que les greffes prennent sur les 20 rosiers.
Déterminer l'espérance de X et l'interpréter.

4. Un calcul permet de déterminer la loi de X. On donne dans le tableau de valeurs ci-contre une partie de cette loi.
On appelle cette loi la loi de Pascal.
a) Justifier pourquoi le tableau commence à $n = 20$.
b) Quelle est la probabilité qu'il ait fallu faire au total moins de 30 greffes pour que les rosiers soient tous greffés ?
c) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 50 greffes?

	A	B	C
1	n	$p(X = n)$	
2	20	3,65616E-5	
3	21	0,000292493	
4	22	0,001228469	
5	23	0,00360351	
6	24	0,008288072	
7	25	0,015913099	
8	26	0,026521832	
9	27	0,039403864	
10	28	0,053195217	
11	29	0,066198492	
12	30	0,076790251	
13	31	0,083771183	
14	32	0,086563556	
15	33	0,085231809	
16	34	0,08036142	
17	35	0,07286102	
18	36	0,063753393	
19	37	0,054002874	
20	38	0,044402363	
21	39	0,03552189	
22	40	0,027707075	
23	41	0,021110152	
24	42	0,015736659	
25	43	0,011494603	
26	44	0,008237799	
27	45	0,00579941	
28	46	0,004014976	
29	47	0,002736132	
30	48	0,001837117	
31	49	0,001246298	
32	50	0,000794648	

Corrélation et causalité

Thème 9

1 TP Température et gaz à « effet de serre »

TICE 30 min

➡ **Objectif : Découvrir la notion d'ajustement d'une série statistiques à deux variables**

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

A ▸ Étude de la concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère

Le CO_2 est le principal gaz à « effet de serre ». Depuis 2015, les concentrations moyennes de CO_2 dans l'ensemble de l'atmosphère terrestre sont supérieures à 400 ppm (« **p**artie **p**ar **m**illion »). Comme son nom l'indique, le ppm permet de savoir combien de molécules de CO_2 on trouve sur un million de molécules d'air. Il permet donc de rendre compte de la quantité de CO_2 dans une masse d'air donnée. Les prévisions estiment que d'ici 2030, le taux de CO_2 moyen dans l'atmosphère atteindra les 450 ppm.

1. Télécharger le fichier qui donne la concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère et la température moyenne mondiale chaque année de 1900 à 2015. Sélectionner les données des colonnes A et B, puis insérer un graphique **nuage de points**.

TICE Concentration de CO_2 lienmini.fr/maths-t09-01

	A	B	C
1	Années	Concentration moyenne de CO_2 dans l'atmosphère en ppm	Température moyenne mondiale en dégrés Celsius
2	1900	295,7	13,8
3	1901	296,2	13,7
4	1902	296,6	13,6
5	1903	297	13,5
6	1904	297,5	13,5
7	1905	298	13,7
8	1906	298,4	13,8
9	1907	298,8	13,5
10	1908	299,3	13,5
11	1909	299,7	13,6
12	1910	300,1	13,5
13	1911	300,6	13,4
14	1912	301	13,6
15	1913	301,3	13,6
16	1914	301,4	13,8

2. Ouvrir la fenêtre **Format de l'axe** à l'aide d'un double clic sur les valeurs de l'axe des abscisses, puis indiquer 1900 comme minimum et 2040 comme maximum, puis régler le « pas » des unités principales à 10.

3. Faire de même avec l'axe des ordonnées, en indiquant 280 comme minimum et un « pas » de 10 pour les unités principales.

4. a) À l'aide d'un clic droit sur les points du nuage, sélectionner **Ajouter une courbe de tendance** dans la fenêtre de dialogue.

b) Dans la fenêtre d'affichage **Format de courbe de tendance**, faire afficher le coefficient de détermination r^2 sur le graphique. Puis sélectionner successivement **linéaire** puis **polynomiale degré 2** puis **polynomiale degré 3**, tout en observant la courbe et le coefficient r^2. Que constatez-vous ? Quel est le meilleur ajustement possible ?

c) Toujours dans la fenêtre d'affichage **Format de courbe de tendance**, faire une **prévision** « en avant » de 15. Que remarque-t-on ? Cela confirme-t-il les prévisions données dans l'énoncé ?

B ▸ Température moyenne globale

1. Sélectionner les données des colonnes A et C avec la touche **Ctrl** puis insérer un graphique **nuage de points**.

2. Régler le format de l'axe des abscisses comme dans la question **A ▸ 2.**.

3. Ajouter une courbe de tendance **polynomiale degré 3.**

4. Selon cette courbe de tendance, quelle température est prévue en 2030 ?

C ▸ Lien entre température et concentration de CO_2

1. Sélectionner les données des colonnes B et C, puis insérer un graphique « nuage de points ».

2. Régler le format de l'axe des abscisses en prenant 280 comme minimum et 450 comme maximum, et 20 pour le « pas » des unités principales.

3. Faire de même avec l'axe des ordonnées, en indiquant 0,1 pour les unités principales.

4. Ajouter une courbe de tendance **linéaire**.

5. Si la concentration de CO_2 atteint 450 ppm, quelle prévision de température donne la courbe de tendance de ce nuage de points ?

Thème 9

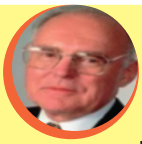
Contenus associés
- Suites et modèles discrets .... Chapitre 1
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique
Vers le sup : Sciences

TICE 30 min

2 TP Loi de Moore

➡ **Objectif : Modéliser des évolutions**



En 1965, Gordon E. Moore, l'un des cofondateurs de la société Intel, observe que le nombre de transistors qui composent un microprocesseur double tous les ans (première loi de Moore). En 1975, il précise qu'en fait ce nombre doit doubler tous les deux ans (deuxième loi de Moore) jusqu'en 2015, où on sera limité par la taille des atomes.

A ▶ Évolution du nombre de transistors selon la première loi de Moore

En 1971, un microprocesseur était constitué de 2300 transistors.

Soit (u_n) la suite qui donne, selon la première loi de Moore, le nombre de transistors dans un microprocesseur l'année de rang n, en prenant 1971 comme année de rang 0. Ainsi $u_0 = 2300$.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Déterminer u_1, u_2, u_3.

3. Quelle est la nature de cette suite ?

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. Selon la première loi de Moore combien un microprocesseur devrait contenir de transistors en 1974 ? Et en 1982 ?

B ▶ Évolution réelle du nombre de transistors par microprocesseur

Les données exactes de l'entreprise Intel concernant ses microprocesseurs depuis 1974 sont présentées dans le tableau suivant.

Année	Rang de l'année x_i	Nombre de transistors y_i (en millions)
1974	0	0,006
1979	5	0,029
1982	8	0,134
1985	11	0,275
1989	15	1,2
1993	19	3,1
1997	23	7,5
1999	25	9,5
2000	26	42
2004	30	125
2007	33	582
2008	34	820

1. Sur **GeoGebra**, représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$, pour i entier de 0 à 34, associé à la série statistique à deux variables « rang x de l'année » et « nombre y de transistors en millions ».
Dans la barre de saisie, entrer successivement les coordonnées des points : (0,0.006) (5,0.029) (8,0.134) etc.….
Pour visualiser tous les points convenablement, changer l'échelle : clic droit sur le graphique **Axe X : Axe Y** puis **1 : 50**

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par : $\begin{cases} v_0 = 0{,}006 \\ v_{n+2} = 2v_n \end{cases}$

a) Justifier que cette suite modélise l'évolution, selon la deuxième loi de Moore, du nombre de transistors, en millions, dans un microprocesseur l'année de rang n, en prenant 1974 comme année de rang 0.

b) On admet que la suite (v_n) est géométrique. Démontrer que sa raison est $\sqrt{2}$.

c) Exprimer v_n en fonction de n.

d) Déterminer v_{34} et comparer avec la valeur réelle.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto 0{,}006\ \sqrt{2}^{\,x}$ définie sur l'intervalle [0 ; 34] telle que pour tout entier naturel n, $v_n = f(n)$.

a) Représenter la courbe de la fonction f sur **GeoGebra**. Pour cela, dans la barre de saisie, entrer

```
f(x)=0.006*sqrt(2)^x
```

b) La courbe obtenue coïncide-t-elle avec le nuage de points ?

c) Que peut-on dire de la deuxième loi de Moore pour la période 1974 à 2008 ?

TICE

3 TP Chorale et décibels

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

➡ **Objectif : Découvrir l'ajustement logarithmique**

Dans une salle de concert, un instrument de mesure du niveau sonore, en décibels, a été placé devant la scène.

Les mesures relevées lors du passage de différents chœurs amateurs et professionnels qui sont venus donner des concerts dans cette salle sont présentées dans le tableau suivant.

Nombre x_i de chanteurs dans le chœur	4	12	15	28	30	43	55	75	116	122
Niveau sonore y_i (en dB)	75	81	80	84	84	85	87	88	91	90

A ▸ Étude du nuage de points à l'aide d'un tableur

1. Entrer les valeurs du tableau ci-dessus dans les colonnes A et B du tableur.

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ pour *i* entier de 1 à 10. (Sélectionner le tableau, puis **Insertion, Graphiques, Nuage de points**).

3. Régler le minimum de l'axe des ordonnées sur 60. (Double-cliquer sur l'axe des ordonnées pour ouvrir la fenêtre **Format de l'axe**).

4. Ajouter une courbe de tendance (clic droit sur les points). Dans la fenêtre **Format de courbe de tendance** , sélectionner **Logarithmique** et **Afficher l'équation et le coefficient de détermination R^2 sur le graphique**.

5. On admet que l'équation $y = 4{,}5\ln(x) + 68{,}8$ est un bon modèle d'ajustement de la série statistique à deux variables x (nombre de chanteurs) et y (niveau sonore).

a) En déduire, selon ce modèle, le niveau sonore qui pourrait être relevé dans la salle de concert pour une chorale de 200 personnes.

b) Donner une estimation du nombre de chanteurs que l'on devrait réunir sur scène afin de dépasser les 100 décibels .

B ▸ Comparaison avec une autre série statistique

Le niveau sonore moyen d'un chanteur de chorale a été mesuré dans cette salle autour de 70 dB.
Le directeur de la salle prétend qu'à chaque fois que l'on double le nombre de chanteurs, le nombre de décibels augmente de 3.

1. Dans le tableur, recopier et compléter la feuille de calcul suivante qui donne selon l'affirmation du directeur, l'évolution du nombre de chanteurs et du niveau sonore correspondant.

	A	B
1	Selon le directeur de la salle :	
2	Nombre de chanteurs	Niveau sonore (en dB)
3	1	70
4	2	73
5	4	76
6		
7		
8		
9		
10		
11		

Quelle formule doit-on entrer dans la cellule A4 et quelle formule doit-on entrer dans la cellule B4 afin qu'en les recopiant simultanément vers le bas on obtienne les résultats qui correspondent à l'affirmation du directeur ?
(On s'arrêtera à la case A11)

2. Représenter le nuage de points correspondant à cette nouvelle série statistique sur le même graphique que le précédent. (Clic droit sur le graphique, « sélectionner des données », puis cliquer sur l'onglet **Ajouter**, puis cliquer dans l'onglet **Valeurs de la série des abscisses X** et sélectionner la plage de cellules de A3à A11, puis dans l'onglet **Valeurs de la série Y** effacer le contenu et sélectionner la plage de cellules de B3 à B11)

3. Ajouter une courbe de tendance « logarithmique » sur le nouveau nuage de points. Cette courbe de tendance coïncide t-elle avec celle du nuage de points de la partie **A** ?

4. Que peut-on dire de l'affirmation du directeur de la salle ?

Thème 9

4 TP Effet cigogne

TICE 40 min

Contenus associés
- Statistiques à deux variables .... Chapitre 9

Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique

Vers le sup : Sciences

➡ **Objectif : Comprendre la différence entre la corrélation et le lien de causalité de deux quantités**

Deux événements x et y sont corrélés si l'on observe un lien, une relation entre les deux. Une erreur de raisonnement courante consiste à dire : « Si x et y sont corrélés c'est que y est causé par x ». Il ne faut pas confondre corrélation et causalité car, en réalité, c'est peut-être x qui est causé par y, ou peut-être que c'est un facteur extérieur qui a causé x et y simultanément, ou peut être encore que la corrélation de x et y n'est qu'un pur hasard.

Par exemple, lors de divers recensements, on a constaté qu'en Alsace, dans les communes où nichaient beaucoup de cigognes, le taux de natalité était plus important que dans le reste du pays. La présence des cigognes a-t-elle une influence sur la natalité ?

En réalité, les communes qui abritaient des cigognes étaient des communes rurales. Or, le taux de natalité des communes rurales était plus important que celui des grandes villes.

Voici quelques exemples de corrélations entre deux variables. Pour certaines le lien de causalité est fortement discutable. Saurez-vous dépister « l'effet cigogne » ?

A ▶ Ventes de glaces et température moyenne

Une commerçante a noté chaque semaine pendant les mois d'été 2017 la température moyenne x_i dans sa ville, en degrés Celsius. Sur la même période, elle a noté le nombre y_i de ventes de glaces qu'elle a servies chaque semaine. Ses résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Température x_i (en °C)	23	25	21	30	29	32	27	25	27
	25	34	12	54	55	61	55	40	48

1. À l'aide de votre calculatrice :

a) représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 9, à l'aide de la méthode suivante.

b) déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire puis représenter la droite.

NUMWORKS

Dans le menu Régressions **Régressions**, après avoir entrée les données, appuyer sur ↩, sélectionner l'onglet « Graphique », puis OK : le nuage de points apparaît à l'écran ainsi que la droite d'ajustement du nuage.

TI-83 Premium CE

Appuyer sur la touche stats pour entrer les valeurs puis 2nde f(x) entrer : le menu **Graph1** apparaît.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
Aff NAff
Type:
Xliste :L1
Yliste :L2
Marque :▪ + · ·
Couleur: BLEU
```

Sélectionner et compléter chaque ligne comme sur la capture d'écran. Appuyer ensuite sur fenêtre et régler les valeurs minimum et maximum de chaque axe afin de pouvoir visualiser tous les points du nuage puis appuyer sur graphe : le nuage de points apparaît alors sur l'écran.

Pour obtenir la droite d'ajustement, il faut d'abord calculer l'équation de la droite : stats, CALC **4:RégLin(ax+b)**, puis plusieurs fois entrer. Lorsque la fenêtre **RégLin** est obtenue, appuyer sur la touche f(x), puis sur la touche var, sélectionner **5:Statistiques…**, puis ÉQ, **1:EQRég**, l'équation de la droite apparait alors. Appuyer sur graphe : la droite d'ajustement est dessinée.

CASIO GRAPH 90 +E

Dans le menu Statistique entrer les valeurs de la série F1 GRAPH puis appuyer sur la touche F1 GRAPH1 puis sur F1 CALC puis sur F2 X et sur F1 ax+b puis sur DRAW

2. D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il y a une corrélation entre la température x et le nombre y de glaces vendues ?

3. On dit qu'il y a un lien de causalité entre deux quantités lorsque l'évolution de l'une a des effets sur l'évolution de l'autre.
Dans le contexte de l'énoncé peut-on dire qu'il y a un lien de causalité entre la température x et le nombre de glaces vendues y ?

4. Si l'on considère que l'ajustement affine réalisé à la question **1. b)** avec la droite de régression peut modéliser de façon approché le lien entre la température et les ventes de glaces, combien de glaces pourrait-elle vendre pendant une semaine de canicule où la température moyenne serait de 37° ?

B ▶ Consommation de viande et espérance de vie

Les données du tableau ci-dessous représentent, pour l'année 2018, la consommation de viande x_i en kilogrammes par habitant et l'espérance de vie y_i (moyenne entre homme et femme), en années, de différents pays.

Pays	x_i (en kg · hab^{-1})	y_i (en années)
Australie	92	82,8
France	87,5	82,4
Paraguay	41	74
Égypte	22	70,9
Indonésie	12	69,1
Mexique	50	76,6
Ethiopie	5,2	64,8
Pakistan	8,4	66,4

1. a) À l'aide de la calculatrice représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 8.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r. Représenter la droite d correspondante.

2. a) D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il existe une corrélation entre la consommation de viande et l'espérance de vie ?

b) En 2018 la consommation de viande d'Israël était égale à 82 kg · hab^{-1}et celle d'Arabie Saoudite 40,6 kg · hab^{-1} (données de l'OCDE). En utilisant l'ajustement affine de la question **1. b)** donner une estimation de l'espérance de vie en 2018 en Israël et en Arabie Saoudite. Comparer avec la valeur réelle recherchée sur Internet.

3. Peut-on en conclure qu'il y a un lien de causalité entre la consommation de viande et l'espérance de vie ? L'affirmation : « Plus on mange de viande, plus on vit vieux » est-elle correcte ? Pourquoi ?

C ▶ Prix du timbre et consommation de lait

Dans le tableau ci-dessous sont présentés le prix du timbre (en euros) et la consommation de lait (en litres par habitant) en France de 2010 à 2015 :

Prix x du timbre (en €)	0,58	0,6	0,6	0,63	0,66	0,76
Consommation de lait (en L·hab^{-1})	57	56	55,4	54	53	51

1. À l'aide de votre calculatrice :

a) représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 6.

b) déterminer l'équation de la droite de régression de y en x ainsi que le coefficient de corrélation linéaire puis représenter la droite.

2. D'après les données obtenues avec la calculatrice peut-on dire qu'il y a une corrélation (négative) entre le prix du timbre et la consommation de lait ?

3. Peut-on en conclure qu'il y a un lien de causalité entre l'augmentation du prix du timbre et la baisse de la consommation de lait ?
L'affirmation : « Plus l'envoi de courrier est cher moins on consomme de lait » est-elle pertinente ?

Thème 9

Contenus associés
• Statistiques à deux variables .... Chapitre 9
Spécialité : Physique chimie, Enseignement scientifique
Vers le sup : Sciences

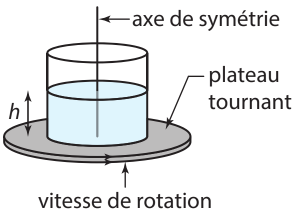
30 min

5 TP Force centrifuge

➡ **Objectif :** Ajuster avec un changement de variable

A ▶ Effet sur un liquide

Dans un laboratoire on dispose un récipient rempli d'un liquide sur un plateau tournant afin d'observer différentes caractéristiques de ce liquide en rotation.
On fait tourner le plateau à vitesse constante.



Dans le tableau suivant, on donne, en mm, la hauteur h du liquide dans le récipient en fonction de sa distance x au centre.

x (en mm)	0	5	8	10	12	15	20
h (en mm)	7,6	8,4	9,3	10,4	11,3	13,6	17,8

Le nuage de points associé ayant une forme d'arc de parabole, on décide de chercher la fonction du second degré f dont la courbe s'ajusterait au mieux au nuage.

1. On pose $y = \sqrt{h - 7{,}6}$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0	5	8	10	12	15	20
$y = \sqrt{h - 7{,}6}$							

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables x et y et en déduire que le nuage de points de cette série statistique à deux variables $(x\ ;\ y)$ peut être ajusté par une droite.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (Les coefficients seront arrondis au millième) puis en déduire l'expression de h en fonction de x.

4. En déduire que la fonction f du second degré qui modélise de façon approchée la hauteur h en fonction de la distance au centre x peut être définie de façon approchée sur $[0\ ;\ 25]$ par $f(x) = 0{,}025\,x^2 + 0{,}015x + 7{,}602$

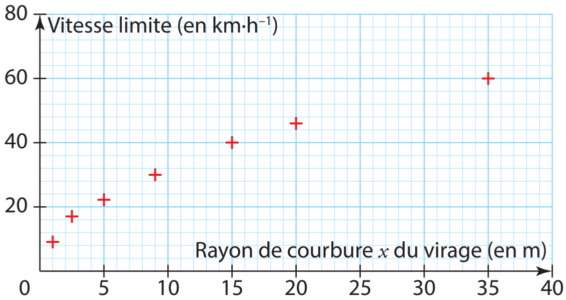
5. Afficher le tableau de valeurs de la fonction f pour les valeurs de x correspondant à celles données dans l'énoncé et comparer aux valeurs de h obtenues expérimentalement et données dans l'énoncé.

Remarque L'effet de la force centrifuge sur un fluide permet de concevoir des télescopes à miroir liquide. Une couche de mercure liquide est déposée dans un récipient en rotation autour de l'axe central, et forme ainsi un miroir parabolique.

B ▶ Effet sur une cycliste

On a relevé pendant plusieurs courses cyclistes et par temps sec, les vitesses maximales, en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, des coureurs selon le rayon de courbure, en m, d'un virage. On a obtenu les résultats suivants.

Rayon x (en m)	1,5	2,5	5	12	17,5	25	33
Vitesse v (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$)	10	13	20	30	37,5	44	50



Le nuage de points associé présentant une forme de « demi » parabole renversée on décide de chercher la fonction g de la famille « racine carrée » dont la courbe s'ajusterait au mieux au nuage :

1. On pose $y = v^2$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x	1,5	2,5	5	12	17,5	25	33
$y = v^2$							

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r des variables x et y et en déduire que le nuage de points de cette série statistique à deux variables $(x\ ;\ y)$ peut être ajusté par une droite.

3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (Les coefficients seront arrondis au millième).
Sachant que $y = v^2$, déterminer l'expression de v en fonction de x.

4. À quelle vitesse maximum peut rouler une cycliste, selon ce modèle, dans un virage dont le rayon de courbure est égal à 10 m ?

Remarque L'effet de la force centrifuge permet d'indiquer, sur la route, les limitations de vitesse à l'entrée des virages.

Dicomaths

Lexique p. 294

Tous les mots de vocabulaire utilisés en Terminale.

Rappels de Seconde et de Première p. 298

Toutes les définitions de Seconde et de Première utiles pour comprendre et utiliser les nouvelles notions de Terminale.

Formulaire de Terminale p. 307

Un résumé des principales formules utilisées en Terminale.

Formulaire de géométrie p. 312

Toutes les formules des aires et des volumes des solides usuels.

Logique et raisonnement p. 313

Toutes les définitions et propriétés pour développer son argumentation et s'entraîner à la logique de façon transversale.

Lexique

A

Ajustement affine p. 226

Ajustement exponentiel p. 228

Al-Haytham dit Alhazen (Ibn) (965-1040)

Mathématicien, physicien et philosophe arabe, ses travaux portent sur l'optique et notamment l'optique physiologique. Il énonce pour la première fois les lois de la démarche scientifique et devance des scientifiques européens (de quelques siècles parfois) à propos de plusieurs de ses découvertes.
Un astéroïde porte son nom.

Algorithme

Séquence d'instructions finie qui permet de résoudre un problème.

Archimède (de Syracuse) (287-212 av. J.-C.)

Physicien, mathématicien et ingénieur grec de Sicile (Grande Grèce), ses travaux portent particulièrement sur la géométrie, la numération et la notion d'infini. Il détermine un encadrement de π en utilisant des polygones inscrits et exinscrits.

Asymptote horizontale p. 44

Asymptote verticale p. 46

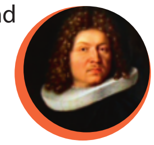
B

Barrow (Isaac) (1630-1677)

Mathématicien anglais, ses travaux concernent le calcul infinitésimal (tangentes) et l'optique géométrique. Professeur de Newton, il démissionne de sa chaire de mathématiques à Cambridge en faveur de ce dernier.

Bénéfice : Différence entre la recette et les coûts

Bernoulli (Jacques) (1654-1705)



Mathématicien et physicien suisse, grand frère de Jean.
Il définit la notion de probabilité et introduit les notations encore utilisées au XXI^{e} siècle.
Ses neveux Nicolas et Daniel poursuivent par la suite son œuvre.

Bernoulli (épreuve, loi, schéma) p. 170, p. 172

Bienaymé (Irénée-Jules) (1796-1878)

Mathématicien français, spécialisé en probabilités et en statistiques, il perpétue les travaux de Laplace en généralisant la méthode des moindres carrés.
Il énonce l'inégalité de Bienaymé démontrée plus tard par Tchebychev, devenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

C

Cauchy (Augustin Louis) (1789-1857)

Mathématicien français et professeur à l'École Polytechnique, il est connu pour son *Cours d'Analyse* où, entre autres, il définit de manière rigoureuse la convergence de séries et où il énonce (et démontre) le théorème des valeurs intermédiaires.

Cavalieri (Bonaventure) (1598-1647)

Mathématicien et astronome italien, il est connu notamment pour le principe de Cavalieri, précurseur du calcul intégral et pour la géométrie des indivisibles. Galilée, avec lequel il entretient une correspondance prolifique, dit de lui que « peu ou nul, depuis Archimède, a vu aussi profondément dans la science de la géométrie ».

Consignes (vocabulaire des)

Associer Unir des éléments dans lesquels on voit des points communs.

Balayer Observer des tableaux de valeurs successifs en réduisant au fur et à mesure le pas pour avoir un encadrement de plus en plus précis de la valeur cherchée.

Calculer Fournir une valeur numérique à l'aide des règles de calculs.

Chercher Tester plusieurs possibilités à partir des informations données dans l'énoncé, essayer de faire le lien avec des propriétés connues, utiliser la calculatrice ou un logiciel.

Communiquer Expliquer un raisonnement à l'écrit ou à l'oral, expliquer une démarche même si celle-ci n'aboutit pas à l'aide de phrases, de formule, de schémas…

Comparer Comparer deux nombres signifie déterminer s'ils sont égaux ou lequel est plus grand que l'autre.

Conjecturer Émettre une supposition à partir d'observations.

Démontrer À partir des éléments connus, effectuer un raisonnement ou un calcul pour obtenir le résultat ou la propriété cherchée.

Développer Écrire un produit sous forme d'une somme équivalente.

Encadrer Encadrer un nombre c'est donner un couple de valeurs (a ; b) entre lesquelles on est sûr que ce nombre se trouve.
On écrit une double inégalité : $a \leqslant x \leqslant b$.

Expliquer Rendre compréhensible un raisonnement, une idée.

Interpréter Faire une phrase situant le résultat obtenu dans le contexte (souvent concret) de l'exercice.

Modéliser Décrire une situation concrète en utilisant les connaissances mathématiques, par exemple : écrire une équation ou une fonction permettant d'étudier la situation proposée.

Optimiser Résoudre un problème consistant à trouver le maximum ou le minimum d'une fonction sur un ensemble.

Raisonner ↪ **Démontrer**

Représenter Fournir une information sous forme graphique : figures codées en géométrie, courbe d'une fonction, arbre ou schéma en probabilité,…

Résoudre Trouver toutes les solutions possibles.

Simplifier (une fraction) Opération qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur les plus petits possibles.

Coefficients binomiaux p. 172

Coefficient de corrélation linéaire p. 226

Concavité et convexité p. 74

Continuité p. 50

D

Densité de probabilité p. 198

Deparcieux (Antoine) (1703-1768)

Mathématicien français, il publie des traités concernant la trigonométrie et les probabilités. Son *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, dans lequel on trouve les « tables de mortalité » est considéré comme l'œuvre fondatrice de la science dite actuarielle c'est-à-dire de l'application des mathématiques à la finance et aux assurances.

Dérivée seconde p. 74

Dichotomie

Méthode itérative pour déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous intervalle dans lequel la solution de l'équation appartient. Lorsque la précision obtenue est atteinte, la méthode est arrêtée.

Droite de régression p. 226

E

Équation différentielle p. 116

Espérance (loi à densité) p. 200

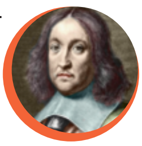
Euler (Leonhard) (1707-1783)

Mathématicien et physicien suisse. Il introduit une grande partie des notations des mathématiques modernes : fonctions trigonométriques, notation $f(x)$, lettre e pour le nombre d'Euler, lettre i pour l'unité imaginaire etc.

Extrapolation p. 230

F

Fermat (Pierre de) (1607-1665)



Magistrat, poète et mathématicien français. Il appliqua l'algèbre à la géométrie et est l'auteur de plusieurs théorèmes ou conjectures en théorie des nombres. La plus connue fut démontrée 300 ans plus tard par Andrew Wiles.

Fisher (Ronald Aylmer) (1890-1962)

Statisticien et biologiste anglais, il est l'auteur de nombreuses notions statistiques encore utilisées actuellement : analyse de variance, information de Fisher, maximum de vraisemblance, test de Fisher etc.

Fonction de répartition p. 202

G

Gauss (Carl Friedrich) (1707-1783)

Mathématicien, physicien et astronome allemand, il est surnommé « le prince des mathématiciens ». En 1801, il publie ses *Disquisitiones arithmeticae* où il définit la notion de congruence et les premières propriétés modulaires associées.

Gosset (William Sealy) dit Student (1876-1937)

Statisticien anglais, il invente le test de Student afin de stabiliser le goût de la boisson produit par son entreprise. Ce test permet de décréter notamment si la différence entre deux échantillons est pertinente.

H

Héron (d'Alexandrie) (Ie siècle ap. J.-C.)

Mathématicien grec, ses travaux portent essentiellement sur la géométrie. La formule d'Héron permet de calculer l'aire d'un triangle à partir de ses côtés et la méthode de Héron permet l'extraction de la racine carrée d'un nombre.

Huygens (Christian) (1629-1695)

Mathématicien, physicien et astronome néerlandais. Après avoir entendu parler de la correspondance entre Blaise Pascal et Pierre de Fermat, il publie le premier livre sur le calcul des probabilités dans les jeux de hasard.

I

Interpolation p. 230

Intervalle de fluctuation p. 176

L

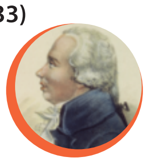
Lagrange (Joseph-Louis) (1736-1813)

Mathématicien et astronome italien naturalisé français, il élabore le système métrique avec Lavoisier pendant la Révolution. On lui doit la notation indicielle pour les suites numériques et il est à l'origine de la notation $f'(x)$.

Laplace (Pierre-Simon de) (1749-1827)

Mathématicien, astronome et physicien français, ses connaissances en astronomie lui permettent de devenir président du Bureau des longitudes. Ses travaux portent également sur le calcul intégral, les équations différentielles et les probabilités.

Legendre (Adrien-Marie) (1752-1833)



Mathématicien français, ses travaux portent entre autres sur la théorie des nombres, les statistiques et les probabilités. Il introduit le symbole dit de Legendre au cours de ses recherches pour démontrer la loi de réciprocité quadratique.

Leibniz (Gottfried Wilhelm) (1646-1716)

Philosophe, mathématicien et diplomate allemand.
Il introduit le terme de « fonction » et invente le calcul infinitésimal.

Limite (de suite) p. 20

Limite (de fonction) p. 44, p. 46

Hui (Liu) (IIIe siècle ap. J.-C.)

Mathématicien chinois, il effectue des calculs d'aires et de volumes pour trouver le volume d'un cylindre (principe de Cavalieri) ou pour donner une estimation à 3,1416 du nombre π.
On trouve également dans ses écrits la méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

Logarithme népérien p. 94

Loi binomiale p. 174

Loi exponentielle p. 204

Loi géométrique p. 178

Loi uniforme p. 170, p. 200, p. 202

Lorenz (Max Otto) (1876-1959)

Économiste américain à l'origine du concept de courbe de Lorenz. Cette dernière permet de décrire les inégalités de revenus notamment grâce au calcul de l'indice de Gini.

N

Napier (John) ou Neper (Jean) (1550-1617)

Mathématicien, physicien et astronome écossais, il invente les logarithmes afin de simplifier les calculs utilisés en astronomie.

Newton (Isaac) (1642-1727)

Philosophe, mathématicien et physicien britannique. Il est l'un des fondateurs du calcul infinitésimal avec Leibniz et est à l'origine de la formule du binôme qui porte son nom.

Nuage de points p. 224

P

Pascal (Blaise) (1623-1662)

Mathématicien, physicien et théologien français, il conçoit et fabrique une machine arithmétique : la Pascaline. Il entretient une correspondance avec Pierre de Fermat avec lequel il développe un nouveau champ de recherche en mathématiques : les calculs de probabilités.

Pearson (Karl) (1857-1936)

Mathématicien anglais, il est connu pour ses travaux concernant le coefficient de corrélation entre deux variables et le test du $\chi 2$. Il est considéré comme étant un des fondateurs des biostatistiques.

Point d'inflexion p. 76

Point moyen p. 224

Primitive (d'une fonction) p. 116

R

Recette

Somme d'argent encaissée.

Roberval (Gilles Personne de) (1602-1675)

Mathématicien et physicien français, il est l'inventeur de la balance qui porte son nom. Dans son *Traité de mécanique des poids soutenus par des puissances sur des plans inclinés à l'horizontale*, il définit précisément le mot « force ».

S

Saint-Vincent (Grégoire) (1584-1667)

Mathématicien flamand, ses travaux portent sur les calculs d'aires notamment dans ses recherches concernant la quadrature du cercle. Ses écrits, même si perfectibles, influencent grandement Leibniz lors de l'invention du calcul infinitésimal.

Scalaire

Nombre réel dans le contexte de ce manuel.

Sécante p. 72

Série statistique (à deux variables) p. 224

Suite

Une suite (u_n) est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur un ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0\}$ avec n_0 fixé, qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$, noté u_n.

Suite arithmétique

Une suite (u_n), avec $n \in \mathbb{N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Suite arithmético-géométrique p. 24

Suite géométrique

Une suite (u_n) avec $n \in \mathbb{N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q\,u_n$.
q est appelé la raison de la suite géométrique.

T

Tchebychev (Pafnouti Lvovitch) (1821-1894)

Mathématicien russe, ses domaines d'études sont la théorie des nombres, les probabilités et les statistiques. Il poursuit l'œuvre de ses prédécesseurs en démontrant de manière rigoureuse des théorèmes limites. Il démontre notamment l'inégalité énoncée par Bienaymé, devenant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, laquelle est utilisée afin de prouver la loi faible des grands nombres.

Torricelli (Evangelista) (1608-1647)

Mathématicien et physicien italien, il étudie la mécanique des fluides et énonce le principe.

V

Variable aléatoire à densité p. 198

Variance (Loi à densité) p. 200

Rappels de Seconde et de Première

Puissances

- Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

- Par convention, $a^0 = 1$.
- On considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

• $a^n \times a^m = a^{n+m}$ • $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ • $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a \neq 0)$ • $(a^m)^p = a^{m \times p}$

Racine carrée

- La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$
- Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.
- Pour tout nombre a : $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$
- Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Pour tous nombres positifs a et b (avec $b \neq 0$) : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Calcul algébrique

Distributivité

- Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a : $k(a+b) = ka + kb$ et $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Équations

- Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.
- Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.
- On considère l'équation $x^2 = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $x^2 = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **une seule solution réelle** $x = 0$.
  - si $\boldsymbol{k > 0}$, l'équation $x^2 = k$ a **deux solutions réelles** $x = \sqrt{k}$ et $x = -\sqrt{k}$.
- On considère l'équation $\sqrt{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k < 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \geqslant 0}$, l'équation $\sqrt{x} = k$ a **une seule solution réelle** $x = k^2$.
- On considère l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:
  - si $\boldsymbol{k = 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ n'a **aucune solution réelle**.
  - si $\boldsymbol{k \neq 0}$, l'équation $\dfrac{1}{x} = k$ a une **seule solution réelle** $x = \dfrac{1}{k}$.

Proportions et évolutions

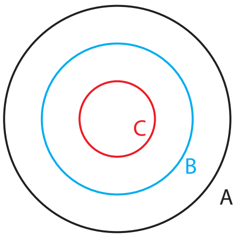
Proportions d'ensembles emboités

- On considère trois ensembles A, B et C emboités tels que $C \subset B \subset A$.

On note p la proportion de la population de B dans la population de A.

On note p' la proportion de la population de C dans la population de B.

Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à $p \times p'$.

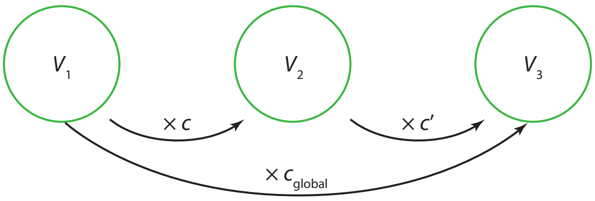


Variations absolue et relative

- On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A.
  - la variation absolue est : $V_A - V_D$
  - la variation relative, ou taux d'évolution, est : $\dfrac{V_A - V_D}{V_D}$

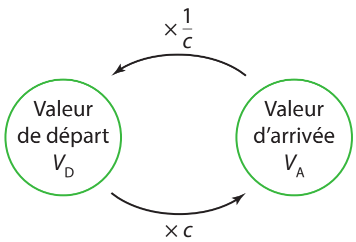
Évolutions successives

- Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à une valeur V_3, le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre V_1 et V_3. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur global et est égal à $c \times c'$ où c (respectivement c') est le coefficient multiplicateur de la première (respectivement de la seconde) évolution.



Évolution réciproque

- Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A, le taux réciproque est le taux permettant de revenir de V_A à V_D. Son coefficient multiplicateur est appelé coefficient multiplicateur réciproque et est égal à $\dfrac{1}{c}$ où c est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.



Statistiques descriptives

Moyenne

- On considère une série statistique de p valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'effectifs respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_p$ donnée dans le tableau ci-contre.

Valeur	x_1	x_2	…	x_p
Effectif	n_1	n_2	…	n_p

La **moyenne** de cette série est : $m = \dfrac{n_1 \times x_1 + n_2 \times x_2 + \ldots + n_p \times x_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$

Moyenne pondérée

- On considère une série statistique constituée de p valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ affectées de p coefficients (ou poids) $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

La **moyenne pondérée** de cette série est : $m = \dfrac{c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \ldots + c_p \times x_p}{c_1 + c_2 + \ldots + c_p}$

Probabilités

Équiprobabilité

- Une loi de probabilité est dite **équirépartie** lorsque chaque issue a la même probabilité de se réaliser, qui est :

$$\frac{1}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{n}$$

On est alors dans une situation d'**équiprobabilité.**

- La probabilité d'un évènement A est égale à la somme des probabilités des issues qui réalisent cet évènement.

Dans une situation d'**équiprobabilité**, où il y a n issues, la probabilité d'un événement A réalisé par k issues est :

$$p\,(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{k}{n}$$

Probabilité de l'évènement contraire

- Soit A un événement. On a : $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\overline{\mathrm{A}})$

Relation entre union et intersection

- Soit A et B deux événements. On a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

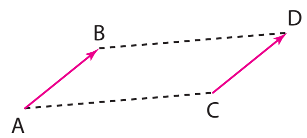
Vecteurs

Définitions

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est défini par :
  - sa **direction** (celle de la droite (AB),
  - son **sens** (de A vers B),
  - sa **norme** (la longueur du segment AB).

- ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$



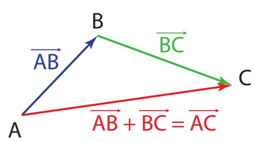
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** s'il existe un réel non nul k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

- Deux droites (AB) et (MN) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont **colinéaires**.
- Trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires.
- Soient A et B deux points distincts d'une droite d alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite d.

Relation de Chasles

- A, B, C trois points.



On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Géométrie repérée

- On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$.

• Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

• Le milieu d'un segment [AB] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

• Coordonnées du vecteur : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

• Égalité de vecteurs : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

• Somme de deux vecteurs : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

• Multiplication par un réel k : $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

• Norme d'un vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

• Déterminant de deux vecteurs : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$

- Deux vecteurs sont **colinéaires** si et seulement si leur **déterminant est nul**.
- Une **équation cartésienne** de la droite passant par le point A et de **vecteur directeur** $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

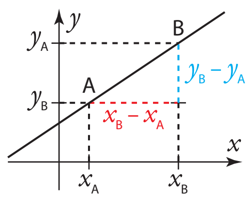
- Toute droite non verticale a une **équation réduite** de la forme : $y = mx + p$

où m s'appelle le **coefficient directeur** et p **l'ordonnée à l'origine.**

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

- Le **coefficient directeur** ou pente d'une droite (AB) est :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{si } x_A \neq x_B$$



- Toute droite **verticale** a une équation réduite de la forme : $x = k$
- Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont **parallèles** si et seulement si $m = m'$.

Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont **confondues**.

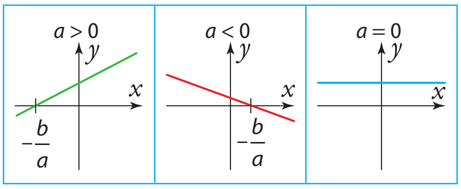
- Deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont **parallèles** si et seulement si

$$ab' - ba' = 0$$

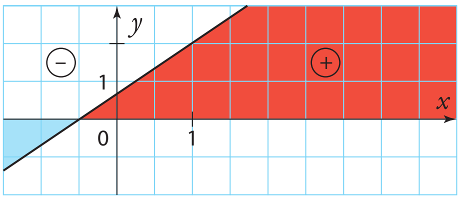
Fonctions

Fonction affine

- Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ (avec m et p réels) :
  - si $\boldsymbol{a > 0}$, alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a < 0}$, alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
  - si $\boldsymbol{a = 0}$, alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$.
- La fonction affine f s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.



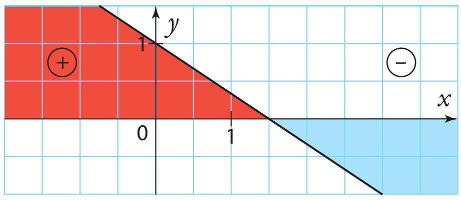
$a > 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f est négative puis positive.

$a < 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f est positive puis négative.

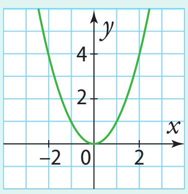
Fonctions de référence

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \to x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

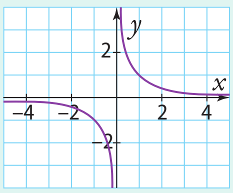


Fonction inverse

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \to \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

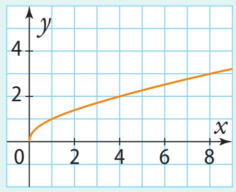


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0		$+\infty$
$x \to \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

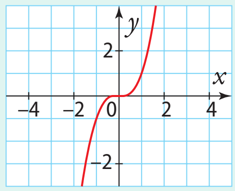


Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \to x^3$		$\nearrow$	



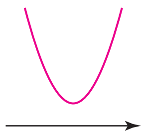
Second degré

Fonction polynôme de degré 2	$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, $a \neq 0$
Forme canonique	$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec α et β réels.
Coordonnées du sommet	$S(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$

Courbes représentatives

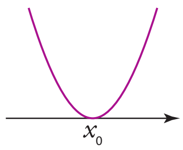
$a > 0$

$\Delta < 0$



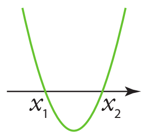
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

$\Delta = 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	

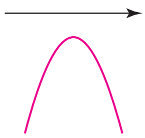
$\Delta > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

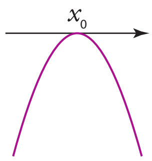
$a < 0$

$\Delta < 0$



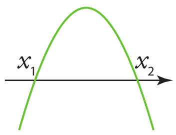
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	−	

$\Delta = 0$



x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		−	0	−	

$\Delta > 0$



x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

Factorisation

$\Delta < 0$: f n'admet pas de racine.
Il n'y a donc pas de factorisation.

$\Delta = 0$: f a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

On a alors :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

$\Delta > 0$: f admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

On a alors :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

De plus :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$	(u_n) est une suite arithmétique de raison r	(u_n) est une suite géométrique de raison q et $u_0 \neq 0$
Relation de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1} = u_p \times q^{n-p}$
Variation	• Si $r > 0$: (u_n) est strictement croissante. • Si $r < 0$: (u_n) est strictement décroissante. • Si $r = 0$, (u_n) est constante.	• Si $q > 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement croissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement décroissante. • Si $0 < q < 1$ et : • si u_0 positif : (u_n) est strictement décroissante. • si u_0 négatif : (u_n) est strictement croissante. • Si $q = 0$ ou $q = 1$: (u_n) est constante. • Si $q < 0$: (u_n) n'est pas monotone.
Somme, $n \geqslant 1, q \neq 1$	$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Dérivation

Dérivées des fonctions de référence

f est définie sur	Fonction f	Dérivée f'	f est dérivable sur
$\mathbb{R}$	c	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x	1	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$[0\,;+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations et dérivation

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonctions u et v	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u'v + v'u$
Pour k constante réelle, $k \times u$	$k \times u'$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
Si pour tout x de I, $v(x) \neq 0$: $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
Pour a et b réels : $u(ax+b)$	$a \times u'(ax+b)$
e^{ax+b}	$a \times e^{ax+b}$

Équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en un point d'abscisse a $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

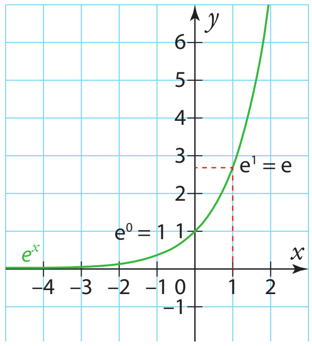
Fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\bullet\ e^0 = 1 \qquad \bullet\ e^1 = e \qquad \bullet\ \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad e^x > 0$
- Pour tous réels a et b, $n \in \mathbb{Z}$:

$\bullet\ e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad \bullet\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a} \qquad \bullet\ e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \qquad \bullet\ (e^a)^n = e^{an}$



Produit scalaire

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormé

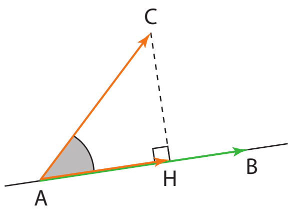
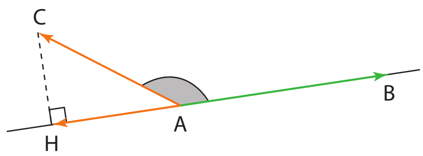
Formule analytique $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Formule géométrique $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$

Formule avec les normes $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

Projeté orthogonal

- Soit A, B et C trois points et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = +AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.	**$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires.**
	

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, ce qui se traduit par :

$$xx' + yy' = 0$$

Propriétés du produit scalaire

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

Trigonométrie

Fonctions sinus et cosinus

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$. Ce sont des fonctions périodiques de période 2π.

  • $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ • $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$

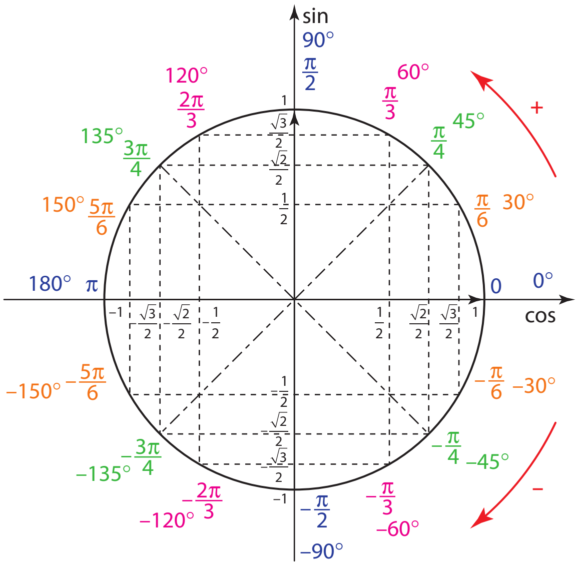
- Pour tout nombre réel x

  • $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2=1$ • $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$
  • $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$

Valeurs remarquables

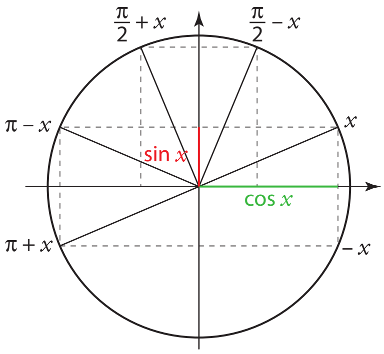
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

Cercle trigonométrique



Angles associés

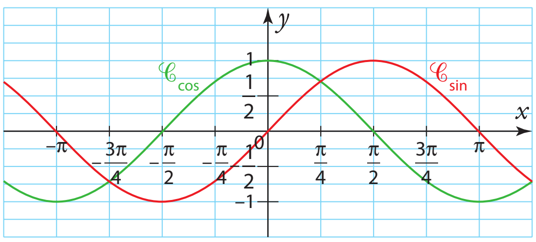
• $\cos(-x)=\cos(x)$	• $\sin(-x)=-\sin(x)$
• $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$	• $\sin(\pi-x)=\sin(x)$
• $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$	• $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$
• $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$	• $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
• $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$	• $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$



Fonctions sinus et cosinus

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, ce sont des fonctions périodiques de **période 2π**, dites « **2π-périodiques** ».

$$\sin(x+2\pi)=\sin(x) \text{ et } \cos(x+2\pi)=\cos(x)$$



La fonction sinus est impaire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'origine** du repère.

La fonction cosinus est paire

Sa courbe représentative est alors **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** du repère.

Fonction logarithme népérien

Propriétés

- Pour tout réel $x > 0$:

$$\bullet\ e^{\ln(x)} = x$$
$$\bullet\ \ln(e^x) = x$$
$$\bullet\ \ln(1) = 0$$
$$\bullet\ \ln(e) = 1\ \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$$

- La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\bullet\ \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$
$$\bullet\ \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$$

- Pour tout réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$\bullet\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\bullet\ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\bullet\ \ln(a^n) = n\ln(a)$$
$$\bullet\ \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Limites

$$\bullet\ \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\bullet\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$
$$\bullet\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Dérivabilité

- La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

- Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Fonctions

Théorème

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$

Asymptote horizontale

- La droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$
- La droite d'équation $y=\ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$.

Asymptote verticale

La droite d'équation $x=x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de f lorsque $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ou lorsque $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

Propriétés

- Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$:
  - f est **convexe** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **positive** sur I.
  - f est **concave** si et seulement si sa dérivée seconde f'' est **négative** sur I.
- Soit f est une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: si f'' s'annule en changeant de signe en $x_0\in\mathrm{I}$ alors $\mathrm{M}(x_0\,;f(x_0))$ est un **point d'inflexion** de la courbe représentative de f.

Probabilités

Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Si X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ alors :

- $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$ • $E(X) = \dfrac{1+n}{2}$ • $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a alors :

- $E(x) = p$ • $V(X) = p(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Loi binomiale

Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n ; p)$ alors, pour tout entier k compris dans $[0 ; n]$, on a :

- $p(X = k) = \dbinom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ • $E(X) = np$ • $V(X) = np(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Propriété

Pour tout nombres entiers naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$:

- $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ • $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$ • $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$

Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale, $\alpha \in]0 ; 1[$ et a et b réels.

Un intervalle $[a ; b]$ tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1 - \alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Loi géométrique

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p et k un entier naturel non nul. On a alors :

- $p(X = k) = (1-p)^{k-1} \times p$ • $p(x \leqslant k) = 1 - (1-p)^k$ • $p(x > k) = (1-p)^k$ • $E(X) = \dfrac{1}{p}$

Non vieillissement ou absence de mémoire de la loi géométrique

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

X suit une loi géométrique si et seulement si pour tous s et t des entiers naturels non nuls :

$$p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$$

Loi à densité

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur I.

La fonction de répartition de la variable X est la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = p(X \leqslant x)$.

- $E(X) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} f(x)\mathrm{d}x$ • $V(X) = \displaystyle\int_{\mathrm{I}} (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x$

Probabilités

Loi uniforme sur [a ; b]

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a ; b] alors, pour tous réels c et d compris entre a et b, on a :

$p(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$ et sa fonction de répartition est définie sur [a ; b] par

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

De plus :

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle de paramètre λ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Alors pour tout nombres positifs a, c et d :

- $p(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $p(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $p(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout nombres strictement positifs t et h, on a :

$$p_{(X>t)}(X > t + h) = p(X > h)$$

Suites

Théorème

- Toute suite **croissante et majorée** est **convergente**.
- Toute suite **décroissante et minorée** est **convergente**.

Théorème des gendarmes

Si à partir d'un certain rang N, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers un même nombre ℓ, alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.

Convergence des suites géométriques

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Primitives de fonctions usuelles

Fonction *f*	Intervalle	Primitive *F*
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$ avec k réel
$f(x) = x^n$ avec n entier relatif sauf -1	• $\mathbb{R}$ si n est un entier naturel • $]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$ si n est un entier négatif non nul sauf -1.	$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k réel
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$F(x) = \mathrm{e}^x + k$ avec k réel
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$	$F(x) = \ln(x) + k$ avec k réel

Équations différentielles

Théorème

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions de la forme $f(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ avec K réel.

Pour tous x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution telle que $f(x_0) = y_0$.

Calcul intégral

Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. Alors :

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ que l'on note aussi $[F(x)]_b^a$.

Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

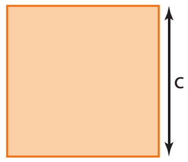
La valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Formulaire de géométrie

Aires et périmètres

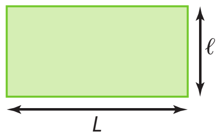
Carré



$\mathscr{A} = c^2$

$p = 4 \times c$

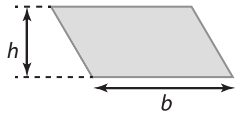
Rectangle



$\mathscr{A} = L \times \ell$

$p = 2 \times (L + \ell)$

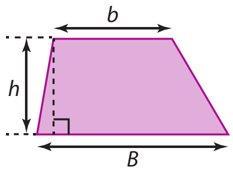
Parallélogramme



$\mathscr{A} = b \times h$

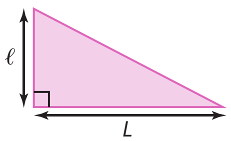
$p = 2 \times (L + \ell)$

Trapèze



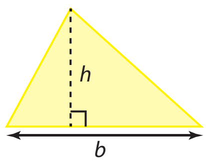
$\mathscr{A} = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

Triangle rectangle



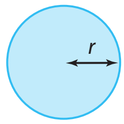
$\mathscr{A} = \dfrac{L \times \ell}{2}$

Triangle quelconque



$\mathscr{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

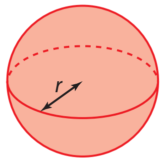
Disque



$\mathscr{A} = \pi \times r^2$

$p = 2\,\pi\,r$

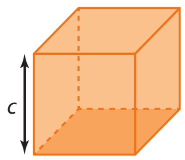
Sphère



$\mathscr{A} = 4\pi \times r^2$

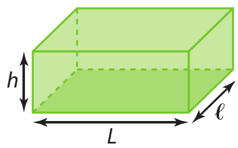
Volumes

Cube



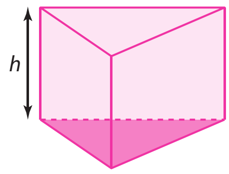
$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{base}} \times h = c^3$

Parallélépipède rectangle ou pavé



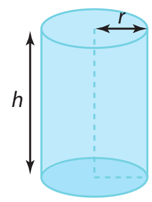
$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{base}} \times h = L \times \ell \times h$

Prisme droit



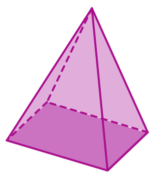
$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{base}} \times h$

Cylindre



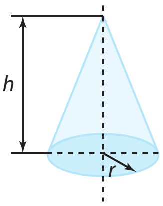
$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{base}} \times h = \pi \times r^2 \times h$

Pyramide



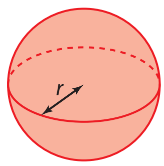
$\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A}_{\text{base}} \times h}{3}$

Cône de révolution



$\mathscr{V} = \dfrac{\mathscr{A}_{\text{base}} \times h}{3} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$

Sphère



$\mathscr{V} = \dfrac{4 \times \pi \times r^3}{3}$

1 ET et OU en mathématiques

Définition **Et**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 ET une proposition 2 sont vérifiées, cela veut dire qu'elles sont vérifiées à la fois.
Ce "ET" mathématique est très lié au symbole ∩.

Exemple

① On cherche le nombre n tel que n soit un entier pair ET appartienne à l'intervalle [3,5 ; 5,9].
Il s'agit de trouver un nombre n (s'ils existe(nt)) qui vérifie les deux conditions à la fois c'est-à-dire qui est un entier pair ET qui appartient à [3,5 ; 5,9].
Le seul nombre vérifiant ces deux conditions est 4 donc $n = 4$.

② On considère le programme **PYTHON** :

```
import random
x = random.randint(1,10)
if x > 3 and x <= 7.3:
  print("Dans l'intervalle !")
else:
  print("Pas dans l'intervalle...")
```

Le programme affiche **"Dans l' intervalle!"** si le nombre **x** vérifie à la fois **x > 3** et **x ⩽ 7,3** c'est-à-dire si $3 < x \leqslant 7{,}3$.

Définition **Ou**

En mathématiques, lorsque l'on dit qu'une proposition 1 OU une proposition 2 est vérifiée, cela veut dire qu'au moins l'une des deux est vérifiée.
Ce "OU" mathématique est très lié au symbole ∪.

Exemple

On lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Quelles sont les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 ?
Les nombres entiers entre 1 et 6 qui vérifient la proposition :
- « être pair » sont 2 ; 4 ; 6 ;
- « être strictement supérieur à 2 » sont 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Les issues qui sont paires OU strictement supérieures à 2 sont donc 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 qui sont tous les entiers entre 1 et 6 qui vérifient au moins l'une des deux conditions (éventuellement les deux pour 4 et 6).

Remarques

- Dans le langage courant, le OU est **exclusif**. Par exemple, quand sur un menu au restaurant il est écrit « fromage ou dessert » cela veut dire que l'on peut prendre soit du fromage, soit un dessert, mais pas les deux.
- Dans le langage mathématique, le OU est **inclusif**. Dans l'exemple précédent du dé à 6 faces, les nombres 4 et 6 vérifient les deux conditions à la fois cela veut dire que si on les obtient, le résultat est bien pair OU strictement supérieur à 2.

Exemple

L'algorithme suivant illustre l'exemple précédent du dé à 6 faces.

```
x ← Entier aléatoire entre 1 et 6
Si x est pair ou x>2
   Afficher "Pair ou strictement supérieur à 2"
Fin si
```

Il affiche « **Pair ou strictement supérieur à 2** » si l'entier aléatoire **x** a pour valeur 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.

2 Implication, contraposée, réciproque et équivalence

Définition **Implication**

Une implication est une proposition de la forme : SI énoncé 1 ALORS énoncé 2
Symboliquement, cela se note : énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2
Cela veut dire que si l'énoncé 1 est vérifié alors l'énoncé 2 l'est forcément (ou nécessairement) également.
On dit que l'énoncé 1 est une condition suffisante et que l'énoncé 2 est une condition nécessaire.

Exemples

1 La proposition suivante est VRAIE : SI la prise est débranchée ALORS la lampe est éteinte.
On peut la traduire par : la prise est débranchée $\Rightarrow$ la lampe est éteinte (se lit également « la prise est débranchée entraîne la lampe est éteinte »).

2 En revanche, la proposition suivante est FAUSSE : SI la lampe est éteinte ALORS la prise est débranchée.
En effet, si la lampe est éteinte, la prise peut être branchée mais l'interrupteur sur OFF.

Définition **Contraposée**

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 est vraie alors sa contraposée :
contraire de l'énoncé 2 $\Rightarrow$ contraire de l'énoncé 1 est également vraie.

Exemple

La proposition suivante est vraie : SI je viens de manger ALORS je n'ai pas faim.
Sa contraposée : SI j'ai faim (le contraire de « je n'ai pas faim ») ALORS je ne viens pas de manger (le contraire de « je viens de manger ») est également vraie.

Définition **Réciproque**

Si l'on considère une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2, on dit que :
énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 est sa réciproque.
Cette réciproque peut être vraie ou non.

Exemple

La proposition suivante est VRAIE : SI $x = 3$ ALORS $x^2 = 9$.
En revanche, sa réciproque : SI $x^2 = 9$ ALORS $x = 3$ est FAUSSE.
En effet, si $x^2 = 9$, x peut être égal à 3 ou à -3.

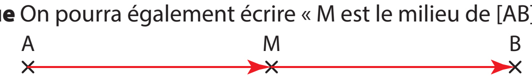
Définition **Équivalence**

Si une implication énoncé 1 $\Rightarrow$ énoncé 2 et sa réciproque énoncé 2 $\Rightarrow$ énoncé 1 sont vraies, on dit que les énoncés 1 et 2 sont équivalents.
À l'aide d'un symbole mathématique, cela se note :
énoncé 1 $\Leftrightarrow$ énoncé 2.

Exemple

Soit 3 points A, B et M. M est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ car l'implication « Si M est le milieu de [AB] alors $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. » et sa réciproque « Si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ alors M est le milieu de [AB] » sont vraies.

Remarque On pourra également écrire « M est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. »



3 Inégalités et inéquations

Définition **Inégalité**

a, b, c et k sont des nombres réels.

• Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité :

si $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$.

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité :

si $k > 0$ et $a < b$ alors $ka < kb$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

• Multiplier ou diviser par un nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité :

si $k < 0$ et $a < b$ alors $ka > kb$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$.

Définition **Inéquation**

Une inéquation est une inégalité dans laquelle une inconnue (ou des inconnues) est présente.

Remarques

- Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.
- Si on applique une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a le même ensemble des solutions.

Exemple

Résolvons l'inéquation $-2x - 8 < 4$.

$$-2x - 8 < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad -2x < 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x > -6 \text{ (on divise par } -2 \text{ qui est négatif).}$$

Les trois égalités $-2x - 8 < 4$; $-2x < 12$ et $x > -6$ sont équivalentes puisqu'elles sont obtenues successivement en ajoutant 8 aux deux membres de l'inégalité puis en les divisant par -2 et en changeant le sens de l'inégalité.

Cela veut dire que x est solution de $-2x - 8 < 4$ si et seulement si x est solution de $x > -6$ (que l'on peut voir comme une inéquation d'ensemble des solutions immédiat), autrement dit que l'ensemble des solutions de $-2x - 8 < 4$ est $]-6 ; +\infty[$.

4 Quantificateurs universels

Définition **Il existe**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'il existe un réel x (ou un entier n etc.) qui vérifie une certaine propriété, il s'agit simplement de trouver un exemple pour lequel la propriété est vérifiée.

Exemple

Montrons qu'il existe un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$.

On constate que, pour $x = 1$, on a $2x^2 - 2 = 2 \times 1^2 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 2 - 2 = 0$ donc il existe bien un réel pour lequel $2x^2 - 2 = 0$, en l'occurrence 1.

Remarques

- Si on ne voit pas $x = 1$ directement, on peut aussi résoudre l'équation $2x^2 - 2 = 0$ avec les méthodes classiques pour le retrouver : $2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.
- Notons que la résolution de $2x^2 - 2 = 0$ fait plus que montrer qu'il existe une valeur de x pour laquelle $2x^2 - 2 = 0$, elle prouve que 1 et -1 sont les deux seules valeurs.

Définition **Pour tout / Quel que soit**

Quand on veut démontrer, par exemple, qu'une propriété est vraie « pour tout réel x » ou « quel que soit le réel x », il faut montrer qu'elle est vraie en tout généralité et non pas uniquement sur quelques exemples.

Exemple

Montrons que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est impaire.

On peut commencer, au brouillon, par se convaincre que c'est vrai en calculant $1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1$, $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$; $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$; $12^2 - 11^2 = 144 - 121 = 23$; etc.

Ceci dit, nous n'avons rien démontré pour l'instant, puisqu'il faut montrer que cette propriété est vraie pour tous les entiers (c'est implicite dans l'énoncé).

Soit donc n un entier (en toute généralité) et $n + 1$ celui qui le suit, il s'agit de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair.

On calcule donc $(n + 1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui est impair quel que soit n (puisque $2n$ est un multiple de 2, donc pair, $2n + 1$ est impair).

On vient de montrer que $(n + 1)^2 - n^2$ est impair pour tout entier n (ou quel que soit l'entier n) donc la différence des carrés de deux entiers consécutifs est bien impair.

5 Type de raisonnement

Règle **Utilisation de la contraposée**

Lorsque l'on connaît une propriété, on peut utiliser sa contraposée (qui est également vraie) dans une démonstration.

Exemple

On sait que la propriété suivante est vraie : « Si n est un entier impair alors n^2 est impair. »

La contraposée de cette propriété est :

« Si n^2 n'est pas impair alors n n'est pas impair. »

Ce qui est équivalent à : « Si n^2 est pair alors n est pair ».

On a démontré cette nouvelle propriété par contraposée.

Règle **Raisonnement par l'absurde**

L'utilisation de la contraposée est assez proche d'un autre type de raisonnement, le raisonnement par l'absurde.

Un raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut montrer, puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).

On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte, donc que la propriété voulue est vraie.

Exemple

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (ne peut s'écrire sous forme d'une fraction).

On suppose que $\sqrt{2}$ est un rationnel.

Si $\sqrt{2}$ est un rationnel, alors il s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs non nuls.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ donc, en élevant au carré on a $2 = \frac{p^2}{q^2}$ d'où $p^2 = 2q^2$.

On en déduit que p^2 est pair.

De plus on sait que p est pair si et seulement si p^2 est pair.

On en déduit alors que p est pair, donc il existe p' tel que $p = 2p'$.

On a alors $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2p')^2}{2} = \frac{4p'^2}{2} = 2p'^2$, ce qui signifie que q^2 est pair, ce qui est équivalent à q pair.

On a montré que q et p sont pairs, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ car dans ce cas-là, on peut simplifier la fraction $\frac{p}{q}$ par 2, elle n'est donc pas irréductible comme annoncé.

Notre hypothèse de départ est donc fausse, autrement dit, $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Règle **Contre-exemple**

Pour infirmer une proposition (c'est-à-dire montrer qu'elle est fausse), il suffit d'en donner un contre-exemple.

Exemple

Considérons la proposition suivante : Tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers.
Pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de trouver un nombre entier impair supérieur à 2 qui ne soit pas premier.
C'est le cas de 9, qui est divisible par 3.
La proposition est donc fausse.

Remarque On dit que l'on a nié la proposition « tous les nombres entiers impairs supérieurs à 2 sont premiers ».

Règle **Raisonnement par disjonction des cas**

Lorsque qu'on démontre une propriété, il peut arriver que l'on doive traiter différents cas.
S'il en est ainsi, on peut procéder par disjonction des cas en faisant attention à bien traiter tous les cas possibles.

Exemple

Annie a souscrit un forfait téléphonique qui s'ajuste automatiquement à son nombre d'heures :
- si elle téléphone moins de 3 heures, elle sera facturée 6 euros au total quel que soit le nombre d'heures,
- si elle téléphone entre 3 heures et 5 heures, elle sera facturée 2 euros l'heure de communication,
- si elle téléphone plus de 5 heures, elle sera facturée 10 euros au total, quel que soit le nombre d'heures.

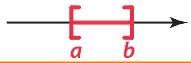
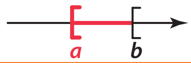
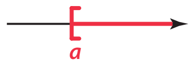
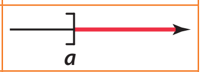
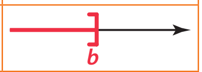
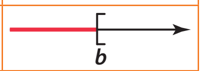
On souhaite montrer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.
Pour cela, on appelle x son nombre d'heures de communication et on va traiter les trois cas suivants :
- si $x < 3$ alors elle paie 6 euros.
- si $3 \leqslant x \leqslant 5$ alors $6 \leqslant 2x \leqslant 10$ (or $2x$ est le montant de sa facture qui est donc inférieur ou égal à 10).
- si $x > 5$ alors elle paie 10 euros.

On voit que dans les 3 cas possibles, le montant de la facture est inférieur ou égal à 10 donc on peut affirmer qu'Annie ne pourra pas avoir plus de 10 euros à payer.

6 Notations

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé intervalle et se note $[a\ ;\ b]$

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\ ;\ b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\ ;\ b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\ ;\ b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\ ;\ b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\ ;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\ ;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty; b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\ ;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\ ;+\infty[$
et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty; 0]$.

Définition **Ensemble de nombres**

- **$\mathbb{N} = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;...\}$: ensemble des entiers naturels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif.**
- **$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{Z} = \{...\ ;-3\ ;-2\ ;-1\ ;0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;...\}$: ensemble des entiers relatifs, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif.**
- **$\mathbb{Z}^*$ est l'ensemble des entiers relatifs non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux, ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.**
- **$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier relatif, b un entier relatif non nul.**
- **$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.**
- **$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls (privé de 0).**
- **$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q}$.**

Définition **Ensembles discrets**

Lorsqu'un ensemble de nombres est constitué de valeurs isolées (on dit alors que c'est un ensemble discret), on le note en écrivant tous ses éléments entre accolades, séparés par un point-virgule.

Exemple

L'ensemble des nombres impairs compris entre 0 et 12 est $\{1\ ;3\ ;5\ ;7\ ;9\ ;11\}$.

Notations Il ne faut pas confondre les accolades, les crochets et les parenthèses :
- {2 ; 5} désigne l'ensemble constitué des deux éléments 2 et 5.
- [2 ; 5] désigne l'intervalle constitué de tous les nombres réels compris entre 2 et 5 (inclus dans ce cas).
- (2 ; 5) désigne un couple dont la première coordonnée est 2 et la deuxième est 5.

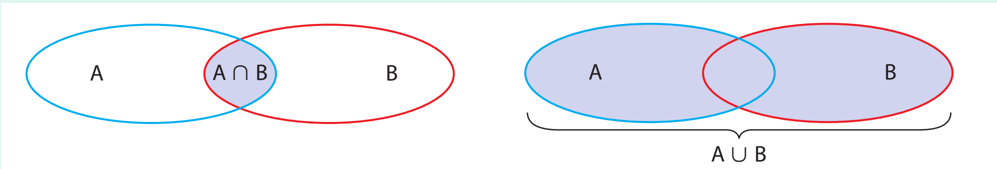
Définition Appartenance et inclusion

- Le symbole $\in$ (resp. $\notin$) désigne le fait qu'un élément **appartienne** (resp. **n'appartienne pas**) à un ensemble.
- Le symbole $\subset$ (resp. $\not\subset$) désigne le fait qu'un ensemble soit **inclus** (resp. **non inclus**) dans un autre ensemble.

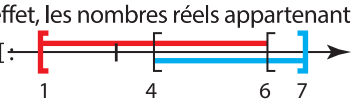
Exemples
- $5 \in \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car 5 est bien un élément de l'ensemble {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22}.
- $2{,}3 \notin]5 ; 7[$ car le nombre 2,3 n'est pas strictement compris entre 5 et 7.
- $[4 ; 5] \subset [0 ; 12]$ car l'ensemble [4 ; 5] est inclus dans l'ensemble [0 ; 12], c'est-à-dire que tous les nombres de [4 ; 5] sont également dans [0 ; 12].
- $\{1 ; 2 ; 3\} \not\subset \{2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22\}$ car {1 ; 2 ; 3} n'est pas inclus dans {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22} c'est-à-dire qu'au moins un élément de {1 ; 2 ; 3}, en l'occurrence 1, n'est pas dans {2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 22}.

Définition Intersection et réunion

Soit A et B deux ensembles.
- **$A \cap B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A ET à B, c'est-à-dire aux deux ensembles à la fois.**
- **$A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à A OU à B, c'est-à-dire à au moins l'un des deux ensembles.**



Exemples
- $[4 ; 7] \cap [1 ; 6[= [4 ; 6[$ En effet, les nombres réels appartenant à la fois aux deux intervalles [4 ; 7] et [1 ; 6[sont les réels de l'intervalle [4 ; 6[.



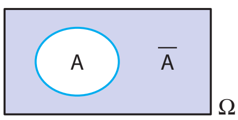
- $\{1 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9\} \cup \{2 ; 3 ; 9 ; 11\} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 9 ; 11\}$ car ce sont tous les nombres qui appartiennent à au moins l'un des deux ensembles (attention : on n'écrit qu'une seule fois les éléments qui appartiennent aux deux ensembles à la fois, ici 3 et 9).

Règle Complémentaire

Soit A un ensemble (inclus dans un ensemble B).
Le complémentaire de A (dans B), noté $\overline{A}$ ou B\A est l'ensemble des valeurs (de B) qui n'appartiennent pas à A.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{[5 ; 6[} =]-\infty ; 5[\cup [6 ; +\infty[$ c'est à dire tous les réels sauf ceux qui appartiennent à [5 ; 6[.

Remarque La notation du complémentaire est la même que celle de l'évènement contraire en probabilités.
Cela est normal puisque dans ce contexte, $\overline{A}$ l'évènement contraire de A, est le complémentaire de A dans l'univers Ω.



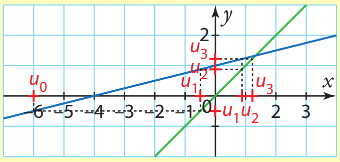
Corrigés

1 Suites et modèles discrets

À vous de jouer !

1 On note u_n la distance parcourue par Nawal n jours après le premier jour d'entraînement.
$u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1{,}1u_n$

3



5 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme)

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 5 = +\infty$ (par produit et somme)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par produit).

7 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2(-n+2)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+2 = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

9 **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Donc $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. Donc $u_n \geqslant n^2 - 5$.

b) Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5 = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-5 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant -5 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 - \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \frac{1}{n} = -5$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$.

13 **a)** $0 < 0{,}6 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$ et de premier terme $u_0 = -3$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

15 $x = 2x + 5 \Leftrightarrow -x = 5$
$\Leftrightarrow x = -5$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - (-5) = u_n + 5$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 5$
$= 2u_n + 5 + 5$
$= 2(u_n + 5)$
$= 2v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 3$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n$.
Or $v_n = u_n + 5$, donc $u_n = v_n - 5$.
Donc $u_n = 3 \times 2^n - 5$.

17 **1.** $x = 3x + 8 \Leftrightarrow -2x = 8$
$\Leftrightarrow x = -4$

Soit (v_n) la suite définie par :
$v_n = u_n - (-4) = u_n + 4$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 4$
$= 3u_n + 8 + 4$
$= 3u_n + 12$
$= 3(u_n + 4)$
$= 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 2$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 3^n$.
Or $v_n = u_n + 4$, donc $u_n = v_n - 4$.
Donc $u_n = 2 \times 3^n - 4$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} - u_n = 2 \times 3^{n+1} - 4 - (2 \times 3^n - 4)$
$= 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n$
$= 2 \times 3^n \times (3 - 1)$
$= 2 \times 3^n \times 2$
$= 4 \times 3^n$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

19 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 5\,000$.

2. Chaque année, 60 % des abonnés se réinscrivent, et 10 % des personnes non abonnées s'abonnent.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1v_n$.

3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1(5\,000 - u_n)$.
$u_{n+1} = 0{,}6u_n + 500 - 0{,}1u_n$
$= 0{,}5u_n + 500$

4. $x = 0{,}5x + 500 \Leftrightarrow 0{,}5x = 500$
$\Leftrightarrow x = 1\,000$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 1\,000$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 1\,000$
$= 0{,}5u_n + 500 - 1\,000$
$= 0{,}5u_n - 500$
$= 0{,}5\,(u_n - 1\,000)$
$= 0{,}5w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $w_0 = u_0 - 1\,000 = -400$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -400 \times 0{,}5^n$.
Or $w_n = u_n - 1\,000$, donc $u_n = w_n + 1\,000$.
Donc $u_n = -400 \times 0{,}5^n + 1\,000$.

Exercices d'application

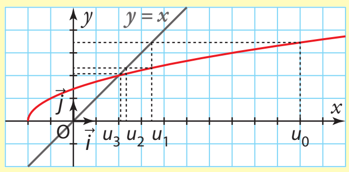
32 **1.** $400 + 2 \times 10 = 420$.
Elle paiera 420 €.

2. **a)** $u_n = 400 + 2n$

b) $u_n = 434 \Leftrightarrow 400 + 2n = 434$
$\Leftrightarrow n = 17$

Elle a acheté 17 billets de train.

35 **1.** et **2.**



3. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

38 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

45 **1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1 = n + 2n + 1$.

Donc $3n + 1 > n$.

Donc $\sqrt{3n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc $u_n > \sqrt{n}$.

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

51 **a)** $4 > 1$ et $2 > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) $4 > 1$ et $-3 < 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

c) (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Or $0 < \frac{1}{3} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$.

56 **1.** $u_0 = 2$

$u_1 = 4 \times u_0 - 9 = -1$

$u_2 = 4 \times u_1 - 9 = -13$

2. $u_1 - u_0 = -3$ et $u_2 - u_1 = -12$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = 13$.

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 4u_n - 9 - 3 \\ &= 4u_n - 12 \\ &= 4(u_n - 3) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1$.

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1 \times 4^n$.

c) Or $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3$.

Donc $u_n = -1 \times 4^n + 3 = 3 - 4^n$.

d) $u_{10} = -1\,048\,573$

Exercices d'entraînement

60 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}\right)$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{n^3}{n^2 \times \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)} = \dfrac{n}{1 - \frac{4}{n^2}}$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - \dfrac{1}{n^2 - 4} \leqslant a_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 - \dfrac{1}{n^2 - 4} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

67 **1.** $15\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1000 = 14\,500$.

Il y aura 14 500 habitants en 2021.

2. On note u_n le nombre d'habitants en $2020 + n$.

En 2020, il y a 15 000 habitants, donc $u_0 = 15\,000$.

Chaque année, le maire prévoit que 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitants s'installeront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1000 = 0{,}9u_n + 1000$.

3. $x = 0{,}9x + 1\,000 \Leftrightarrow 0{,}1x = 1\,000$

$\Leftrightarrow x = 10\,000$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 10\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0{,}9\,u_n + 1\,000 - 10\,000 \\ &= 0{,}9u_n - 9\,000 \\ &= 0{,}9(u_n - 10\,000) \\ &= 0{,}9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10\,000 = 5\,000$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5\,000 \times 0{,}9^n$.

Or $v_n = u_n - 10\,000$, donc $u_n = v_n + 10\,000$.

Donc $u_n = 5\,000 \times 0{,}9^n + 10\,000$.

4. $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 10\,000$.

Le nombre d'habitants de la ville tend vers 10 000.

78 **1.** $a_1 = a_0 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) + b_0 \times \frac{5}{100} = 0{,}326$.

En 2018, la société A va entretenir 32,6 % des ascenseurs.

2. Chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B ;
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A ;
- les autres ascenseurs ne changeront pas de société.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right)a_n + \frac{5}{100}b_n$

$a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$

Or $a_n + b_n = 1$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05(1 - a_n)$.

Donc $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

3. $x = 0{,}92x + 0{,}05 \Leftrightarrow 0{,}08x = 0{,}05$

$\Leftrightarrow x = 0{,}625$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - 0{,}625$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 0{,}625 \\ &= 0{,}92a_n + 0{,}05 - 0{,}625 \\ &= 0{,}92a_n - 0{,}575 \\ &= 0{,}92\left(a_n - \frac{0{,}575}{0{,}92}\right) \\ &= 0{,}92(a_n - 0{,}625) \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = a_0 - 0{,}625 = -0{,}325$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n$.

Or $v_n = a_n - 0{,}625$, donc $a_n = v_n + 0{,}625$.

Donc $a_n = -0{,}325 \times 0{,}92^n + 0{,}625$.

4. $0 < 0{,}92 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}92^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}625$.

La proportion d'ascenseurs entretenus pas la société A va tendre vers 62,5 %.

Préparer le BAC

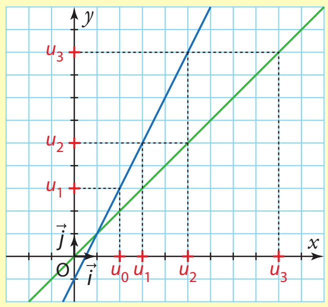
86 B   **87** D

88 A   **89** C

90 B   **91** D

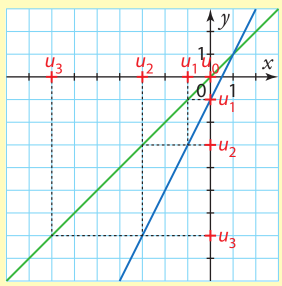
92 B   **93** A

94 **1.** et **2.**



3. La suite (u_n) semble croissante et avoir pour limite $+\infty$.

4.



La suite (u_n) semble décroissante et avoir pour limite $-\infty$.

95 **1.** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{2}$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$ **4.** $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 3$

5. $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ **6.** $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = -\infty$

96 **1. a)** $u_1 = \frac{1}{4} \times 20 = 5$ et $u_2 = \frac{1}{4} \times 5 = 1{,}25$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{1}{4}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c) $0 < \frac{1}{4} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. a) $L_1 = u_1 = 5$

$L_2 = u_1 + u_2 = 6{,}25$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$= u_1 + u_1 \times \frac{1}{4} + \ldots + u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{4} \times \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$
$$= u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

c) Or $0 < \frac{1}{4} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \frac{20}{3}$.

97 **1.** $1500 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1560$.

Donc le salaire de Thomas en 2021 est 1 560 €.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 + \frac{4}{100}\right) u_n = 1{,}04 u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,500 \times 1{,}04^n$.

3. $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$

$$= u_0 + u_0 \times 1{,}04 + \ldots + u_0 \times 1{,}04^9$$
$$= u_0 \times (1 + 1{,}04 + \ldots + 1{,}04^9)$$
$$= u_0 \times \frac{1 - (1{,}04)^{10}}{1 - 1{,}04}$$
$$= 1500 \times \frac{1 - (1{,}04)^{10}}{-0{,}04}$$
$$= -37\,500 \times (1 - (1{,}04)^{10})$$
$$\approx 18\,009{,}16$$

Thomas aura gagné environ 18 009,16 €.

98 **1.** $u_1 = 5\,750$ et $u_2 = 6\,312{,}5$

Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2\,000 = 0{,}75 u_n + 2\,000.$$

2. a)

```
u=5000
for in range(1,13)
      u=0.75*u+2000
print(u)
```

b) Elle a 7 904,97 € sur son compte le 1er janvier 2021.

3. $x = 0{,}75x + 2\,000 \Leftrightarrow x = 8\,000$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000$

$$= 0{,}75 u_n + 2\,000 - 8\,000$$
$$= 0{,}75(u_n - 8\,000)$$
$$= 0{,}75 v_{n+1}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme

$v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0{,}75^n$.

$v_n = u_n - 8\,000$, donc $u_n = v_n + 8\,000$.

Donc $u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^{n+1} - (8\,000 - 3\,000 \times 0{,}75^n)$$
$$= 3\,000 \times 0{,}75^n\,(-0{,}75 + 1)$$
$$= 750 \times 0{,}75^n$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$0 < 0{,}75 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}75^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 8\,000$.

La somme sur le compte augmentera et tendra vers 8 000 €.

99 **1.** $u_0 = 20$ et $v_0 = 2\,980$.

2. Le nombre d'habitants dans le village est constant.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3\,000$.

3. Chaque année :

- 25 % des bénévoles quittent l'association ;
- 5 % habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente deviennent bénévoles.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{25}{100}\right) u_n + \frac{5}{100} v_n.$$

$u_{n+1} = 0{,}75 u_n + 0{,}05 v_n$.

4. On a $u_{n+1} = 0{,}75 u_n + 0{,}05(3\,000 - u_n)$.

Donc $u_{n+1} = 0{,}7 u_n + 150$.

5. $x = 0{,}7x + 150 \Leftrightarrow 0{,}3x = 150$

$\Leftrightarrow x = 500$.

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 500$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$$= 0{,}7 u_n + 150 - 500$$
$$= 0{,}7 u_n - 35$$
$$= 0{,}7\left(u_n - \frac{350}{0{,}7}\right)$$
$$= 0{,}7(u_n - 500)$$
$$= 0{,}7 w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $w_0 = u_0 - 500 = -480$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -480 \times 0{,}7^n$.

Or $w_n = u_n - 500$, donc $u_n = w_n + 500$.

Donc $u_n = -480 \times 0{,}7^n + 500$.

6. $0 < 0{,}7 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$.

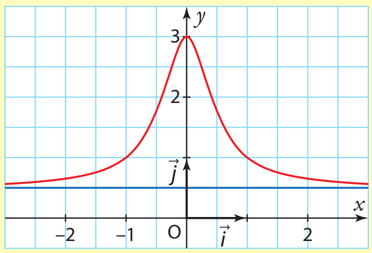
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 500$.

Le nombre de bénévoles de l'association dans le village tendra vers 500.

2 Limites et continuité

À vous de jouer !

1 **1.**



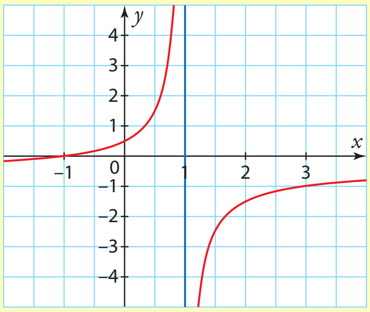
On peut conjecturer que :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0{,}5.$$

2. On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et la droite d'équation $y = 0{,}5$ est plus petite par exemple de $a = 10^{-3}$.

```
from math import*
def f(x):
    return (2*x**2+3)/(4*x**2+1)
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-0.5)>=a:
        x+=1
    return x
```

3 **1.**



La fonction f est dérivable en 0 car la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

2. La fonction n'admet pas de limite en 1 mais admet une limite à droite et une limite à gauche.

3. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

5 **1.**

2. La fonction n'est pas définie en 4 mais admet une limite : $\lim\limits_{x\to4} f(x) = 0{,}25$.

7 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. On n'a pas de limite en 0 mais une limite à gauche et à droite :

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

9 Pour $x > 1$, $-\dfrac{1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$.

Par le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

12 **1.** $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 8)$

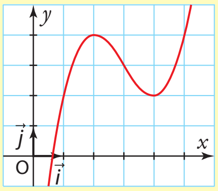
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ « ou » $x = 4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
f	-12	↗	8	↘	4	↗	$+\infty$

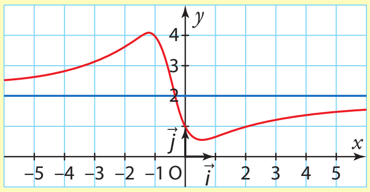
2. a) D'après le tableau de variations, si $x > 2$, $f(x) > 2$ donc ne peut s'annuler.

Si $x \in [0\,;2]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0)\,f(2) < 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe une seule fois l'axe des abscisses.



14 **1.**



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

2. a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

b) Par passage à la limite, on trouve 2 comme limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

16 **1.** $f'(x) = 12g(x)$ avec $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

2. a) $g'(x) = 3x^2 + x + 2 > 0$ car $\Delta = -23$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur $\mathbb{R}$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) $\alpha \approx -0{,}57$ à 10^{-2} près

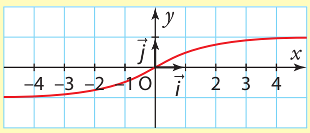
c) Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

3.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Exercices d'application

25 **1.**



2. On peut conjecturer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +1$.

3. On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et les droites d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$ est plus petite par exemple de $a = 10^{-3}$.

31 On a $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$.

37 **1.** On a, en factorisant par x^3,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. En faisant la somme de deux fonctions,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

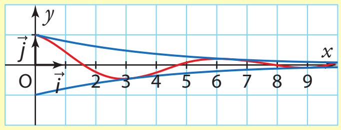
3. En faisant le quotient de deux fonctions,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

4. D'après les limites de la fonction exp,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

41 **1. a)**



b) On peut conjecturer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $-\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{4}} = 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

43 **1.** D'après le tableau de variation :

- si $x < 1$, $f(x) > -3$ donc ne peut s'annuler ;
- si $x \geqslant 1$, f est continue, strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leqslant -3 \leqslant f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution.

2. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.

Exercices d'entraînement

47 **1. a)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

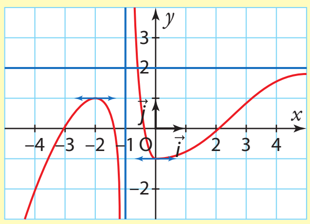
b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

2. La fonction f n'admet pas de limite en -1 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.

3. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet 2 asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 2$.

4. Courbe possible.



50 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$.

2. On obtient deux asymptotes d'équations $x = -2$ et $y = 2$.

55 **A ▶ 1.** $g'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en -1 et 1.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+		+	
g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	14	↗	$+\infty$

2. Sur [1 ; 3], la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

3. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B ▶ 1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$.

2. f' est du signe de g sur $]1 ; +\infty[$.

x	1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Préparer le BAC

67 C

68 A et B

69 D

70 D

71 C

72 C

73 B

74 C

75 C

76 **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

77 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\infty$

2. $\mathscr{C}_f$ admet trois asymptotes en -1 ; 2 et $-\infty$ d'équations respectives $x = -1$; $x = 2$ et $y = 2$.

78 **1.** $D_f = \mathbb{R}/\{1\}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

79 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{2x-5} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x+4}{x^2-4} = +\infty$

80 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 2x + 5 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 5x - 2} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{3x+5}{x^2+x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 2} = -\dfrac{1}{2}$

81 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin x \, e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{e^x} = 0$

82 **1.** $f'(x) = e^x - 1$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	-2	↗	$+\infty$

2. a) Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

b) $f(2) \approx 2{,}39$ et $f(3) \approx 14{,}09$ donc $\alpha \in [2 ; 3]$.

On trouve $\alpha \approx 2{,}2$ à 10^{-1} près.

83 **1. a)** $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	0		1		5
$g'(x)$	0	−	0	+	
g	-1	↘	-2	↗	174

b) Sur $[0 ; 1[$, $g(x) \leqslant -1$ donc ne s'annule pas.

Sur [1 ; 5], la fonction g est continue strictement croissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

c) $g(1) = -1$ et $g(2) = 3$ donc $\alpha \in [1 ; 2]$.

On trouve $1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}7$.

d) Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

2. a) $f'(x) = \dfrac{-1(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0		α		5
$f'(x)$		−	0	+	
f	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$-\dfrac{2}{63}$

$f(\alpha) \approx -0{,}118$

3 Convexité

À vous de jouer !

1 D'après le graphique, la courbe de f est en-dessous de ses sécantes sur $[-1 ; 0{,}5]$ et est au dessus de ses sécantes sur $[0{,}5 ; 1{,}5]$. Donc f est convexe sur $[-1 ; 0{,}5]$ et concave sur $[0{,}5 ; 1{,}5]$.

5 f' est décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur [0 ; 1] donc f est convexe sur cet intervalle.

7 $f(x) = xe^{-x}$

donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$

et $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$.

Or $e^{-x} > 0$, pour tout réel x, et $x - 2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 2$. Donc f est convexe sur $[2 ; +\infty[$ et f est concave sur $]-\infty ; 2]$.

9 Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0{,}7$.

11 $f(x) = (x+1)e^{-x}$

donc $f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})$
$= (1 - x - 1)e^{-x} = -xe^{-x}$

et $f''(x) = -1e^{-x} + (xe^{-x}) = e^{x}(x-1)$

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc f'' change de signe pour $x = 1$. Donc le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ a pour coordonnées $(1 ; f(1))$ c'est-à-dire $(1 ; 2e^{-1})$.

13 **a)** et **b)** Graphiquement, h est concave sur $[0 ; +\infty[$ et convexe sur $]-\infty ; 0]$.

c) Le point d'inflexion a pour coordonnées $(0 ; h(0))$.

15 $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$; $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ et

$f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

f'' change de signe pour $x = 1$, donc la croissance commence à ralentir au bout du 1er mois, c'est-à-dire à partir du 1er février 2020.

Exercices d'application

31 f est concave sur $[-2 ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$.

35 f' est croissante sur $]-\infty ; 6]$ et f' est décroissante sur $[6 ; +\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty ; 6]$ et f est concave sur $[6 ; +\infty[$.

42 **1.** $f'(x) = 3x^2 + 12x$ et $f''(x) = 6x + 12$.

2. $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $6x + 12 \geqslant 0$ si et seulement si $x \mapsto -\frac{12}{6}$ si et seulement si $x \geqslant -2$.

Donc f est convexe sur $[-2 ; +\infty[$.

47 Graphiquement, les points d'inflexion sont ceux d'abscisses –2 et 2.

50 **1.**

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée $6 + (6 - 4)e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}$.

Préparer le BAC

76 B et C

77 D

78 D

79 B

80 A

81 A

82 D

83 D

84 A et D

85 D

86 **1.** On étudie une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la dérivée est également définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$g'(x) = \frac{1}{x} + 3$.

2. $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Comme $g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

87 **1.** $-x + 1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2. $f'(x) = -\frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{-x+1}}$ et

$f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^3}e^{-\frac{1}{-x+1}}$. Or $-e^{-\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel $x \in D_f$. De plus, $\frac{1}{(x-1)^3} > 0$ si et seulement si $x > 1$, donc $f''(x) < 0$ si et seulement si $x > 1$.

3. Donc f est convexe sur $]-\infty ; 1[$ et concave sur $]1 ; +\infty[$.

88 **1.**

$$f'(x) = 0 + 14e^{-\frac{x}{5}} + (14x + 42)\left(-\frac{1}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right)e^{-\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$.

$-14x + 28 \geqslant 0$ si et seulement si $28 \geqslant 14x$ si et seulement si $\frac{28}{14} \geqslant x$ si et seulement si $2 \geqslant x$.

D'où le tableau de variations suivant.

x	0	2	60
Variations de f	112 ↗	$70 + 70e^{-0,4}$	↘ $70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$. Le point A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$.

b) $\frac{14}{25}e^{-\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x, donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x - 7 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 7$. Donc f est convexe sur $[7 ; 60]$ et concave sur $[0 ; 7]$.

c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

89 **1.** $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$ donc

$f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x$
$= (-5x^2 - 10x + 5)e^x$.

Par suite, $f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x$
$= -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5$
$= 400 - 100 = 300 > 0$

d'où $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Donc $5x^2 + 20x + 5 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty ; -2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{3} ; +\infty\right[$.

Or $-e^x < 0$ pour tout réel x.

Donc $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si :
$x \in \left]-\infty ; -2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{3} ; +\infty\right[$ et
$f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si :
$x \in \left[-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}\right]$.

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$ sont donc $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur $\left]-\infty ; -2 - \sqrt{3}\right] \cup \left[-2 + \sqrt{3} ; +\infty\right[$ et convexe sur $\left[-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}\right]$.

90 **A ▶ 1.** Graphiquement, g est convexe sur $[-5 ; 1]$ et g est concave sur $[1 ; 3]$.

2. Graphiquement, le point d'inflexion a pour coordonnées $(1 ; 6{,}5)$.

B ▶ 1. $g(x) = (3 - x)e^x + 1$

donc $g'(x) = (-1)e^x + (3 - x)e^x + 0$
$= (3 - x - 1)e^x = (2 - x)e^x$

et $g''(x) = (-1)e^x + (2 - x)e^x$
$= (2 - x - 1)e^x = (1 - x)e^x$

2. a) $e^x > 0$ pour tout réel x et $1 - x \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc $g''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc g est convexe sur $]-\infty ; 1]$ et concave sur $[1 ; +\infty[$.

b) $g''(x)$ change de signe pour $x = 1$. De plus $g(1) = (3 - 1)e^1 + 1 = 2e + 1$

donc son point d'inflexion a pour coordonnées $(1 ; 2e + 1)$.

3. $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$
$T_1 : y = (2 - 1)e^1(x - 1) + (2e + 1)$
$T_1 : y = ex - e + 2e + 1$
$T_1 : y = ex + e + 1$

4. a) $h(x) = (ex + e + 1) - g(x)$
$h'(x) = e - g'(x) = e - (2 - x)e^x = (x - 2)e^x + e$
$h''(x) = 1e^x + (x - 2)e^x + 0 = (x - 1)e^x$
$= -(1 - x)e^x = -g''(x)$.

b) $g''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc $h''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $1 \geqslant x$ donc h' est décroissante sur $]-\infty ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) $h'(1) = (1 - 2)e^1 + e = -e + e = 0$

Donc le minimum de h' est 0 sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout réel x, $h'(x) \geqslant 0$.

d) Comme $h'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) $h(1) = (e \times 1 + e + 1) - g(1) = 2^e + 1 - (2e + 1) = 0$

f) h est négative sur $]-\infty ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$. Donc la tangente au point d'abscisse 1 est en dessous de $\mathscr{C}_g$ pour $x \leqslant 1$ et au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $x \geqslant 1$ donc elle traverse la courbe au point de coordonnées $(1 ; 2e + 1)$.

Le point de coordonnées $(1 ; 2e + 1)$ est bien un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_g$.

4 Fonction logarithme népérien

À vous de jouer !

1 **a)** $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $e^{2x} = -1$; $S = \{\varnothing\}$

c) Conditions d'existence : il faut que $4 - 2x > 0$ $\Leftrightarrow x \in I =]-\infty ; 2[$, $\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; 2 - \frac{e}{2}\right[$.

d) $e^{x+1} \geqslant 2 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow x \in [\ln(2) - 1 ; +\infty[$.

3 **a)** Conditions d'existence : $x \in]-1 ; +\infty[$ et $x \in]-\infty ; 0[$ d'où $x \in I =]-1 ; 0[$.

$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$ et $x \in I \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) Conditions d'existence :

$x \in I =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$

$\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5) \Leftrightarrow x^2 - 1 \leqslant 5$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6} ; \sqrt{6}\right] \cap I$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{6} ; -1\right[\cup \left]1 ; \sqrt{6}\right]$

5 **a)** $2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$

b) $-\ln 5$

c) $4 - 2\ln 5$

d) $-\frac{4}{5} - \ln 5$

7 a) $n\ln\left(\frac{5}{9}\right)\leqslant \ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$ soit $n \geqslant 8$

b) $2^{n-1}(2-7) > -3 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow n < \dfrac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)}+1$

soit $n = 0$

9 1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$ or, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x^2 > 0$ et, pour tout $x \in]0\,;1[$, $1-x > 0$.

Donc $f'(x) > 0$ et f croissante sur $]0\,;1[$.

Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $1-x<0$ donc $f'(x) < 0$ et f décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

11 $f'(x) = \dfrac{\frac{1\times x^2-(1+x)\times 2x}{x^4}}{\frac{1+x}{x^2}} = \dfrac{-(x+2)}{x(1+x)}$

13 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - 2 = +\infty$

donc, par produit des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x)-2) + \left(1-\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}$

$= \dfrac{\ln(x)-2}{x^2} + \dfrac{\frac{x-1}{x}}{x}$

$= \dfrac{\ln(x)-2+x-1}{x^2}$

$= \dfrac{\ln(x)+x-3}{x^2} = \dfrac{u(x)}{x^2}$

b) $u'(x) = \frac{1}{x}+1 = \frac{1+x}{x}$ pour $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$, $u'(x) > 0$; par conséquent, u est croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$, or $u(\mathrm{e}) = \mathrm{e}-2 > 0$ donc u est positive sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

c) f' est donc positive sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ donc f est croissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

15 1. $f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2+13{,}5}$

2.

x	$-2{,}5$		0		$2{,}5$
$-4x$		$+$	0	$-$	
$-2x^2+13{,}5$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\ln(13{,}5)$	$\searrow$	0

3. Puisque f admet un minimum, on en déduit que f est positive sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

Exercices d'application

25 1. a) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $2x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathrm{I}$

b) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} =]\mathrm{e}\,;+\infty[$; $x - \mathrm{e} = \mathrm{e} \Leftrightarrow x = 2\mathrm{e} \in \mathrm{I}$

c) $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-2}$

d) $5-2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

2. a) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} =]-\infty\,;1[$; $1-x > 1$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x < 0$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;0[$.

b) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} = \left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$; $3-2x \leqslant \mathrm{e}$

et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\,;+\infty\right[$

et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\mathrm{e}}{2}\,;\frac{3}{2}\right[$

c) $\mathrm{e}^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\ln 3[$

d) $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-3) \geqslant 0$ or $\mathrm{e}^x > 0$ pout tout x, cela revient donc à résoudre $\mathrm{e}^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \ln 3$. Donc $x \in [\ln 3\,;+\infty[$

30 1. a) Conditions d'existence : $x > 2$ et $x < 4$ donc $x \in \mathrm{I} =]2\,;4[$.

$3x-6 = 4-x$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

b) Conditions d'existence : $x \in \mathrm{I} =]0\,;8[$;

$x^2-8x+12 = 0$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow S = \{2\,;6\}$.

c) Conditions d'existence : $x \in \mathrm{I} =]5\,;+\infty[$;

$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(x-5)$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x-5$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x^2-6x-5 = 0$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x = 3+\sqrt{14}$.

2. a) $x > \frac{1}{2}$ et $\ln(5(4x-2)) < \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}}{40}\right[$

b) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} =]1\,;5[$; $5-x \geqslant x-1$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \leqslant 3$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in]1\,;3]$

c) Conditions d'existence :

$x \in \mathrm{I} =]2\,;+\infty[$; $x^2-5 \geqslant 0$ et $x \in \mathrm{I} \Leftrightarrow x \in \left]\sqrt{5}\,;+\infty\right[$

34 1. a) $\ln 25 - \ln 15 = \ln\left(\frac{25}{15}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 16 - \ln 5 = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$

2. a) $4\ln 5 + 2\ln 5 + 3\ln 5 = 9\ln 5$

b) $3\ln 5 - \ln 5 - 2\ln 5 - 2\ln 5 = -2\ln 5$

38 a) $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

soit $n \geqslant 23$

b) $n\ln\left(\frac{9}{7}\right) \geqslant \ln(10^6) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$ soit $n \geqslant 55$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leqslant 0{,}001 \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{3}{5}\right) \leqslant \ln(0{,}001)$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ soit $n \geqslant 14$

d) $\ln(0{,}004) > 2n\ln\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}004)}{2\ln\left(\frac{8}{9}\right)}$

soit $n \geqslant 24$.

43 a) $f'(x) = \frac{1}{x}(x-2) + (\ln x + 3)\times 1$

$= 1 - \frac{2}{x} + \ln x + 3 = -\frac{2}{x} + \ln x + 4$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(3\ln x+1) - (x-\ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x+1)^2}$

$= \dfrac{3\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(3\ln x+1)^2} = \dfrac{3x\ln x - 2x - 1}{x(3\ln x+1)^2}$

c) $f'(x) = 3(\ln(x) - 2x + 1)^2 \times \left(\frac{1}{x} - 2\right)$

$= \dfrac{3(1-2x)(\ln(x)-2x+1)^2}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{3 - 1\times\ln x - x\times\frac{1}{x}}{2\sqrt{3x - x\ln(x)}} = \dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{3x-x\ln(x)}}$

48 a) $D_f = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$; $f'(x) = \frac{8}{8x-4} = \frac{2}{2x-1}$

b) $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

c) $D_f =]-\infty\,;-2[\, \cup\,]1\,;+\infty[$;

$f'(x) = \dfrac{\frac{1\times(2x+4)-(x-1)\times 2}{(2x+4)^2}}{\frac{x-1}{2x+4}}$

$= \dfrac{6}{(2x+4)(x-1)}$

d) $D_f =]0\,;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$.

50 **1. a)** $g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x}$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$; $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $g(1) = 0$, par conséquent g est négative sur $]0\,;1[$ et positive sur $]1\,;+\infty[$.

2. a) $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4}$

$= \dfrac{x^4 - x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3}$

$= \dfrac{g(x)}{x^3}$

b) $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$ donc f est décroissante sur $]0\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$.

52 **1. a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - 4x = +\infty$ or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{4}\\ x<\frac{3}{4}}} 3 - 4x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{4}\\ x<\frac{3}{4}}} f(x) = -\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2-x}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$.

2. a) $f'(x) = \dfrac{-4}{3-4x}$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$;

$f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$.

b) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{-1(x+1) - (2-x) \times 1}{(x+1)^2}}{\dfrac{2-x}{x+1}}$

$= \dfrac{-3}{(x+1)(2-x)} < 0$

pour $x \in]-1\,;2[$, donc f est décroissante sur $]-1\,;2[$.

Préparer le BAC

71 C **72** C

73 B **74** D

75 C **76** C

77 **1.** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$; pour $x \in \left]e^{-\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

2. $g(x) > f(x) \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$ on pose $X = \ln x$ on a alors $X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$ à l'aide du calcul de Δ. On a alors :

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 3) > 0$.

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$\ln x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$ et sur $]e^3\,;+\infty[$.

3. a) $h'(x) = 4\ln x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4\ln x - 1}{x}$;

$h'(x) > 0$ pour $x \in \left]e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\right[$, donc h est croissante sur $\left]e^{\frac{1}{4}}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;e^{\frac{1}{4}}\right[$.

b) $h(x) = 0 \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - \ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x\,(2\ln x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^{\frac{1}{2}}$.

$\mathscr{C}_h$ coupe l'axe des abscisses en $M(1\,;0)$

et $N\left(e^{\frac{1}{2}}\,;0\right)$.

78 **1.** $A(0\,;1) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; graphiquement on voit que $f'(0) = -1$

or $f'(x) = 2ax + b - \dfrac{1}{x+1}$

d'où $f'(0) = -1 \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = 0$

$f'(1) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 2a - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$

d'où $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1)$.

2. $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{x+1}$

sur $]-1\,;+\infty[$;

$x + 1 > 0$

donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 2x - 1$.

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}82$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1} x + 1 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} -\ln(X) = +\infty$, de plus

$\lim\limits_{x\to-1} x^2 + 1 = 2$ donc, par somme des limites,

on a $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$.

3. Cela revient à résoudre :

$f'(x) \times f'(0) = -1 \Leftrightarrow \left(2x - \dfrac{1}{x+1}\right) \times (-1) = -1$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$

avec $x \in]-1\,;+\infty[\Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$,

il existe donc une tangente à $\mathscr{C}_f$ perpendiculaire à T_0.

4. $f(x) - h(x) = -\ln(x+1) + \ln(x^2 + 6x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x+1} > 0$ avec $x \in]-1\,;+\infty[$ ce qui est toujours le cas sur $]-1\,;+\infty[$ par conséquent la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathscr{C}_h$ sur $]-1\,;+\infty[$.

79 **1.** 1,2 traduit la hausse de 20 % et le « -28 » le fait de prélever 28 poissons à la fin de chaque année.

2. a) $w_{n+1} = u_{n+1} - 140 = 1{,}2u_n - 168$

$= 1{,}2(u_n - 140) = 1{,}2w_n$

Par conséquent la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}2$.

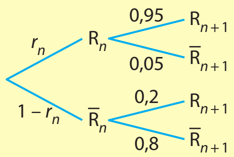
$w_n = w_0 \times 1{,}2^n = 10 \times 1{,}2^n$ d'où

$u_n = w_n + 140 = 10 \times 1{,}2^n + 140$.

b) $u_n > 200 \Leftrightarrow 1{,}2^n > 60 \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(6)}{\ln(1{,}2)}$ soit $n \geqslant 10$

Par conséquent la responsable devra prévoir l'achat d'un autre aquarium au bout de 10 ans, soit en 2028.

80 **1.** $P(R_{n+1}) = r_{n+1} = 0{,}95r_n + 0{,}2(1 - r_n)$ d'après la loi des probabilités totale, d'où $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.



2. a)

```
R←0,9
N←1
Tant que R>0,80001
        N←N+1
        R←0,75*R+0,2
Fin tant que
```

b) $0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8 \leqslant 0{,}80001$

$\Leftrightarrow 0{,}7^{n-1} \leqslant 0{,}0001 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}7)} + 1$ donc c'est vérifié à partir de $n = 27$.

À partir de la 27e semaine, la probabilité que le client rapporte la bouteille de son panier devient inférieure à 0,80001.

81 **1. a)** On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^2 - 2 = +\infty$ et $\lim \ln(x) = +\infty$, donc par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 10x + \dfrac{2}{x} = \dfrac{10x^2+2}{x}$

Or, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $10x^2+2 > 0$ et $x > 0$, donc $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0	$0{,}5$	α	1	$+\infty$
Variations de g		$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$
Signe de g		$-$	0	$+$	

c) Sur l'intervalle $]0{,}5\,;1[$, g est une fonction continue, strictement croissante telle que $g(0{,}5) < 0$ et $g(1) > 0$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0{,}5\,;1[$. Sur $]0\,;0{,}5[$, la fonction g est négative, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution et sur $]1\,;+\infty[$ la fonction g est positive donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

d) *cf.* tableau précédent.

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} 5x^2 - 2\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0^+$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b) $f'(x) = \dfrac{\left(10x - \dfrac{2}{x}\right)\times 2x - (5x^2 - 2\ln x)\times 2}{4x^2}$

$= \dfrac{g(x)}{2x^2}$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$ = Signe de g		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, on en déduit que f admet un minimum en α valant

$f(\alpha) = \dfrac{5\alpha^2 - 2\ln\alpha}{2\alpha}$ or on a

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha = 2 - 5\alpha^2$, d'où

$f(\alpha) = \dfrac{5\alpha^2 - 2 + 5\alpha^2}{2\alpha} = \dfrac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

d) $\alpha > 0{,}5$ donc $5\alpha^2 - 1 > 0$, d'où $\dfrac{5\alpha^2-1}{\alpha} > 0$.

Le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0\,;+\infty[$.

5 Primitives et équations différentielles

À vous de jouer !

1 **a)** $y'(x) = 5x^2 + 3x = f(x)$

b) $y'(x) = -\dfrac{3}{3x^4} = -\dfrac{1}{x^4} = f(x)$

3 **a)** $F(x) = \dfrac{5}{12}x^4$ **b)** $F(x) = \dfrac{1}{4x^4}$

5 **1.** $F'(x) = 1 \square \ln(x) + x \square \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

2. L'ensemble des primitives sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + K$, avec K réel.

7 **a)** $F'(x) = e^{-x}$

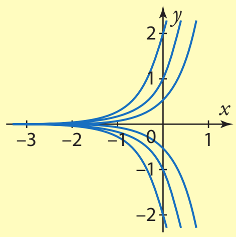
b) $F'(x) = \dfrac{1}{3}\ln(x^3+5)$

c) $F'(x) = (x^2 + x - 7)^2$

9 **1. a)** L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K \mapsto Ke^{2x}$, avec K réel.

b) L'ensemble des solutions sont les fonctions, $y_K \mapsto Ke^{-5x}$, avec K réel.

2. Si K est positif, alors la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif la courbe est en dessous de cet axe.



11 **a)** Une solution particulière est la fonction constante $-\dfrac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto -\dfrac{1}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

b) Une solution particulière est la fonction constante $\dfrac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto \dfrac{2}{5} + Ke^{-5x}$, avec K réel.

c) $y' = y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$

Une solution particulière est la fonction constante 3.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K x \mapsto 3 + Ke^{-x}$, avec K réel.

d) $4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{5}{4}$

Une solution particulière est la fonction constante 5.

13 **1** $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\dfrac{2}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-\frac{2}{3}x}$, avec K éel.

2. $y_k(0) = e \Leftrightarrow Ke^{-\frac{2}{3}\times 0} = e \Leftrightarrow K = e$.

Donc $f : x \mapsto e \square e^{-\frac{2}{3}x} = e^{1-\frac{2}{3}x}$.

3. $f'(x) = -\dfrac{2}{3}e^{1-\frac{2}{3}x} < 0$ pour tout réel x.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. $f(x) = 5 \Leftrightarrow e^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 - 3\ln(5)}{2}$.

15 **1.** Les solutions sont $y_K \mapsto Ke^{-0{,}035x}$, avec K réel.

2. $y_K(0) = 7 \Leftrightarrow K = 7$ donc $g(x) = 7e^{-0{,}035x}$.

3. $g(100) = 7e^{-0{,}035\times 100} = 7e^{-3{,}5}$

$\approx 0{,}211$ mW $> 0{,}08$ mW,

donc le signal sera encore détectable.

Exercices d'application

27 **a)** $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + e^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

36 **a)** $F(x) = e^x$ **b)** $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \ln(x)$ **d)** $F(x) = \dfrac{1}{x}$

38 **a)** Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = e^x + k$, avec k réel.

b) Sur $I = \left]0\,;+\infty\right[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$, avec k réel.

c) Sur $I = \left]0\,;+\infty\right[$, $F(x) = \ln(x) + k$, avec k réel.

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{8}x^8 + k$, avec k réel.

42 **a)** $F(x) = x^4 + x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x$

b) $F(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{3}x^3 + 5x$

c) $F(x) = e^x + \dfrac{1}{4}x^4$

d) $F(x) = 2e^x + x^3 + 5x$

48 **a)** $F(x) = e^{x^2-1}$

b) $F(x) = (x^2 + x - 1)^2$

c) $F(x) = (\ln(x))^2 + 3$

55 **1.** b **2.** d **3.** a

62 **a)** Les solutions sont $y_k : x \mapsto \dfrac{1}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto 4 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$, avec K réel.

c) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{3}{2} + Ke^{2x}$, avec K réel.

d) Les solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto \frac{-1}{5} + Ke^{\frac{5}{2}x}$, avec K réel.

67 **1.** $Q(t) = \frac{0{,}1}{\text{k}}(1 - \text{e}^{-\text{k}t})$

2. $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = \frac{0{,}1}{\text{k}}$ donc dépend de k. La limite évolue de façon inverse à k, elle correspond à la quantité de pénicilline présente dans le sang à long terme. Si k est élevé, alors la quantité est faible ; si k est faible (mais en restant positif), alors la quantité est élevée.

3. $Q(180) = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}1}{\text{k}} \Leftrightarrow \text{k} = \frac{\ln(2)}{180}$

Préparer le BAC

96 A **97** B

98 B **99** A

100 D **101** A

102 D **103** D

104 **1.** Les solutions de l'équation sont de la forme $C\text{e}^{kt}$, avec C réel.

$y(0) = N \Leftrightarrow C\text{e}^{k\times 0} = N \Leftrightarrow C = N$.

Donc $y(t) = N\text{e}^{kt}$.

2. $y(2) = 4N \Leftrightarrow N\text{e}^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = -\ln(2)$

Donc $y(t) = N\text{e}^{\ln(2)t} = 2^t N$.

$y(3) = 2^3 N = 8N$.

Au bout de 3 heures, il y a $8N$ microbes.

3. $y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200$.

105 **1.** a **2.** d **3.** b **4.** c

106 **1.** $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$

2. Pour $f(x) = \frac{4}{x} - 3 + 4\ln(x)$ on a $f'(x) = \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x}$

donc on vérifie bien que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

3. $F'(x) = 4\ln x + \frac{1}{x}(4x + 4) - 7 = \frac{4}{x} + 4\ln x - 3$.

107 **1.** $T' = -0{,}1(T - 20)$

2. a) Si $T(t) = 20$ alors $T'(t) = 0$ donc vérifie bien l'équation.

b) $T(t) = 20 + Ke^{-0{,}1t}$ et, avec $T(0) = 100$, on obtient $K = 80$, donc $T(t) = 20 + 80\text{e}^{-0{,}1t}$.

108 **1.** $P(t) = \frac{1}{N(t)}$ alors $P'(t) = \frac{-N'(t)}{(N(t))^2}$.

Ainsi $N'(t) = 0{,}07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$

$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{0{,}07}{N(t)} - 0{,}07\cdot10^{-3}$

$\Leftrightarrow \frac{-N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{-0{,}07}{N(t)} + 0{,}07\cdot10^{-3}$

$\Leftrightarrow P'(t) = -0{,}07P(t) + 0{,}07\cdot10^{-3}$.

2. $P(t) = 10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}$, soit

$N(t) = \frac{1}{10^{-3} + Ke^{-0{,}07t}}$ avec $N(0) = 100$

on a $K = \frac{1}{100} - 10^{-3} = 0{,}009$, donc

$N(t) = \frac{1}{10^{-3} + 0{,}009\text{e}^{-0{,}07t}}$, valeur qui est toujours inférieure à 1 000.

6 Calcul intégral

À vous de jouer !

1 On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 2x$. L'intégrale est l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 4 et 10.

$\int_2^5 2x\text{d}x = \frac{(4+10) \square 3}{2} = 21\text{ u.a.}$

3 $\mathcal{A}_i = \frac{5}{10}\left(\ln(1) + \ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + ... + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right)\right)$

$\mathcal{A}_i = \frac{5}{10}(\ln(1 \times 1{,}5 \times 2 \times 2{,}5 \times \ldots \times 5{,}5) \approx 5{,}28\text{ u.a.}$

$\mathcal{A}_i = \frac{5}{10}\left(\ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + ... + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) + \ln(6)\right)$

$\mathcal{A}_i = \frac{5}{10}(\ln(1{,}5 \times 2 \times 2{,}5 \times \;\; \times 5{,}5 \times 6) \approx 6{,}18\text{ u.a.}$

5 **a)** $\int_{-1}^{4}(x-1)^2\text{d}x = \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{4} = 1 - \left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{11}{3}$

b) $\int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}\text{d}x = \left[\ln(x^3 - x)\right]_2^3$

$= \ln 24 - \ln 6 = \ln 4$

7 $\int_{-1}^{0} f(x)\text{d}x = \int_{-1}^{0}(x+1)\text{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\text{d}x$

$= \frac{1}{2} + \ln(2)$

9 $\frac{1}{2}\int_0^2 \text{e}^{-10t}\text{d}t = -\frac{1}{20}(\text{e}^{-20} - 1)$

11 f est négative sur $[-5 ; -3]$ donc

$\mathcal{A} = -\int_{-5}^{-3}\frac{1}{x}\text{d}x = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

13 $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$.

2 et (-1) sont les solutions du trinôme donc $f - g$ est négative sur $[-1 ; 2]$.

$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)\text{d}x = 4{,}5\text{ u.a.}$

15 **1.** $F'(t) = ((-20t - 20)\text{e}^{-t})'$

$= (-20t - 20)'\,\text{e}^{-t} + (-20t - 20)(\text{e}^{-t})'$

$= -20\text{e}^{-t} + 20\text{e}^{-t} + 20t\text{e}^{-t} = f(t)$

2. $\int_0^{10} f(t)\text{d}t = -220\text{e}^{-10} + 20 < 20$.

Ils respectent bien le cahier des charges (de justesse).

Exercices d'application

28 **1.** 6 **2.** 12

34 **1.** 0,2

2. Aire colorée = 0,2 ;

Aire hachurée $= 0{,}2 \times \frac{1}{1{,}2} = \frac{1}{6}$

3. Aire des 5 rectangles hachurés :

$0{,}2\left(\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1\,627}{2\,520}$

Aire des 5 rectangles colorés :

$0{,}2\left(1 + \frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}6} + \frac{1}{1{,}8}\right) = \frac{1\,879}{2\,520}$

La fonction inverse est décroissante donc

$\frac{1\,627}{2\,520} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x}\text{d}x \leqslant \frac{1\,879}{2\,520}$

37 **a)** -4 **b)** 49,5

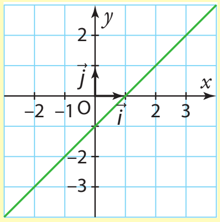
c) 1 **d)** 42,5

41 $\int_{-1}^{4} f(t)\text{d}t = \int_{-1}^{2}\text{d}t + \int_2^3(-t+3)\text{d}t + \int_3^4(t+3)\text{d}t = 10$

44 **1.** $\frac{13}{3}$

2. C'est la longueur du rectangle de largeur 4 et d'aire $\int_{-2}^{2} f(x)\text{d}x$.

49 **1.**



2. a) –4,5 **b)** 2

3. $f \leqslant 0$ sur [–2 ; 1] et $f \geqslant 0$ sur [1 ; 3]

4. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5$ u.a.

5. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{1} -f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4{,}5 + 2$

$= 6{,}5$ u.a.

Exercices d'entraînement

52 **1.** $g'(x) = \ln(x) + x \square \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ donc g est une primitive de f.

2. 1

57 $\mathscr{A} = \int_{0}^{1} t\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t = 0{,}5 + \ln(3)$

66 **1.** F est la primitive de $f(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t^2}$ qui s'annule en 0 donc $F'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2}$.

F' est positive sur $\mathbb{R}_+$. F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. $F(0) = 0$ et F est croissante, F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

68 **1.** $f(x) > g(x)$ si $x \in]2 ; +\infty[$.

2. $\mathscr{A}_{ABC} = \int_{-4}^{2} (g(x) - f(x))\mathrm{d}x = 18$ u.a.

3. $\mathscr{A} = \int_{2}^{7} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = 12{,}5$ u.a.

73 **1.** $f'(x) = -0{,}04\mathrm{e}^x + 1$

$f'(x) > 0$ si $x < \ln(25)$

f est croissante sur [0 ; ln 25], décroissante sinon.

2. f est continue et décroissante de [ln 25 ; +∞[sur [1,21 ; –∞[0 ∈ [1,21 ; –∞[. Donc il admet un unique antécédent noté α.

$\alpha \approx 4{,}5$

3. $-0{,}04(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2) + 4$

4. $q_0 = f(\ln(25)) = \ln(25) - 2$

5. $q_1 = \alpha \times 10$ (l'unité est la dizaine de pièces)

6. $\dfrac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = -0{,}02(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2) + 2$

Préparer le BAC

82 D

83 B

84 B et D

85 B et D

86 A

87 B et D

88 A et C

89 **a)** 0,5

b) 10

c) 10,5

90 c

91 **1.** $F'(x) = f(x)$

2. –12

92 $\dfrac{1}{x+1}$ est positive sur [0 ; 1] donc $\int_{0}^{1} \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ est l'aire sous la courbe entre 0 et 1.

$\int_{0}^{1} \dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \ln 2$.

93 **1.** f est positive sur [–2 ; 0].

2. $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$

94 **a)** $\int_{-2}^{-1} (x+3)^2 = \dfrac{7}{3}$

b) $\int_{-3}^{2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 3)\mathrm{d}x = \dfrac{355}{12}$

95 **a)** $\int_{-2}^{1} \ (2x+1) - (x^2 + 3x - 1)\ \mathrm{d}x = 4{,}5$

b) $\int_{1,5}^{2} \left[(-10\mathrm{e}^{-x}) - (-x^2)\right]\mathrm{d}x$

$= 10\mathrm{e}^{-2} - 10\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} - \dfrac{37}{24}$

95 **1.** $f'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x = (2x+2)\mathrm{e}^x$

2. $\mathrm{I} = \dfrac{2}{\mathrm{e}}$

3. La fonction est positive.

97 **1.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \dfrac{2-x}{x}$

x	0		2		5
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	$-2 + 2\ln(2)$	↘	

3. a) $f(1) = 0$

b) f est continue et strictement décroissante de [3 ; 4] sur [–3 + 2ln (3) ; –2 + 2ln 2].

0 ∈ [–3 + 2ln (3) ; –2 + 2ln 2] donc 0 admet un unique antécédent dans [3 ; 4].

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [3 ; 4]. $\alpha \approx 3{,}51$.

c) f est positive sur [1 ; α], négative sinon.

4. a) $g'(x) = f(x)$

b) $\mathscr{A} = \int_{1}^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x = [g(x)]_1^{\alpha} = g(\alpha) - g(1)$

c) $\mathscr{A} \approx 0{,}64$ ua. Or 1 ua = 2 × 5 cm² = 10 cm² donc $\mathscr{A} \approx 6{,}4$ cm².

7 Lois discrètes

À vous de jouer !

1 **1.** F prend les valeurs 1 ; 2 et 3 avec la même probabilité $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ donc F suit la loi uniforme sur {1 ; 2 ; 3}.

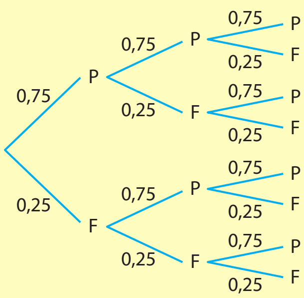
2. $p(F \leqslant 2) = p(F = 1) + p(F = 2) = \dfrac{2}{3}$.

3 **1.** Il y a soit 0 boule rose, avec une probabilité $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$; soit 1 boule rose, avec une probabilité $\dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ donc R suit la loi $\mathscr{B}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

2. Il faudrait que la probabilité d'obtenir une boule rose soit $\dfrac{1}{4}$ c'est-à-dire qu'il y ait 40 boules au total donc il faudrait ajouter 25 boules vertes.

5 **1.** On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir « PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0{,}75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement une fois PILE est $3 \times 0{,}75 \times 0{,}25^2 = 0{,}140\,625$ (4ᵉ, 6ᵉ et 7ᵉ chemins en partant du haut).

7 **1.** X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0{,}5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

2. $p(X=11)=\binom{20}{11}\times 0{,}5^{11}\times 0{,}5^{20-11}$
$=\binom{20}{11}\times 0{,}5^{20}\approx 0{,}16$

9 1. $p(X>6)=1-p(X\leqslant 6)\approx 0{,}62$
2. $p(3\leqslant X<12)=p(X\leqslant 11)-p(X\leqslant 2)\approx 0{,}97$

11 $\alpha=0{,}1$ et on tabule $p(Y\leqslant x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
38	0.0061
39	0.0106
40	0.0177
41	0.0285
42	0.0444
43	0.0667
44	0.0967
45	0.1356
46	0.184
47	0.2419
48	0.3084

X=48

Donc l'intervalle est [45 ; 100].

13 1. F donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« obtenir FACE ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 donc F suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}2$.
2. $p(F=3)=(1-0{,}2)^{3-1}\times 0{,}2=0{,}128$.
3. $p(F\leqslant 4)=1-(1-0{,}2)^4=0{,}5904$.
4. $E(F)=\dfrac{1}{0{,}2}=5$ donc on peut « espérer » obtenir FACE en cinq essais.

15 1. $\binom{4}{2}=6$
2. $\binom{6}{2}=\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=5+10=15$

17 $p_{X>4}(X\geqslant 8)=p_{X>4}(X>7)$
$=p_{X>4}(X>4+3)$
$=p(X>3)=0{,}25^3\approx 0{,}016$

19 • Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance une pièce équilibrée. A suit la loi $\mathcal{B}(0{,}5)$ donc, en moyenne, on obtient $E(A)=0{,}5$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.
• Soit B la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance deux fois la pièce truquée. B suit la loi $\mathcal{B}(2\,;0{,}2)$ donc, en moyenne, on obtient $E(B)=0{,}4$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

Il faut donc privilégier le lancer de la pièce non truquée.

Exercices d'application

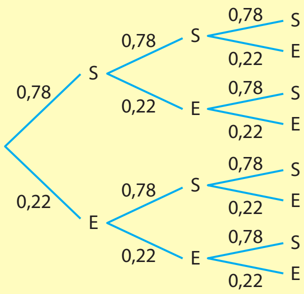
34 1. C suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;15\}$.
2. $E(C)=\dfrac{1+15}{2}=8$ et $V(C)=\dfrac{15^2-1}{12}\approx 18{,}7$.
3. $p(C>4)=p(5)+\ldots+p(15)=\dfrac{11}{15}$

38 En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi l'option mathématiques complémentaires » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p=0{,}27$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est « L'élève n'a pas choisi l'option mathématiques complémentaire » auquel cas, $p=0{,}73$.

41 1. • PILE c'est-à-dire 0 fois FACE avec une probabilité $\dfrac{2}{3}$;
• FACE c'est-à-dire 1 fois FACE avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$;
donc les valeurs prises par X sont bien 0 et 1 avec $p(X=1)=\dfrac{1}{3}$ donc $p=\dfrac{1}{3}$.
2. $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{1}{3}\sqcup\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

44 1. On doit supposer que les lancers sont indépendants.
2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.



3. a) $0{,}78\times0{,}22\times0{,}22+0{,}22\times0{,}78\times0{,}22+0{,}22\times0{,}22\times0{,}78\approx 0{,}113$
b) $0{,}78^3+3\times0{,}78^2\times0{,}22\approx 0{,}876$

47 $\binom{10}{10}=1$ et $\binom{100}{0}=1$

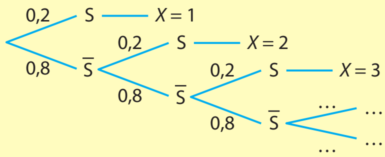
51 1. En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est « obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n=20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« obtenir rouge ») est $p=\dfrac{18}{37}$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{18}{37}$.
2. On cherche
$p(X=9)=\binom{20}{9}\times\left(\dfrac{18}{37}\right)^9\times\left(\dfrac{19}{37}\right)^{11}\approx 0{,}168$.

53 a) Environ 0,197. b) Environ 0,366.
c) Environ 0,861. d) Environ 0,66.

57 1. $E(X)=20\times 0{,}83=16{,}6$
2. $E(Y)=100\times 0{,}79=79$

62 a) [0 ; 30] b) [0 ; 33]

70 1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« réussir un carreau ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 donc X suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}2$.
2. On a :



$p(X=2)=0{,}8\times 0{,}2=0{,}16$.
3. $p(X=5)=0{,}8^4\times 0{,}2=0{,}08192$ c'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau au 5e essai.
4. $p(X\leqslant 3)=1-0{,}8^3=0{,}488$ c'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau avant le 4e essai.

82 En « prolongeant le triangle de Pascal », on trouve :
• $\binom{7}{2}=21$ • $\binom{6}{5}=6$ • $\binom{7}{6}=7$
• $\binom{5}{4}=5$ • $\binom{7}{3}=35$

85 La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles trouvés suit la loi binomiale de paramètres $n=30$ et $p=0{,}8$.
1.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
APP SUR + POUR ΔTbl

X	Y1
18	0.0095
19	0.0256
20	0.0611
21	0.1287
22	0.2392
23	0.393
24	0.5725
25	0.7448
26	0.8773
27	0.9558
28	0.9895

X=18

Donc l'intervalle cherché est [19 ; 28].
2. [19 ; 30] donc il est sûr au seuil de 99 % de trouver au moins 19 articles.

92 Soit X la variable aléatoire donnant le rang du trajet correspondant au premier contrôle. X suit la loi géométrique de paramètre $p=0{,}05$.
On cherche $p_{X>15}(X\geqslant 30)=p_{X>15}(X>29)$
$=p_{X>15}(X>15+14)=p(X>14)=0{,}95^{14}$
$\approx 0{,}488$.

96 **1.** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}09$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}05$.

2. $E(X) = 10 \times 0{,}09 = 0{,}9$ et $E(Y) = 20 \times 0{,}05 = 1$.

En moyenne, on obtient un peu plus de tickets gagnants avec l'option 2.

Préparer le BAC

102 B

103 D

104 B

105 C

106 A

107 B

108 B

109 C

110 B

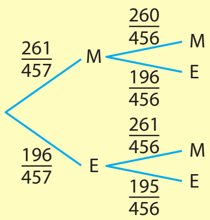
111 **1.** X donne le nombre de succès (« l'élève mange à la cantine ») lorsque l'on réalise $n = 237$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de probabilité de succès $p = 0{,}93$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 237$ et $p = 0{,}93$.

2. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leqslant k) \geqslant 0{,}95$: la calculatrice donne $k = 227$.

3. Il faut prévoir au minimum 227 repas si l'on veut être sûr au seuil de 95 % que tous les élèves se présentant aient un repas.

112 **1.** Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.

2.



3. a) $\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \approx 0{,}491$ (2e et 3e chemins).

b) Appelons E_1 (resp. E_2) l'événement « le 1er (resp. 2e) titre est électro ».

On cherche :

$$p_{E_2}(E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{196}{457} \times \frac{195}{456}}{\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{195}{456}}$$

$$\approx 0{,}428$$

113 La hauteur de la première barre est $p(X = 1) = 0{,}2$, la hauteur de la dixième barre est $p(X = 10) \approx 0{,}027$ et l'allure générale est typique de la décroissance exponentielle.

114 Voir méthode 8.

115 • Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la première expérience. En moyenne, on obtient 0,25 succès (loi de Bernoulli de paramètre 0,25).

• Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la deuxième expérience. En moyenne, on obtient $E(Y) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ succès (Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{12}$).

On choisit la deuxième expérience.

116 **1.** Soit A la variable aléatoire donnant le rang du premier appareil avec défaut trouvé.

Les tirages étant assimilables à des tirages avec remise, A suit la loi géométrique de paramètre 0,02.

a) On cherche :

$p(A \leqslant 30) = 1 - (1 - 0{,}02)^{30} = 1 - 0{,}98^{30} \approx 0{,}455$.

b) $E(A) = \frac{1}{0{,}02} = 50$, donc après 50 appareils.

c) On cherche :

$p_{A>50}(A > 75) = p_{A>50}(A > 50 + 25) = p(A > 25)$

par propriété de non vieillissement, donc

$p_{A>50}(A > 75) = 0{,}98^{25} \approx 0{,}603$.

d) $p_{A>25}(A < 50) = 1 - p_{A>25}(A \geqslant 50)$

$= 1 - p_{A>25}(A > 49)$

$= 1 - p(A > 24) = 1 - 0{,}98^{24}$

$\approx 0{,}384$.

2. D suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,500$ et $p = 0{,}02$.

a) $p(D < 35) \approx 0{,}799$ et $p(D \geqslant 30) \approx 0{,}525$.

b) $[20 ; 41]$

c) Non car $40 \in [20 ; 41]$.

8 Lois de probabilité à densité

À vous de jouer !

1 **1.** g est une fonction polynôme donc continue sur $[0 ; 1]$. Pour tout réel x, $3x^2 \geqslant 0$. Donc la fonction g est positive sur $[0 ; 1]$. $\int_0^1 3x^2\,dx = [x^3]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$. Donc g est une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.

2.

$p(X \geqslant 0{,}25) = \int_{0{,}25}^1 3x^2\,dx$

$= [x^3]_{0{,}25}^1 = 1^3 - 0{,}25^3 = 0{,}984\,375$

$p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75) = \int_{0{,}5}^{0{,}75} 3x^2\,dx$

$= [x^3]_{0{,}5}^{0{,}75} = 0{,}75^3 - 0{,}5^3$

$= 0{,}296875$

5

$E(X) = \int_0^2 x \times 0{,}5x\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$

$= \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{4}{3}$

$V(X) = \int_0^2 x^2 \times 0{,}5x\,dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx - \frac{16}{9}$

$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{2^4}{8} - \frac{0^4}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$

7 **1.** $P\left(T < \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ car 20 min $= \frac{1}{3}$ heure.

2. $P\left(T > \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

9 **1.** $P(X > 3) = \frac{10-3}{10-0} = \frac{7}{10}$

$P(2 \leqslant X \leqslant 7) = \frac{7-2}{10-0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2. $E(X) = \frac{0+10}{2} = 5$;

$V(X) = \frac{(10-0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$.

11 **1.** D suit la loi uniforme sur l'intervalle $[24 ; 72]$.

a) $P(X < 24) = 0$

b) $P(X > 48) = \frac{72-48}{72-24} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$

2. $E(X) = \frac{24+72}{2} = 48$

Donc en moyenne le colis sera livré en 48 h.

13 **a)** $p(X \leqslant 5) = 1 - e^{-0{,}1\times5} \approx 0{,}3935$

b) $p(10 < X < 20) = e^{-0{,}1\times10} - e^{-0{,}1\times20} \approx 0{,}0861$

c) $p_{X>6}(X \geqslant 16) = p_{X>6}(X \geqslant 6 + 10)$

$= p(X \geqslant 10) = e^{-0{,}1\times10}$

$= e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}3\,679$.

d) $E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10$

15 **1.** Soit D la durée de vie. $E(D) = 10$ d'après l'énoncé. Donc $\frac{1}{\lambda} = 10$. Donc $\lambda = 0{,}1$.

2. $P(D \leqslant 4) = 1 - e^{-0{,}1\times4} \approx 0{,}3297$

$P_{X>10}(X > 10 + 5) = P(X > 5) = e^{-0{,}1\times5} \approx 0{,}6065$

17 **1.** $\int_x^0 e^t\,dt = [e^t]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$

2. On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Donc, par soustraction des limites, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - e^x = 1$.

3. La fonction exponentielle est continue est positive sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I =]-\infty ; 0]$. D'après les deux questions précédentes, $\int_I g(t)\,dt = 1$. Donc g est une densité de probabilité sur I.

4. $p(X > -4) = \int_{-4}^{0} e^t\,dt = [e^t]_{-4}^{0} = e^0 - e^{-4}$
$= 1 - e^{-4} \approx 0{,}981\,7$

19 $p(Y \geqslant 10) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = \frac{2}{5}$
$\Leftrightarrow -10\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}4)}{-10} \approx 0{,}0916$

22 $V(X) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(b-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow (b-1)^2 = 4 \Leftrightarrow b - 1 = 2$
ou $b - 1 = -2 \Leftrightarrow b = 3$ ou $b = -1$.
D'après l'énoncé, b est supérieur à 1, donc $b = 3$.

Exercices d'application

36 1. La fonction $f : x \mapsto 2$ est une fonction constante positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle I. De plus,
$\int_2^{5,5} 2\,dx = [2x]_5^{5,5} = 2\times 5{,}5 - 2\times 5$
$= 11 - 10 = 1$
Donc la fonction f est bien une densité de probabilité sur I.
2. $p(X \in [5{,}1 ; 5{,}3]) = \int_{5,1}^{5,2} 2\,dx = [2x]_{5,1}^{5,2}$
$= 2\times 5{,}2 - 2\times 5{,}1$
$= 10{,}4 - 10{,}2 = 0{,}2$

51 a) $E(X) = \int_5^{5,5} 2x\,dx = [x^2]_5^{5,5} = 5{,}5^2 - 5^2$
$= 30{,}25 - 25 = 5{,}25$
$V(X) = \int_5^{5,5} 2x^2\,dx - 5{,}25^2 = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_5^{5,5}$
$= \frac{2\times 5{,}5^3}{3} - \frac{2\times 5^3}{3}$
$= \frac{1331}{12} - \frac{250}{3} = \frac{331}{12}$
$\approx 27{,}6$
b) $E(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
$V(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^3\,dx - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2$
$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{2}^4}{4} - \frac{0^4}{4} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$
c) $E(X) = \int_0^{e} 1\,dx = [x]_1^e = e - 1$
$V(X) = \int_1^e x\,dx - (e-1)^2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}$
$= \frac{e^2 - 1}{2}$

53 1. $p(X > 0{,}2) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$
2. $p\left(\frac{1}{3} < X < \frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$
3. $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$

59 1. a) $p(Y \in [0 ; 6]) = p(Y \leqslant 6) = 1 - e^{-0,4\times 6}$
$= 1 - e^{-2,4} \approx 0{,}9092$
b) $p(Y \in [3 ; +\infty[) = p(Y \geqslant 3) = e^{-0,4\times 3}$
$= e^{-1,2} \approx 0{,}3012$
c) $p(Y \in]1 ; 2[) = e^{-0,4\times 1} - e^{-0,4\times 2}$
$= e^{-0,4} - e^{-0,8} \approx 0{,}2210$
d) $p(Y \in]1 ; 2[\cup [3 ; +\infty[) = e^{-0,4} - e^{-0,8} + e^{-1,2}$
$\approx 0{,}5222$
2. $p_{Y>5}(Y > 15) = p_{Y>5}(Y > 5 + 10) = p(Y > 10)$
$= e^{-0,4\times 10} = e^{-4} \approx 0{,}0183$
3. $E(Y) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$

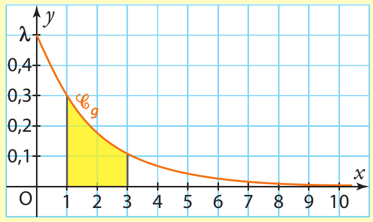
Préparer le BAC

97 B **98** D
99 C **100** A
101 B **102** B
103 C **104** D
105 C **106** C
107 C

108 1. $p(T < 3) = 1 - e^{-0,2\times 3} = 1 - e^{-0,6} \approx 0{,}4512$
2. On cherche le plus petit réel t tel que
$p(T < t) > 0{,}95$
c'est-à-dire :
$1 - e^{-0,2t} > 0{,}95 \Leftrightarrow e^{-0,2t} < 0{,}05$
$\Leftrightarrow -0{,}2t < \ln(0{,}05)$
$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}2}$
Or $\frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}2} \approx 15$.
Donc le temps d'attente minimal est 15 minutes.
3. $E(T) = \frac{1}{0{,}2} = 5$. Donc en moyenne le temps d'attente entre deux étoiles filantes est de 5 minutes. En 2 heures, le groupe pourra donc observer 24 étoiles filantes car 24×5 min $= 120$ min $= 2$ h.

109 A ▶ La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I = [0 ; +\infty[$.
De plus, on a :
$\int_0^x \frac{e^{-0,5t}}{2}\,dt = [-e^{-0,5t}]_0^x$
$= -e^{-0,5x} - (-e^{-0,5\square 0})$
$= 1 - e^{-0,5x}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}5x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$,
donc, par composition des limites,
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = 0$
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-0,5x} = 1$. Ce qui signifie que
$\int_I g(t)\,dt = 1$.
Donc g est une densité de probabilité.
B ▶ 1. $E(X) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc la densité de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.
Or cette fonction est la fonction g de la partie A.
2. a) et b)



La valeur de λ est bien 0,5 car c'est l'ordonnée à l'origine de la courbe de la fonction g.
3. a) $p(1 \leqslant X \leqslant 3) = e^{-0,5\times 1} - e^{-0,5\times 3}$
$= e^{-0,5} - e^{-1,5} \approx 0{,}3834$
b) $p_{X>3}(X \geqslant 4) = p(X \geqslant 1) = e^{-0,5} \approx 0{,}6065$

110 A ▶ 1. Voir cours.
2. $P(X < 2) = 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0{,}05$
$\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0{,}95$
$\Leftrightarrow -2\lambda = \ln(0{,}95)$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}95)}{-2} \approx 0{,}026$
3. $E(X) = \frac{1}{0{,}026} \approx 38{,}5$
B ▶ 1. $P(30 \leqslant X \leqslant 50) = e^{-0,025\times 30} - e^{-0,025\times 50}$
$\approx 0{,}186$
2. $P(X > 60) = e^{-0,025\times 60} \approx 0{,}223$

111 A ▶ 1. Soit D la durée du trajet.
$E(D) = \frac{12 + 28}{2} = 20$. Son trajet dure 20 minutes en moyenne.
2. Elle arrive en retard au lycée si son trajet dure plus de 25 minutes. Or $p(D > 25) = \frac{28 - 25}{28 - 12} = \frac{3}{16}$.
Donc la probabilité qu'elle arrive en retard au lycée est $\frac{3}{16}$.
3. On admet que Martha arrive pile à l'heure.
a) Loïse ne fera pas attendre Martha si son trajet dure 15 minutes maximum.
Or $p(D < 15) = \frac{15 - 12}{28 - 12} = \frac{3}{16}$.
b) Loïse attend Martha plus de deux minutes si elle met moins de 13 minutes pour arriver au lycée. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a :
$p_{D<15}(D < 13) = \frac{p(D < 13)}{p(D < 15)} = \frac{13 - 12}{15 - 12} = \frac{1}{3}$.

B ▶ 1. D'après l'énoncé, $p(X \geqslant 100) = 0{,}8$. Donc $e^{-100\lambda} = 0{,}8 \Leftrightarrow -100\lambda = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln(0{,}8)}{100}$

La valeur approchée de λ est 0,002.

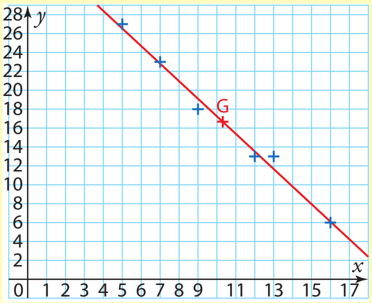
2. $p_{X>150}(X > 300) = P(X > 150)$

$= e^{-0{,}002\times150} = e^{-0{,}3} \approx 0{,}7408$

9 Statistiques à deux variables

À vous de jouer !

1 **1.** Voir ci-dessous.



2. Soit G le point moyen :

$x_G = \dfrac{5+7+9+12+13+16}{6} = \dfrac{62}{6} \approx 10{,}3$ et

$y_G = \dfrac{27+23+18+13+13+6}{6} = \dfrac{100}{6} \approx 16{,}7.$

3. Forme rectiligne : les points sont presque alignés.

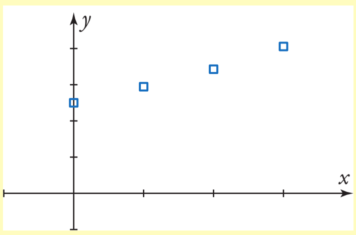
4. Voir ci-dessus.

3 L'équation de la droite d'ajustement est $y = -1{,}852x + 35{,}804$.
Le coefficient de corrélation linéaire est $r \approx 0{,}9939$.

5 **1.**

Valeurs x_i	0	1	2	3
$y_i = \ln(y_i)$	2,48	2,94	3,43	4,06

2. On voit sur le graphique ci-dessous que le nuage de points $(x_i\,;\,y_i')$ présente une forme pouvant être ajustée par une droite.



3. L'équation est $y' = 0{,}522x + 2{,}449$.

4. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow \ln(y) \approx 0{,}522x + 2{,}449$

$\Leftrightarrow y \approx e^{0{,}522x+2{,}449}$

7 **1.** Sur le graphique, on peut lire que le point de la droite d'ajustement d'abscisse 4 (correspondant à 2014) a pour ordonnée 21,2 environ. On peut donc estimer qu'en 2014 le cinéma a totalisé 21 200 entrées environ.

2. On constate que la droite atteint l'ordonnée 24 pour $x = 14$. Cela correspond à l'année 2024.

9 **1.** On calcule d'abord $\overline{x} = 9{,}8$ et $\overline{y} = 17{,}4$.

Valeurs x_i	5	7	9	12	16
Valeurs y_i	27	23	18	13	6
Écarts $x_i - \overline{x}$	–4,8	–2,8	–0,8	2,2	6,2
Écarts $y_i - \overline{y}$	9,6	5,6	0,6	–4,4	–11,4
Produit des écarts $(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$	–46,08	–15,68	–0,48	–9,68	–70,68

La covariance est la moyenne des produits des écarts :

$\text{cov}(x\,,\,y) = \dfrac{-46{,}08-15{,}68-0{,}48-9{,}68-70{,}68}{5}$

$= \dfrac{-142{,}6}{5} = -28{,}52$

La variance de x est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - \overline{x})^2$:

$\text{var}(x) = \dfrac{(-4{,}8)^2+(-2{,}8)^2+(-0{,}8)^2+2{,}2^2+6{,}2^2}{5}$

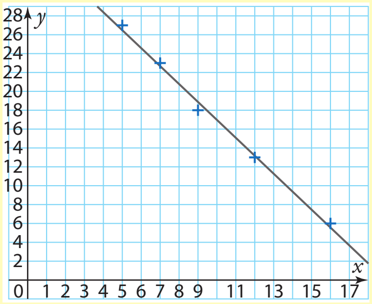
$= \dfrac{74{,}8}{5} = 14{,}96$

2. On en déduit que le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est :

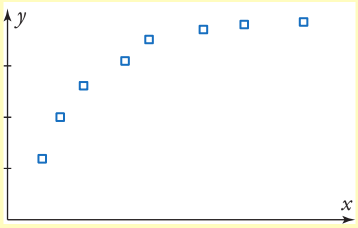
$a = \dfrac{\text{cov}(x\,,\,y)}{\text{var}(x)} = \dfrac{-28{,}52}{14{,}96} \approx -1{,}9064$ et l'ordonnée à l'origine $b \approx 17{,}4 + 1{,}9064 \times 9{,}8 \approx 36{,}08$.

Donc l'équation de la droite de régression de y en x est $y = -1{,}9064x + 36{,}08$.

3.



11 **1.**

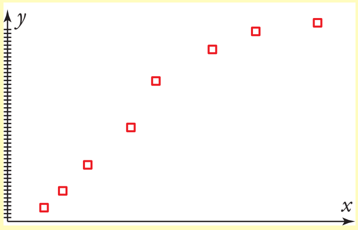


2.

x_i	30	45	65	100
$y'_i = e^{y_i}$	3,32	7,38	13,46	22,2

x_i	120	165	200	250
$y'_i = e^{y_i}$	33,12	40,45	44,7	46,99

3.



4. L'équation de la droite de régression de y' en x est $y' = 0{,}2137x + 0{,}4083$.

Comme $y' = e^y$, alors $y = \ln(y')$. Donc on a $y = \ln(0{,}2137x + 0{,}4083)$.

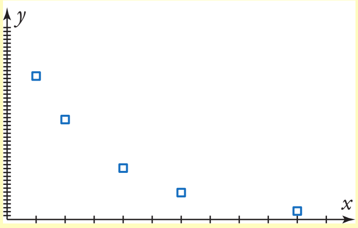
Exercices d'application

18 Le graphique ① peut être ajusté par une parabole, le graphique ③ par une courbe exponentielle, le graphique ④ par une droite. Le graphique ② ne présente aucune forme reconnaissable.

22 **1.** Le nuage de points présente une forme rectiligne « montante », on peut donc l'ajuster par une droite.

2. Avec la calculatrice, on trouve :
$y = 0{,}0556x - 4{,}1508$ et $r \approx 0{,}944$.

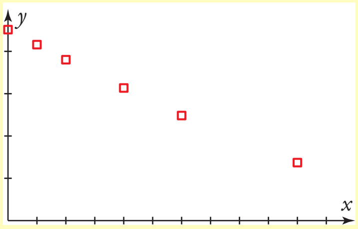
26 **1.**



2.

x_i	0	1	2	4	6	10
$y'_i = \ln(y_i)$	4,5	4,17	3,8	3,14	2,48	1,39

3.



4. L'équation de la droite de régression est $y' = -0{,}31x + 4{,}45$.

5. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^{y'} \Leftrightarrow y = e^{-0{,}31x+4{,}45}$.

29 **1.** $y = 5{,}3 \times 1\,500 - 5\,900 = 2\,050$. Cela signifie que le chiffre d'affaires est égal à 2 050 000 euros. Donc l'affirmation est vraie.

2. 10 millions = 10 000 milliers d'euros. Donc on résout l'équation $10\,000 = 5{,}3x - 5\,900$. Ce qui donne $x = \dfrac{15\,900}{5{,}3} = 3\,000$. Donc l'affirmation est fausse car le salaire moyen devrait être égal à 3 000 €.

Préparer le BAC

51 B **52** D

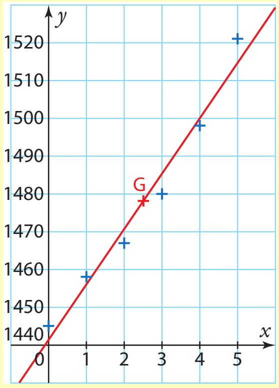
53 D **54** B

55 **1.** Voir ci-dessous.

2. Le point moyen a pour coordonnées (2,5 ; 1 478).

3. a) $y = 14{,}657x + 1441{,}524$

b)



4. a) 2023 est l'année de rang 9, donc en utilisant l'équation de la droite d'ajustement on a : $y = 14{,}657 \times 9 + 1\,441{,}524 = 1\,573{,}437$. Ainsi on peut estimer qu'en 2023 le SMIC brut mensuel sera d'environ 1 573 €.

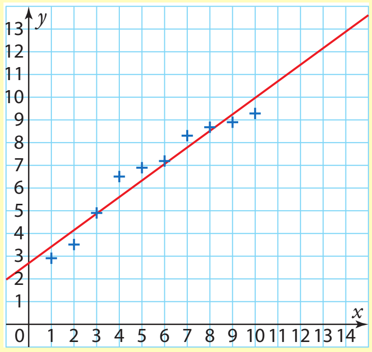
b) $14{,}657x + 1\,441{,}524 > 1\,700$
$\Leftrightarrow 14{,}657x > 258{,}476 \Leftrightarrow x > 17{,}6$.

Donc le SMIC brut mensuel pourrait dépasser 1 700 € l'année de rang 18, c'est-à-dire en 2014 + 18 = 2032.

56 **A ▶ 1.** Voir ci-dessous.

2. a) Avec la calculatrice on trouve l'équation de la droite des moindres carrés : $y = 0{,}73x + 2{,}71$.

b)



L'année 2023 correspond au rang 14. On peut lire sur le graphique ou calculer :
$y = 0{,}73 \times 14 + 2{,}71 = 12{,}93$. Ainsi en 2023 l'entreprise pourrait vendre environ 12,9 millions de boissons.

B ▶ 1. a)

x_i	1	2	3	4	5
$f(x)$	2,61	4,04	5,17	6,09	6,86

x_i	6	7	8	9	10
$f(x)$	7,5	8,05	8,52	8,94	9,3

b) La fonction semble strictement croissante sur [1 ; 20].

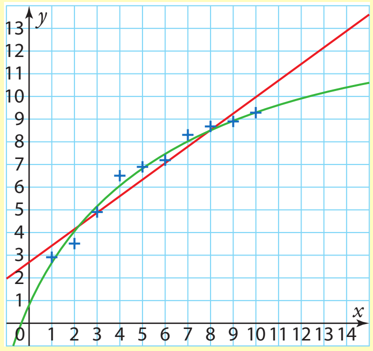
c) $f(x) = 15 - 285 \times \dfrac{1}{3x+20}$.

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3x+20}$ est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) = 3x + 20$ fonction affine non nulle et dérivable sur [1 ; 20] telle que $v'(x) = 3$. Ainsi la fonction f est dérivable sur [1 ; 20] :

$f'(x) = 0 - 285 \square \dfrac{-3}{(3x+20)^2} = \dfrac{855}{(3x+20)^2}$

d) $f'(x)$ est le quotient du nombre positif 855 par $(3x + 20)^2$ qui est un « carré » donc toujours positif. Ainsi pour tout réel x de [1 ; 20], $f'(x) > 0$. On peut en déduire que la fonction f est strictement croissante sur [1 ; 20].

e)



2. a) $f(14) = 10{,}4$. Donc selon ce modèle, en 2023 on peut prévoir 10,4 millions de boissons vendues.

b) D'après le graphique, on remarque que la courbe de la fonction atteint 10,8 en ordonnée lorsque $x = 16$. On en déduit que la quantité de boissons vendues sera supérieure à 10,8 millions en 2025 (année de rang 16).

Crédits

Couverture : ©Mauricios Ramos/Canvas Images/Alamy/Photo 12

p. 12 : Bridgeman Images ; Leemage/Bridgeman Images; Droits Réservés - **p. 13** : akg / Science Photo Library ; Granger / Bridgeman Images; Granger / Bridgeman Images; Granger / Bridgeman Images - **p. 32** : wikipedia ; Bridgeman Images - **p. 68** : Alain Schein/The ImageBank/Getty Images - **p. 90** : Alain Schein / The Image Bank/Getty Images - **p. 93** : DR - **p. 112** : Henri Stierlin /Bildarchiv Steffens / Bridgeman Images - **p. 138** : iStock Editorial / Getty Images Plus - **p. 162** : Bridgeman Images ; ©Bianchetti/Leemage - **p. 163** : Bridgeman Images ; DR Wikipedia; akg / Science Photo Library; Bridgeman Images; Photo12/Alamy/The History Collection - **p. 164** : Arnaud Robin - **p. 166** : Getty Images via AFP - **p. 254** : Granger collection/Bridgeman images - **p. 255** : Photo12/Alamy/The History Collection - **p. 262** : FineArtImages/ Leemage - **p. 294** : Photo12/Alamy/Science History Images - **p. 295** : Lee/Leemage ; Bianchetti/Leemage - **p. 296** : Granger/Bridgeman Images ; Granger/Bridgeman Images; akg-images / AMERICAN PHILOSOPHICAL SOCIETY/SCIENCE PHOTO LIBRARY; Luisa Ricciarini/Leemage; akg-images / FototecaGilardi - **p. 297** : Aisa/Leemage ; De Agostini Picture Library/Bridgeman; AKG Images; DR; Bridgeman Images/Leemage; Lee/Leemage.

Responsable éditorial : Adrien FUCHS
Coordination éditoriale : Aurore BALDUZZI, Julie DRAPPIER, Stéphanie HERBAUT, Marilyn MAISONGROSSE.
Maquette de couverture : Primo & Primo
Maquette intérieure : Primo & Primo et Delphine d'INGUIMBERT
Mise en pages et schémas : Nord Compo
Iconographie : Candice RENAULT
Numérique : Dominique GARRIGUES et Audrey BILLARD

ISBN : 978-2-210-11423-4

ISBN : 978-2-210-11423-4

9 782210 114234

Cet ouvrage a été imprimé sur du papier provenant de forêts gérées durablement.

MAGNARD

www.magnard.fr