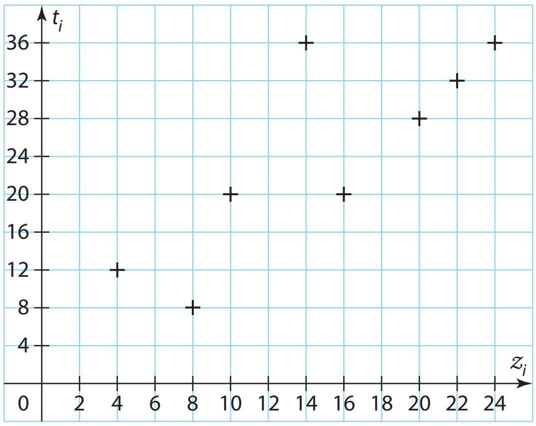
Exercices calculs et automatismes

13 Valeurs et point moyen d'une série statistiques

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre donnant les différentes valeurs prises par les variables z et t de la série statistique double dont le nuage de points (z_i ; t_i) est représenté ci-dessous.

z_i									
t_i									

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage) de la série statistique (z, t).



14 Équation réduite et coefficient de corrélation linéaire

1. Le tableau suivant donne les valeurs (x_i ; y_i) d'une série statistique double (x , y).
Déterminer l'équation réduite (dont les coefficients seront arrondis au dixième) de la droite de régression de y en x.

x_i	1	3	6	8	12	19	21	27	29
y_i	5	1	7	2	48	35	30	19	11

2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (x , y)

15 Covariance , corrélation et ajustement affine

On considère la série statistique double (x , y) dont les valeurs (x_i ; y_i) sont donnés dans le tableau ci-contre.

x_i	1	3	6	8
y_i	5	1	7	2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses?	**V**	**F**
1. La covariance σ_{xy} des variables x et y est négative.	☐	☐
2. L'écart-type σ_x de la variable x est inférieur à l'écart-type σ_y de la variable y.	☐	☐
3. Le coefficient de corrélation linéaire est positif.	☐	☐
4. Un ajustement affine du nuage de points (x_i , y_i) semble pertinent.	☐	☐

16 Droite de régression et ajustement exponentiel

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre y de licenciés d'un club d'escalade, chaque année de rang x, depuis 2015 (année de rang 0).Un ajustement affine de la série statistique (x , y) ne semblant pas approprié, on a ajouté au tableau une variable y' dont les valeurs y_i' vérifient $y_i' = \ln(y_i)$.

Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4
Nombre de licenciés y_i	57	72	98	150	274
Valeurs de $y_i' = \ln(y_i)$	4,04	4,28	4,58	5,01	5,61

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s)

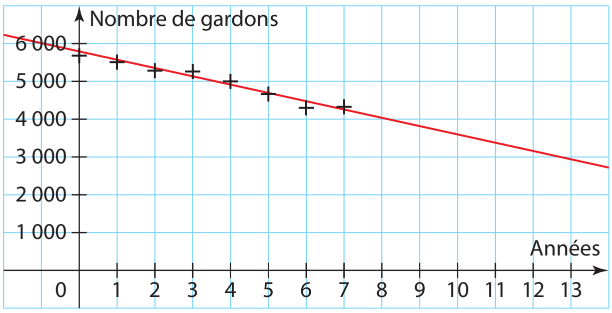
1. L'équation de la droite de régression de y' en x a pour équation (les coefficients sont arrondis au dixième).
a $y' = 51{,}2x + 27{,}8$ **b** $y' = 0{,}9x + 225$ **c** $y' = 0{,}4x + 4$

2. On peut calculer une valeur approchée de y avec la formule :
a $y = 54{,}6e^{0{,}4x}$ **b** $y = e^{0{,}9x} + 225$ **c** $y = 1{,}2 \times 1{,}7^x$

3. En utilisant l'ajustement exponentiel de la série statistique double (x , y), on peut prévoir que le nombre de licenciés dans le club en 2020 sera égal à environ :
a 315 **b** 403 **c** 602

17 Évolution d'un élevage de gardons

Le graphique suivant présente l'évolution annuelle du nombre de gardons dans un étang depuis l'année 2010 (année 0).
Le nuage de points obtenu peut être ajusté par une droite d représentée en rouge.



Si l'évolution continue pendant encore plusieurs années selon l'ajustement modélisé par la droite d, estimer graphiquement :
a) le nombre de gardons dans l'étang en 2008.
b) l'année à partir de laquelle il y aura moins de 3 000 gardons dans l'étang.

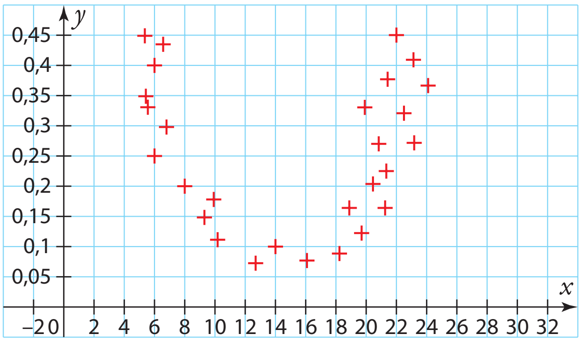
Exercices d'application

Nuage de points, ajustement

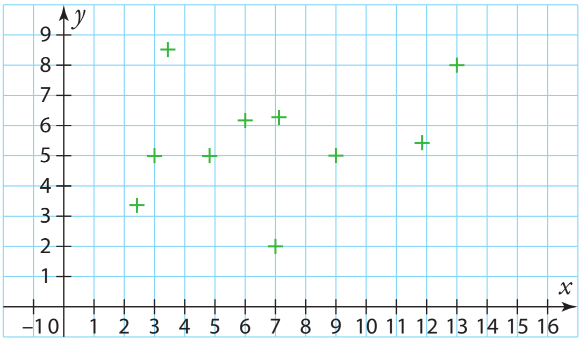
Méthode 1 p. 225

18 Parmi les nuages ci-dessous, lesquelles semblent « ajustables » par une fonction reconnaissable. Citer le nom de la forme du nuage et le nom de la fonction correspondante.

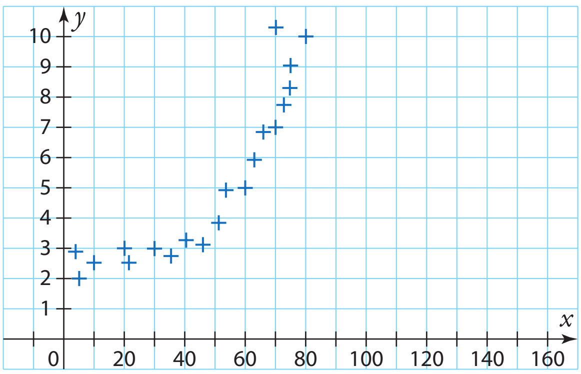
①



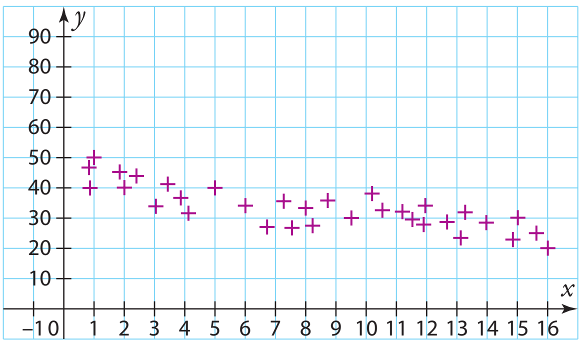
②



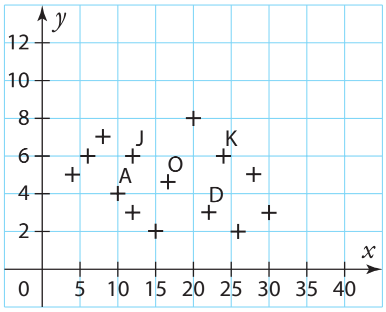
③



④



19 **1.** Dans le nuage de points suivant, parmi les points A, J, O, D, K, quel point semble être le point moyen du nuage ?



2. Peut-on trouver une corrélation entre les deux variables x et y de la série statistique double associée à ce nuage de points ?

20 Les températures, en degrés Celsius, de deux villes A et B ont été relevées à 7h00 tous les matins pendant une semaine.
Les résultats figurent dans le tableau ci-dessous.

Ville A : températures x_i (en °C)	7	2	–1	–3	0	3	6
Ville B : températures y_i (en °C)	4,5	0	–3	–4	–1	1,5	3

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Ce nuage de points présente-t-il une forme caractéristique d'une fonction de référence ?
Si oui, tracer « au jugé » la courbe de la fonction qui passe au plus près des points du nuage et qui passe par G.

21 Le tableau ci-dessous représente une série statistique double $(x\,,y)$.

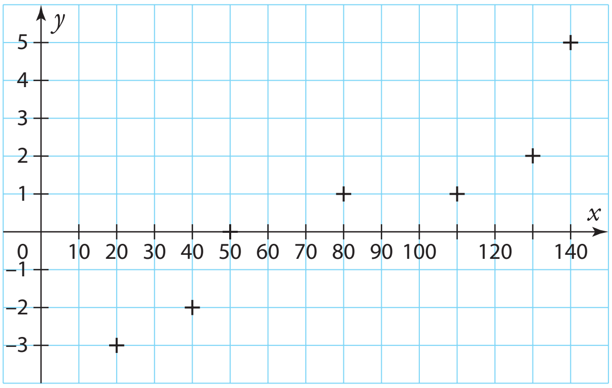
x_i	5	10	20	25	40	55	70
y_i	900	600	450	400	300	275	250

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $M(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Ce nuage de points présente-t-il une forme caractéristique d'une fonction de référence ? Si oui, tracer « au jugé » la courbe de la fonction qui passe au plus près des points du nuage et qui passe par G.

Droite de régression, coefficient de corrélation linéaire

Méthode 2 p. 227

22 On considère le nuage de points suivant.



1. Un ajustement affine de ce nuage est-il pertinent ?
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.

23 On considère la série statistique à deux variables $(x\,,y)$.

Valeurs x_i	–11	–3	2	0	–5
Valeurs y_i	1100	1000	900	950	1050

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ et vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.
3. Représenter la droite d dans le repère.

24 Chimie Sous des conditions de température et de volume constants, on étudie la pression et la quantité de matière d'un gaz. Les résultats sont présentés dans ce tableau.

Nombre de moles x_i	0	10	20	30
Pression y_i (en kPa)	0	46	98	145

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ et vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite de régression d de y en x et le coefficient de corrélation linéaire.
3. Représenter la droite d dans le repère.

25 Les dépenses en communication d'une entreprise chaque année, depuis 2014, sont données dans ce tableau.

Années	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dépenses y_i (en milliers d'euros)	11,5	11,2	10,7	10	9,9	9,5

1. Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage.
2. Déterminer, l'équation de la droite d des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire.
3. La droite d passe-t-elle par le point moyen du nuage ?

Ajustement exponentiel

Méthode 3 p. 229

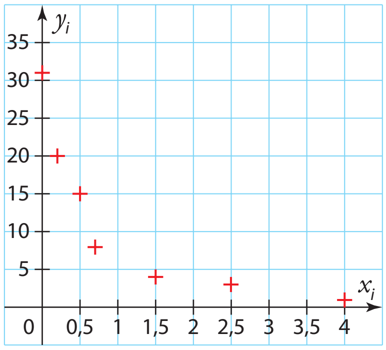
26 On injecte un médicament dans le sang d'une patiente en lui faisant une piqûre en intraveineuse.

La concentration y_i de ce médicament dans le sang, en microgrammes par millilitres est relevé à différents instants x_i en heures.

Temps x_i (en heures)	0	1	2	4	6	10
Concentration y_i (en µg · mL)	90	65	45	23	12	4

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ sur la calculatrice ou un tableur et vérifier que sa forme peut être ajustée par une courbe de fonction exponentielle décroissante.
2. On pose $y_i' = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 6.
Calculer les valeurs y_i'.
3. Représenter sur la calculatrice le nuage de points $(x_i\,;y_i')$.
5. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x.
6. En déduire une expression de y en fonction de x.

27 On considère le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ suivant dont la forme suggère un ajustement exponentiel.



1. On pose, pour tout entier i de 1 à 7, $y_i' = \ln(y_i)$.
Recopier et compléter le tableau suivant.

x_i	0	0,2	0,5	0,7	1,5	2,5	4
y_i							
y_i'							

2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x et le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x\,,y')$.
3. En déduire une expression de y en fonction de x.

Exercices d'application

28 On considère la série statistique à deux variables ci-contre.

Valeurs x_i	5	9	12	14
Valeurs y_i	0,02	0,07	0,32	1,20

1. On pose $y_i' = \ln(y_i)$ pour tout entier i de 1 à 4. Calculer les valeurs y_i'.
2. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i')$ dans un repère et vérifier que sa forme peut être ajustée par une droite.
3. Déterminer l'équation de la droite de régression de y' en x.
4. En déduire une expression de y en fonction de x.

Interpolation, extrapolation

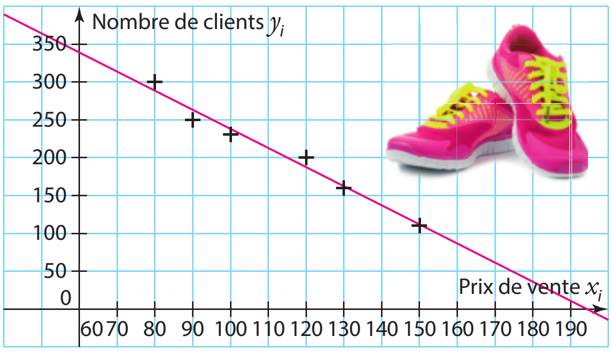
Méthode 4 p. 231

29 Dans une entreprise on étudie conjointement l'évolution du salaire moyen et du chiffre d'affaires. Les données obtenues pendant plusieurs années fournissent une série statistique à deux variable x (montant du salaire moyen en euros) et y (montant du chiffre d'affaires en milliers d'euros) dont le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ a pu être ajusté à l'aide de la droite d'équation $y = 5{,}3x - 5\,900$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
1. En 2003, si le salaire moyen dans l'entreprise était égal à 1 500 €, alors on peut estimer que le chiffre d'affaires devait être d'environ 2,05 millions d'euros.	☐	☐
2. En 2015, l'entreprise a réalisé 10 millions d'euros de chiffre d'affaires. On peut donc estimer que le salaire moyen dans l'entreprise devait être environ égal à 1 115 euros.	☐	☐

30 À l'occasion de la sortie d'un nouveau modèle de baskets, une grande enseigne de distribution réalise une enquête. Le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ ci-contre présente les résultats : en ordonnées, le nombre y_i de personnes prêtes à acheter les baskets selon le prix x_i proposé par l'enseigne en abscisses. On considère que la droite d (représentée en rose sur le graphique) est un bon ajustement du nuage.



1. Donner, par lecture graphique, une estimation du nombre de personnes interrogées qui seraient prêtes à acheter les nouvelles baskets :
a) au prix de 110 €. **b)** au prix de 70 €.
2. Estimer le prix à partir duquel aucune des personnes interrogées ne serait prête à acheter les baskets.

31 Dans le tableau suivant est donné le revenu y_i d'une entreprise qui fabrique du matériel de haute technologie chaque année de rang x_i depuis 2009 (année de rang 0).

Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Revenu y_i (en millions d'euros)	10,7	13,3	16,7	20,9	26,1	32,7

Le nuage de points associé à cette série statistique présente une forme « exponentielle croissante ».
Un ajustement exponentiel a été réalisé et a permis d'obtenir la relation $y = 10{,}67\mathrm{e}^{0{,}224x}$.
1. Donner une estimation du revenu de l'entreprise en 2016.
2. En quelle année le revenu pourrait-t-il dépasser 100 millions d'euros ?

32 Dans le service de soins d'un hôpital, on a lancé en 2012, un plan de luttes contre les maladies nosocomiales.
On a relevé chaque année le pourcentage de malades ayant contracté une telle maladie.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Pourcentage de malades y_i	6,9	6,4	6,2	5,1	4,8	3,9	4

1. À la calculatrice on obtient l'équation de la droite d d'ajustement du nuage $(x_i\,;y_i)$ par la méthode des moindres carrés :

$$y = -0{,}54x + 6{,}95$$

ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x\,,y)$: $r \approx -0{,}978$.
Peut-on en déduire que la droite d est un bon modèle d'ajustement du nuage de points ?
2. On considère que la tendance observée pendant ces sept années se poursuit encore quelques années plus tard.
a) Estimer le pourcentage de malades ayant contracté une maladie nosocomiale dans cet hôpital en 2019.
b) En quelle année le pourcentage de malades ayant contracté une maladie nosocomiale dans cet hôpital pourrait-il être inférieur à 1,5 % ?

33 L'évolution annuelle, entre 2009 et 2014, du prix x_i (en euros) d'un paquet de cigarettes et des ventes y_i (en milliards d'unités) de la marque la plus vendue est donnée dans le tableau suivant.

Prix x_i	5,35	5,65	6	6,3	6,7	7
Ventes y_i	55	54,8	54,1	51,5	47,5	45

1. Déterminer l'équation de la droite des moindres carrés du nuage de points $(x_i\,;y_i)$.
2. En considérant que cette équation est un bon modèle de corrélation des variables x_i et y_i, déterminer les ventes de cigarettes si le prix du paquet atteignait 10 €.

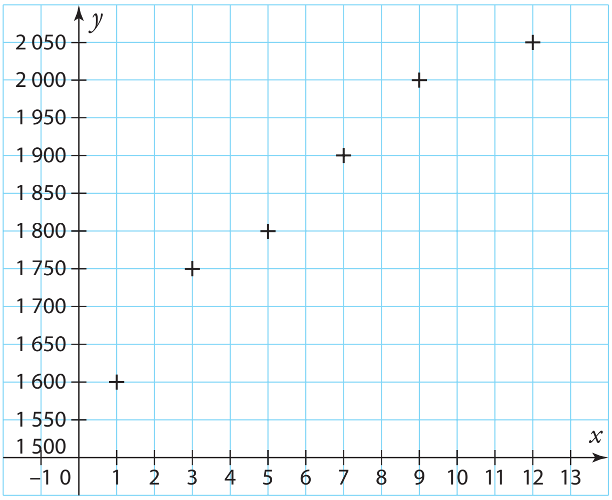
Ajustement affine d'un nuage de points

34 Le tableau ci-contre représente une série statistique double $(x\,;y)$.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	7	5	4	2	2

1. Dans un repère orthonormé, représenter le nuage de points $M(x_i\,;y_i)$.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Le placer dans le repère.
3. Soit d la droite passant par G et de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.
a) Déterminer l'équation réduite de la droite d.
b) Représenter d dans le repère.
c) d est-elle un bon ajustement du nuage ?

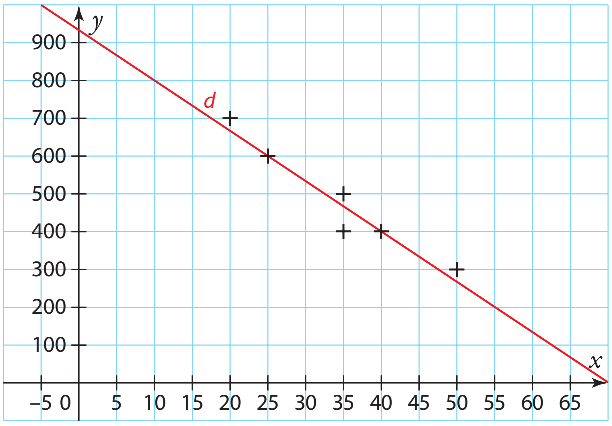
35 On considère la série statistique double $(x\,;y)$ donnée par son nuage de points $(x_i\,;y_i)$ suivant.



On admet qu'on peut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
1. Le point moyen G du nuage a pour coordonnées $\left(\frac{37}{6}\,;1850\right)$	☐	☐
2. L'équation de la droite d'ajustement affine d obtenue par la méthode des moindres carrés et dont les coefficients ont été arrondis à l'unité près, est $y = 41x + 1598$	☐	☐
3. Le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série $(x\,,y)$ est très proche de 1.	☐	☐
4. Si on retire du nuage de points le point (1 ;1 600) correspondant aux valeurs $x_1 = 1$ et $y_1 = 1\,600$ de la série statistique double $(x\,,y)$ alors le coefficient de corrélation linéaire r_2 de la nouvelle série statistique obtenue est inférieur au coefficient de corrélation linéaire r_1.	☐	☐
5. La droite d ne passe pas par le point moyen G.	☐	☐

36 Le nuage de points suivant a été ajusté par la droite d d'équation $y = 13{,}5x + 937{,}5$.



1. Déterminer les coordonnées du point moyen.
2. La droite d semble passer par deux points du nuage. Est-ce vraiment le cas ?
3. La droite d choisie pour ajuster le nuage passe-t-elle par le point moyen G ?

37 Thème 9

Dans un hôpital, on a relevé la tension artérielle x_i (en mm de mercure) et l'âge y_i (en années) de 16 patients.
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Âge x_i (en années)	36	40	43	45	48	49	50	54
Tension y_i (en mm de mercure)	120	108	112	128	110	122	121	128
Âge x_i (en années)	57	57	58	59	61	65	66	67
Tension y_i (en mm de mercure)	140	130	145	131	136	140	140	134

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ (pour i entier de 1 à 16) associé à cette série statistique dans un repère orthonormé.
(On commencera à graduer l'axe des abscisses à 30 et l'axe des ordonnées à 100).
2. On décide de réaliser un ajustement affine par la méthode de Mayer.
On considère deux sous-nuages : celui des huit personnes les plus jeunes (points M_1 à M_8) et celui des huit personnes les plus âgées (points M_9 à M_{16}).
a) Déterminer le point moyen G_1 du premier sous-nuage $M_i(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 1 à 8.
b) Déterminer le point moyen G_2 du deuxième sous-nuage $M_i(x_i\,;y_i)$ pour i entier de 9 à 16.
c) Placer les points G_1 et G_2 dans le repère et tracer la droite (G_1G_2).
3. Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2), dite « droite de Mayer ».

Exercices d'entraînement

Droite des moindres carrées et corrélation linéaire

Méthode 5 p. 232

38 On a relevé le taux de chômage des jeunes (16 à 24 ans) en France, entre 2010 et 2015.

Années	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5
Taux y_i de chômage (en %)	7,8	8,1	8	8,7	9	9,2

1. Calculer la variance var(x) de la variable x (rang de l'année) et en déduire l'écart-type σ_x.
2. Calculer la variance var(y) de la variable y (taux de chômage) et en déduire l'écart-type σ_y.
3. Calculer la covariance σ_{xy} des variables x et y.
4. En déduire l'équation de la droite de régression de y en x, et la valeur du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(x\,, y)$.

39 Thème 9

Le tableau ① suivant donne les températures maximales x prévues par un site de météorologie et les températures y maximales réelles observées, pour chaque jour de la semaine du lundi 9 au dimanche 15 mars. Le tableau ② donne les températures prévues x' par le site météo et les températures y' réelles observées le lundi 9 mars, toutes les quatre heures. Toutes les valeurs sont données en degré Celsius.

Tableau ①

Jours de la semaine	L	M	Me	J	V	S	D
Températures prévues x_i (en °C)	12	15	16	14	12	11	8
Températures réelles y_i (en °C)	13	14	14	10	13	7	7

Tableau ②

Heures	2h	6h	10h	14h	18h	22h
Températures prévues x_i' (en °C)	2	3	6	12	12	9
Températures réelles y_i' (en ° C)	2,5	3	7	13	12,5	8

1. Sur la calculatrice, représenter les nuages de points associés aux séries statistiques (x,y) et $(x'\,, y')$.
2. Pour chaque nuage, déterminer l'équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés, et représenter-la.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série statistique (x,y), puis celui, noté r_2 de la série statistique $(x'\,, y')$.
4. On considère l'affirmation : « Les prévisions météo à un jour sont meilleures que les prévisions à une semaine ». Vos résultats confirment-ils cette affirmation.
Pourquoi ?

40 Une série statistique à deux variables $(x\,, y)$ est telle que cov$(x\,, y) \approx 75$, var$(x) \approx 124$ et $var(y) \approx 236$. Est-il pertinent de chercher une corrélation linéaire entre les variables x et y ? Si oui, quel serait le coefficient directeur de la droite de régression de y en x ?

41 Une série statistique à deux variables (x,y) est telle que cov$(x\,, y) \approx -105$, var$(x) \approx 112$ et var$(y) \approx 109$. Est-il envisageable d'ajuster le nuage de points associé à cette série statistique par une droite ? Si oui, quel est le coefficient directeur de la droite obtenue par la méthode des moindres carrés ?

Ajustements, extrapolation et interpolation

42 En France, pour une femme, l'âge moyen du premier mariage était de
- 34 ans en 2012,
- 34,9 ans en 2014,
- 35,4 ans en 2016,
- 35,9 ans en 2018.

1. Dresser un tableau avec ces données. (Pour les années, on pourra au choix les utiliser telles quelles ou utiliser leur rang en prenant l'année 2012 comme rang 0).
2. Réaliser un ajustement affine de ces données.
(Les coefficients seront arrondis au dixième).
3. À l'aide de cet ajustement, donner une estimation, arrondie au dixième, de ce que pourrait être l'âge moyen du premier mariage pour une femme en France en 2022 ?
4. Si cette « tendance » devait se prolonger assez longtemps à l'avenir, en quelle année l'âge moyen du premier mariage pour une femme pourrait atteindre 40 ans ?

43 TICE

Dans le tableau suivant sont présentées les ventes annuelles de smartphones d'un fabricant depuis 2007. Il manque les données des années 2009 et 2014.

	A	B	C
1	Années	Rang x_i de l'année	Nombre y_i de smartphones
2	2007	0	1,5
3	2008	1	5
4	2009	2	
5	2010	3	20
6	2011	4	55
7	2012	5	85
8	2013	6	114
9	2014	7	
10	2015	8	256

1. Représenter sur le tableur le nuage de points $M_i(x_i\,; y_i)$ de cette série statistique et vérifier qu'il peut être ajusté par la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction exponentielle.
2. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ qui ajuste « au mieux » le nuage a pour équation $y = 2{,}5e^{0{,}641x}$.
3. Si on considère que l'évolution des ventes a été la même depuis 2007, donner une estimation du nombre de smartphones vendus en 2009 et 2014.

44 Les tableaux suivants donnent l'évolution de la population allemande y et de la population turque z, en millions d'habitants, pendant les années 2000 de rang x allant de 0 à 9.

Thème 9

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Population allemande y_i	82,2	82,3	82,4	82,5	82,5
Population turque z_i	66,9	64,6	65,6	66,4	67,2
Année	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x_i	5	6	7	8	9
Population allemande y_i	82,5	82,4	82,3	82 ,2	82
Population turque z_i	68	68,9	69,7	70,6	71,5

1. Représenter dans le même repère (éventuellement sur un tableur ou la calculatrice) le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ associé à la série statistique à deux variables $(x\,,y)$ et le nuage de points $P_i(x_i\,;z_i)$ associé à la série statistique à deux variables $(x\,,z)$.
2. On réalise un ajustement affine de chacun de ces nuages.
a) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.
b) Déterminer l'équation de la droite de régression de z en x.
3. Si on suppose que l'évolution observée pour chacune de ces séries se poursuit encore les années suivantes, en quelle année la population de la Turquie pourrait dépasser la population de l'Allemagne ?

Autres ajustements

Méthode 6 p. 233

45 On a relevé, dans le tableau suivant, la masse y_i (en kg) d'un nourrisson selon son âge x_i (en mois).

Age x_i (en mois)	0	1	2	3	4	5	7	9	12
Masse y_i (en kg)	3,01	5,04	6,22	7,06	7,71	8,25	9,09	9,61	10,12

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ sur un tableur ou une calculatrice et vérifier qu'un ajustement affine de ce nuage n'est pas pertinent.
2. On pose, pour tout entier i compris entre 1 et 9, $y_i' = e^{y}$; calculer les valeurs y_i'.
3. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i')$.
Vérifier qu'il peut être ajusté par une droite.
4. Déterminer la droite de régression de y' en x.
En déduire une expression de y en fonction de x.
5. En admettant que l'évolution du poids du nourrisson va continuer selon la même tendance pendant encore quelques mois, donner une estimation du poids du bébé lorsqu'il aura atteint l'âge de 18 mois.

46 La consommation de carburant et la vitesse d'un véhicule sont bien évidemment liés par une relation de causalité.
Le tableau suivant présente pour un type de poids-lourd, quelques valeurs y_i de consommation de carburant en litres pour 100 km selon certaines valeurs x_i de la vitesse en $km \cdot h^{-1}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le lien de corrélation entre ces deux variables.

Vitesse x_i (en $km \cdot h^{-1}$)	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Consommation y_i (en L pour 100 km)	43	37	34	31,8	31	32	34,5	38	42

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\,;y_i)$ (pour i entier de 1 à 9) dans un repère orthonormé.
2. Vérifier que ce nuage de points peut être ajusté par une parabole ayant un sommet proche du point $M_5(70\,;31)$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0\,;120[$ par :
$$f(x) = a(x-70)^2 + 31$$
où a est un réel strictement positif.
a) Expliquer pourquoi la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pourrait être un bon modèle d'ajustement au nuage.
b) En admettant que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $M_5(60\,;31{,}8)$, démontrer que le réel a est égal à $\frac{1}{125}$.
4. Si on prend la courbe $\mathscr{C}_f$ pour modèle d'ajustement du nuage, quelle consommation peut-on prévoir sur ce type de poids-lourd lorsqu'on roule à $20\ km \cdot h^{-1}$?

47 Une société vend des vélos électriques.

Thème 9

Ses bénéfices annuels (en milliers d'euros) ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant.

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice y_i (en k€)	64	75	100	113	125	127

1. a) Construire le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthonormé.
On prendra comme unités :
- 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses,
- 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

b) Donner les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer dans le repère.
2. En observant le nuage de point, on envisage de l'ajuster par une courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :
$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$
a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;6]$.
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère de la question **1**.
c) Quelle prévision peut-on faire pour le bénéfice en 2005 avec ce modèle d'ajustement ?

D'après bac

Exercices bilan

48 Ajustement et recettes

SES

Une entreprise fabrique des tee-shirts.
Afin d'établir le prix de vente de son produit elle réalise une enquête auprès de personnes qui, selon le prix proposé, seraient potentiellement acheteurs du tee-shirt.

Prix de vente x_i (en €)	25	29	32	35	39
Nombre d'acheteurs y_i potentiels	124	116	94	85	72

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (à 10^{-4} près) de la série statistique à deux variables x (prix de vente) et y (nombre d'acheteurs potentiels).
Interpréter le résultat.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. (arrondir à l'unité)
3. Soit $R(x)$ la recette correspondant à la vente de y produits au prix unitaire de x euros.
a) En utilisant la question précédente, déterminer l'expression de $R(x)$.
b) En déduire le prix de vente x qui permettrait d'obtenir une recette maximale.

49 Quel ajustement choisir ?

En 2015 un lycée décide de créer un club d'échecs.
Dans le tableau suivant est indiqué le nombre d'adhérents chaque année depuis 2015.

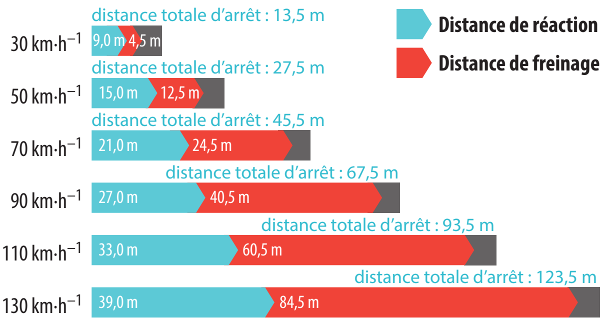
Rang de l'année x	1	2	3	4
Nombre d'adhérents y	9	15	22	31

1. a) On considère la série statistique à deux variables x (rang de l'année) et y (nombre d'adhérents).
Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de cette série statistique $(x\,,y)$. (à 10^{-4} près)
b) On pose $z = \ln(y)$ et on considère alors la série statistique à deux variables $(x\,,z)$.
Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_2 de cette série statistique $(x\,,z)$. (à 10^{-4} près)
c) Depuis la création du club, le président compte sur une progression exponentielle du nombre d'adhérents. Pour ces quatre premières années, peut-on affirmer que ses espérances sont satisfaites ?
2. En 2019 une grande campagne de publicité a été organisée sur les réseaux sociaux du lycée.
Le nombre de participants totalisés à la fin de l'année est égal à 44.
Le président du club, après avoir observé l'ensemble des données de 2015 à 2019, affirme dans son discours de fin d'année : « Si on continue comme ça, l'année prochaine nous serons au moins 67 adhérents ! »
Qu'en pensez-vous ?

50 Distance d'arrêt

Physique

Le document de la sécurité routière ci-dessous donne les valeurs moyenne de la distance de réaction et de la distance de freinage selon la vitesse du véhicule, sur une route sèche, de jour et dans des conditions de visibilité normales.



A ▶ Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de réaction y

1. Construire dans un repère orthonormé le nuage de points correspondant à la série statistique (x,y) où x représente la vitesse du véhicule en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et y la distance de réaction en m. Et vérifier que sa forme invite à réaliser un ajustement affine.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine du nuage obtenue par la méthode des moindres carrés.
3. Selon cet ajustement :
a) estimer la distance de réaction d'un véhicule roulant, en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
b) indiquer à quelle vitesse le véhicule devraitrouler pour que la distance de réaction soit inférieure à 3 m.

B ▶ Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de freinage y'.

1. Construire le nuage de points correspondant à la série statistique (x,y') où x représente la vitesse du véhicule en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ et y' la distance de freinage en mètres.
2. On considère que le nuage peut être ajusté par une parabole d'équation $y' = ax^2$ où a est un réel non nul.
a) On pose $z = \sqrt{y'}$. Recopier et compléter le tableau.

y'	4,5	12,5	24,5	40,5	60,5	84,5
$z = \sqrt{y'}$						

b) À l'aide de la calculatrice déterminer l'équation de la droite de régression de z en x, et vérifier que si l'on arrondit les coefficients à 10^{-3}, on a $z = 0{,}071x$.
c) En déduire une expression de y' en fonction de x.
3. Pour les questions suivantes, on admet que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{200}$ est une bonne modélisation de la distance de freinage en fonction de la vitesse x du véhicule.
a) Estimer la distance de freinage d'un véhicule roulant en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
b) En vous aidant de la partie **A**, déterminer la distance totale d'arrêt pour un véhicule roulant en excès de vitesse, à 140 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

CONTRÔLE CONTINU

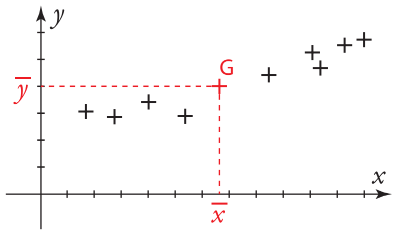
Préparer le BAC L'essentiel

Série statistique à deux variables

Variable x	x_1	x_2	x_3	…………	x_n
Variable y	y_1	y_2	y_3	…………	y_n

Représentation graphique

- **Nuage de points $M_i\,(x_i\,;y_i)$**



- **Point moyen $G(\overline{x}\,;\overline{y})$**

Il a pour coordonnées :

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n}{n}$$

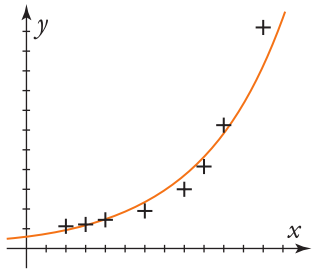
$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots\dots\dots + y_n}{n}$$

Ajustement exponentiel

- Le nuage peut être approché par la courbe d'une fonction *f* de la forme :

$$f(x) = e^{ax+b}$$

où *a* et *b* sont des réels



- Pour déterminer la fonction *f*, on doit effectuer un changement de variable en posant :

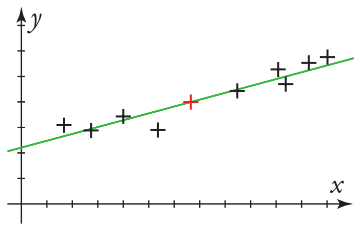
$$y' = \ln(y)$$

Puis on détermine l'équation de la droite de régression de y' en x.

Ajustement affine

Le nuage peut être approché par une droite d'équation

$$y = ax + b$$



Autres ajustements

De nombreuses autres courbes de fonctions usuelles peuvent servir d'ajustement d'un nuage de points :
- une parabole
- une hyperbole
- la fonction logarithme népérien
- la fonction racine carrée
- …

Droite de régression ou droite des moindres carrés

Il existe une droite d'ajustement qui minimise les écarts de chaque point du nuage par rapport à la droite. Son équation est :

$$y = ax + b$$

avec $a = \dfrac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}$

et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

On peut l'obtenir rapidement à l'aide de la calculatrice.

Coefficient de corrélation linéaire

- Pour juger de la qualité d'un ajustement, il existe un nombre *r* compris entre – 1 et 1.
- Plus il est proche de – 1 ou de 1, meilleur est l'ajustement.

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Représenter un nuage de points	Méthode 1	1, 2, 21, 22, 34
▶ Calculer les coordonnées d'un point moyen	Méthode 1	1, 2, 19, 20, 34
▶ Déterminer une droite de régression à l'aide de la calculatrice, d'un tableur ou autre logiciel	Méthode 2	3, 4, 22, 23, 24, 25
▶ Déterminer certaines courbes d'ajustement (courbe exponentielle notamment) en se ramenant par changement de variable à un ajustement affine	Méthode 3	5, 6, 11, 12, 26, 27, 28, 43, 45, 46, 47
▶ Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler.	Méthode 4	7, 8, 30, 31, 42, 43, 45, 46, 47

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c09-07

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 51 à 53, on donne dans le tableau suivant le taux de natalité x (pour mille habitants) et l'espérance de vie y des femmes (en années) en 2015, dans dix pays répartis sur tous les continents.
On considère que le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ associé à cette série statistique peut être ajusté par une droite.

Taux de natalité x_i (en ‰)	12	18	20	25	28	31	34	45	48	50
Expérance de vie y_i, (en années)	83	79	71	73	73	69	69	56	60	56

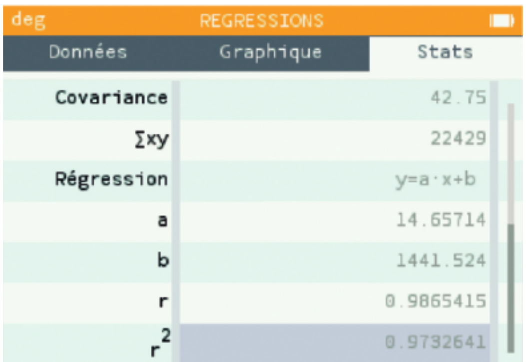
	A	B	C	D
51 Le point moyen G du nuage a pour coordonnées :	(30 ; 70,1)	(31,1 ; 68,9)	(29,5 ; 71)	(32 ; 69)
52 La droite d de régression de y en x a pour équation lorsqu'on arrondit les coefficients à 10^{-2} :	$y = -1{,}38x + 126{,}15$	$y = -0{,}66x + 89{,}70$	$y = -1{,}37x + 126{,}20$	$y = -0{,}67x + 89{,}67$
53 Si on prend la droite d pour modèle d'ajustement du nuage. On peut estimer que dans un pays où le taux de natalité est égale à 40‰, l'espérance de vie d'une femme serait égale à environ	57 ans	59 ans	61 ans	63 ans
54 On peut estimer que dans un pays où l'espérance de vie d'une femme est égale à 50 ans, le taux de natalité serait égal à environ :	57 ‰	59 ‰	61 ‰	63 ‰

55 Salaire mensuel

L'évolution du SMIC brut mensuel exprimé en euros entre 2014 et 2019, arrondi à l'entier, est donnée dans le tableau suivant :

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
SMIC mensuel y_i	1 445	1 458	1 467	1 480	1 498	1 521

1. Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère orthogonal.
On graduera l'axe des ordonnées à partir de la valeur 1 440, et on prendra comme unité 1 cm pour 10 euros.
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur le graphique.
3. On saisit les données statistiques dans une calculatrice, et on affiche l'équation réduite de la droite d'ajustement du nuage de points $(x_i\,;y_i)$ par la méthode des moindres carrés. L'écran de la calculatrice affiche :



a) Écrire l'équation réduite de cette droite en arrondissant les coefficients à 3 décimales.
b) On admet que la droite passe par le point de coordonnées (4 ; 1 500).
Tracer cette droite sur le graphique.
4. En utilisant l'ajustement de la question précédente :
a) estimer la valeur du SMIC mensuel en 2023.
(Arrondir à l'entier).
b) déterminer à partir de quelle année le SMIC mensuel dépassera 1 700 euros.

Méthode 1 p. 227 Méthode 2 p. 227 Méthode 4 p. 231

56 Boisson énergisante

Une entreprise commercialise une boisson énergisante depuis 2010. Le tableau suivant donne le nombre de boissons vendues chaque année entre 2010 et 2019.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i	1	2	3	4	5
Nombre y_i de boissons vendues (en millions)	2,9	3,5	4,9	6,5	6,9
Année	2015	2016	2017	2018	2019
Rang x_i	6	7	8	9	10
Nombre y_i de boissons vendues (en millions)	7,2	8,3	8,7	8,9	9,3

A ▶ Modélisation par un ajustement affine

1. Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthonormal. Prendre comme unités 1 cm sur chaque axe.
2. a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d qui réalise un ajustement affine du nuage de points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ obtenu par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients au centième.
b) Tracer la droite d dans le repère. En supposant que l'ajustement affine réalisé reste valable jusqu'en 2023, déterminer le nombre de boissons qui seront vendues en 2023.

B ▶ Modélisation par une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 20] par $f(x) = 15 - \dfrac{285}{(3x+20)}$.

1. a) Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice le tableau suivant (on arrondira les résultats au centième).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2,61									

b) Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 20] ?
c) Démontrer que la dérivée de f est la fonction définie sur [1 ; 20] par $f'(x) = \dfrac{855}{(3x+20)^2}$.
d) Utiliser la question précédente pour valider ou non la conjecture émise à la question **1. b)**.
e) Représenter la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le même repère que le nuage de points de la partie **A**.
2. f peut être considérée comme une modélisation valable des ventes de boissons énergisantes jusqu'en 2029, l'année 2010 étant prise comme année de rang 1.
a) À l'aide de la fonction f, faire une prévision des ventes pour l'année 2023.
b) À partir de quelle année la quantité de boissons vendues est-elle supérieure à 10,8 millions ?

Méthode 1 et Méthode 2 p. 227 Méthode 4 p. 231 Méthode 6 p. 233