8

Lois de probabilité à densité

La question de la durée de vie des objets électriques ou électroniques s'est posée depuis leur existence. L'ampoule centenaire de Livermore, en Californie est, par exemple, la plus ancienne ampoule à incandescence du monde encore en fonctionnement.

Peut-on estimer la probabilité qu'un appareil électronique dure encore 2 ans sachant qu'il est toujours en état de fonctionnement 10 ans après son achat ?

↪ Activité 3 p. 197

VIDÉO WEB

Une très ancienne ampoule
lienmini.fr/maths-c08-01

Pour prendre un bon départ

EXOS
Prérequis
lienmini.fr/maths-c08-02

Les rendez-vous Sésamath

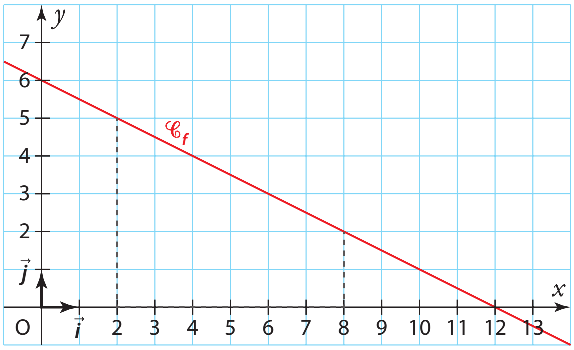
1 Calculer l'espérance et la variance.

Une variable aléatoire X suit la loi de probabilité suivante.

Valeurs de k	-5	0	2	12
$p(X=k)$	0,4	0,2	0,3	0,1

Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2 Déterminer graphiquement une intégrale



Déterminer $\int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 10$.

Calculer $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Calculer une probabilité conditionnelle

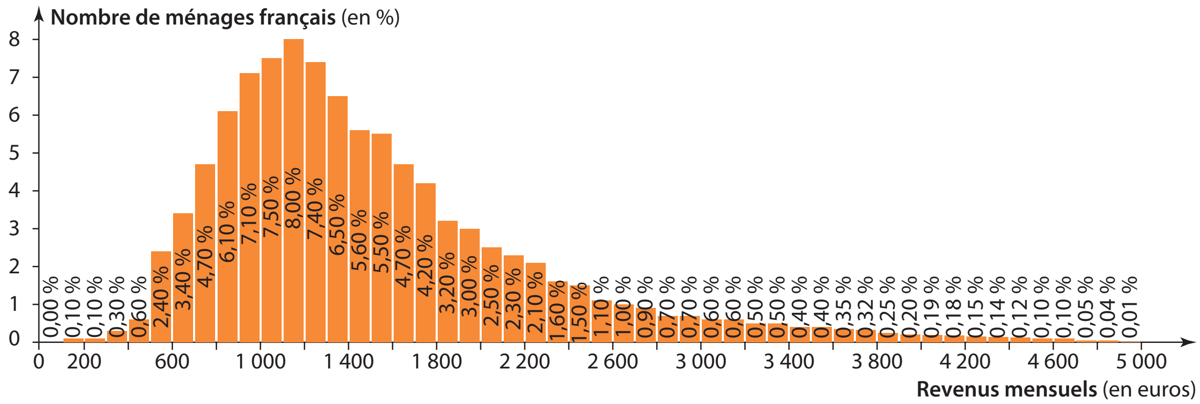
Dans une classe, trois langues sont enseignées : l'anglais, l'espagnol et l'allemand.
Tous les élèves suivent les cours d'anglais, 55 % des élèves suivent les cours d'allemand et 57 % des élèves suivent les cours d'espagnol.
Tout le monde suit au moins deux langues et certains en suivent trois.
On choisit un élève au hasard.
Soit l'événement A : « L'élève apprend l'allemand » et l'événement E : « L'élève apprend l'espagnol »
Déterminer $p(A \cap E)$, puis $p_A(E)$.

Activités

SES 15 min

1 Passage du discret au continu

A ▶ L'histogramme suivant indique la distribution des ménages français en 2014 en fonction de leurs revenus. L'aire de chaque rectangle est exprimée en pourcentage d'unité d'aire (u.a).
L'aire totale est donc de 100 % soit 1 u.a



Remarque les niveaux de vie supérieurs à 5000 € représentant une proportion très faible de la population (environ 0,001 %) ils ne figurent pas dans l'histogramme.

On choisit un ménage au hasard dans la population française.

1. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit compris entre 800 € et 900 € ?

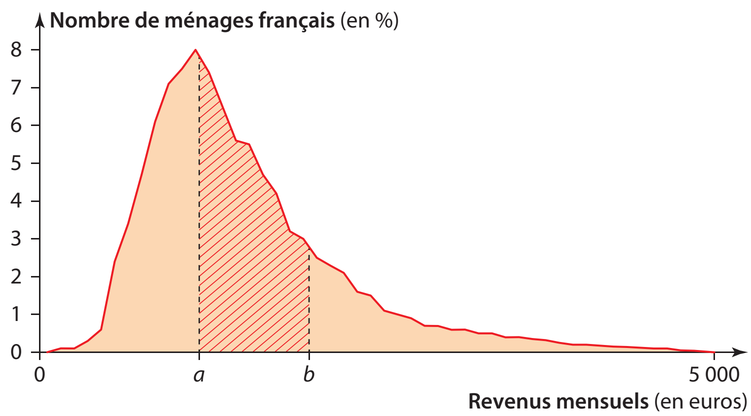
2. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit compris entre 1 200 € et 2 000 € ?

3. Quelle est la probabilité que son niveau de vie soit supérieur ou égal à 1 000 € ?

B ▶ Dans l'histogramme précédent en reliant les milieux des côtés supérieurs de chaque colonne rectangulaire on a fait apparaître une courbe rouge, qui représente une fonction numérique f continue et positive sur [0 ; 5 000]

1. Soient a et b deux nombres de l'intervalle [0 ; 5 000].
À l'aide de fonction f, comment s'écrit mathématiquement l'aire, en unité d'aire, du domaine hachuré situé entre la courbe de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$?

2. Le domaine « total » $\mathscr{D}$ situé entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle [0 ; 5 000] a une aire très voisine de celle constituée par l'ensemble des rectangles de l'histogramme précédent. On peut alors considérer que l'aire du domaine $\mathscr{D}$ tout orange (hachuré et non hachuré) est égale à 1 u. a.



En vous aidant de la partie précédente, donner une valeur approchée de $\int_{1200}^{2000} f(x)\mathrm{d}x$ (aire du domaine orange hachuré avec $a = 1\,200$ et $b = 2\,000$).

↪ Cours 1 p. 198

TICE 15 min Thème 7

2 Choix d'un nombre aléatoire dans [0 ; 1]

1. a) On considère une variable aléatoire D qui prend pour valeurs tous les nombres décimaux comportant au plus 4 décimales, et appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Soit d l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(D = d)$?

b) On considère une variable aléatoire Y qui prend pour valeurs tous les nombres décimaux comportant au plus 10 décimales, et appartenant à l'intervalle [0 ; 1]. Soit y l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(Y = y)$?

c) On considère une variable aléatoire X qui prend pour valeurs tous les nombres réels de l'intervalle [0 ; 1]. Soit x l'un de ces nombres. Que vaut alors $p(X = x)$?
On dit alors que la variable aléatoire X est **continue.**

2. Sur un ordinateur avec un tableur on peut utiliser la fonction **ALEA()** qui renvoie un nombre entre 0 et 1.

a) Simuler dans la colonne A d'un tableur 10 000 tirages aléatoires d'un nombre x entre 0 et 1.

b) Calculer la fréquence de l'événement : « $x \in [0{,}25 ; 0{,}5]$ ».

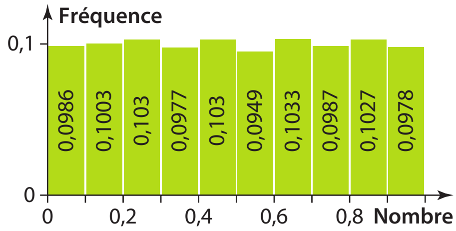
Coup de pouce On pourra utiliser l'instruction **NB.SI.ENS(A1:A10000;">=0 1/4";A1:A10000;"<=0 1/2")** pour compter le nombre de cellules dans la « plage A1 : A10000 » qui affichent un résultat compris entre 0,25 et 0,5).

c) Recommencer plusieurs fois la simulation en appuyant sur la touche F9 du clavier.
Si on admet que la fréquence de cet événement est proche de la probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 0,25 et 0,5 conjecturer la valeur exacte de $p(0{,}25 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$.

d) Déterminer de même la fréquence des événements : « $X \in [0 ; 0{,}25]$ » et « $X \in [0{,}85 ; 0{,}9]$ » puis conjecturer ainsi la valeur exacte de $p(0 \leqslant X \leqslant 0{,}25)$ et de $p(0{,}85 \leqslant X \leqslant 0{,}9)$.

3. Quels que soient les réels c et d de l'intervalle [0 ; 1] quelle formule permet de calculer directement $p(c \leqslant X \leqslant d)$?

4. À l'aide du tableur on peut obtenir la distribution ci-contre. Quelle fonction f paraît-il pertinent de choisir comme densité de probabilité de X ?



↪ Cours 3 p. 200

Physique 30 min Thème 8

3 Loi de probabilité sans mémoire

Au 1er juillet 2020, un nouveau théâtre dispose d'un grand nombre de dispositifs d'éclairage nécessitant, en tout, l'utilisation de 10 000 ampoules. Un an après, le 1er juillet 2021, l'éclairagiste a remarqué que le nombre d'ampoules en état de fonctionnement diminuait de 1 % chaque mois.
On choisit au hasard une ampoule et on note T la variable aléatoire qui associe à chaque ampoule sa durée de vie, en mois. On considère que la probabilité qu'une ampoule ait une durée de vie de n mois ou plus, est égale à la proportion d'ampoules restantes après n mois.

1. Quelle est la probabilité que l'ampoule ait une durée de vie :
a) supérieure ou égale à 1 mois ? **b)** égale à 2 mois?

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p(T \geqslant n) = 0{,}99^n$.

3. On admet que, pour tout réel x, $p(T \geqslant x) = \mathrm{e}^{x\ln(0{,}99)}$. Quelle est la probabilité que l'ampoule dure :
a) plus de trois mois et demi ? **b)** moins de huit mois et demi ?

4. Sachant que l'ampoule est en état de fonctionnement le 15 mars 2020, quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore au 1er juillet 2020 ? On notera cette probabilité $p_{T \geqslant 8{,}5}(T \geqslant 12)$.
Comparer avec la probabilité $p(T \geqslant 3{,}5)$ calculée à la question **3.**

Démontrer que, quels que soient les réels t et h, $p_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = p(T \geqslant h)$

Remarque On dit alors que la variable aléatoire T suit une loi de probabilité **sans mémoire.** Car la probabilité qu'une ampoule dure un temps h supplémentaire après avoir déjà duré un certain temps t ne dépend justement pas de ce temps t déjà écoulé.

↪ Cours 5 p. 204

Cours

1 Loi à densité

Le temps d'attente, en minutes, à un service d'assistance téléphonique, ou la taille d'un bébé, en cm, à la naissance sont des variables aléatoires qui peuvent prendre pour valeur un nombre réel quelconque d'un intervalle. L'ensemble des valeurs possibles est donc un intervalle de réels. On dit alors que la variable aléatoire est **continue**. On introduit une nouvelle notion : la densité de probabilité.

Définition Densité de probabilité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

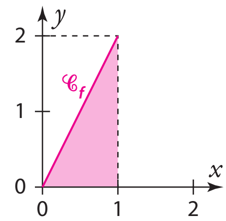
On dit que f est une densité de probabilité (ou une fonction de densité) sur I si et seulement si f est continue et positive sur I, et si l'aire (en unité d'aire) du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1 (autrement dit, l'intégrale de f sur I est égale à 1, ce que l'on notera $\int_I f = 1$ ou encore $\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1$).

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 2x$ est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;1]$. En effet, on sait que f est une fonction affine, elle est donc **continue** sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, et pour tout réel x compris entre 0 et 1, il est clair que $f(x)$ est **positif**.

De plus : $\int_0^1 2x\mathrm{d}x = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$.

Ainsi la fonction f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;1]$.

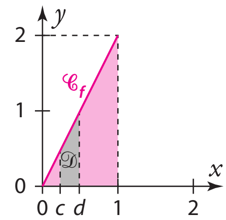


Définition Variable aléatoire à densité

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I.
Dire que la variable aléatoire X suit la loi de densité f sur I signifie que, pour tout intervalle $[c\,;d]$ inclus dans I, la probabilité $p(X \in [c\,;d])$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = c$ et $x = d$.

C'est-à-dire : $p(X \in [c\,;d]) = p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

On dit alors que X est une variable aléatoire à densité.



Remarque Quel que soit le nombre réel c de l'intervalle I on a $p(X = c) = \int_c^c f(x)\mathrm{d}x = 0$.

Autrement dit, la probabilité que X prenne une valeur donnée à l'avance parmi l'infinité de valeurs de l'intervalle I est nulle.

Par conséquent les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges : par exemple $p(5 < X < 12) = p(5 \leqslant X \leqslant 12)$.

Définition Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur I.

On appelle fonction de répartition de la variable X, la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = p(X \leqslant x)$.

Remarque Soit a la borne inférieure de l'intervalle I (a est un nombre réel) alors, pour tout x de I, $p(X \leqslant x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. La fonction de répartition F est donc la primitive, qui s'annule en a, de la densité de probabilité f. Si la borne inférieure de l'intervalle I est $-\infty$ alors : $p(X \leqslant x) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple

Si X suit la loi de densité $f : x \mapsto 2x$ sur $[0\,;1]$ alors la fonction de répartition F est la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $F : x \mapsto x^2$ et alors on a $p(0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}3) = 0{,}3^2 - 0{,}2^2 = 0{,}05$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 — Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Fonction de densité et calcul de probabilité

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $I = [1\,;3]$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[1\,;3]$.

a) Déterminer $p(X \geqslant 2)$ et $p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

c) Calculer $F(2)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés de continuité des fonctions usuelles.

2 La fonction f est définie sur I, donc $x \in \mathrm{I}$, ce qui signifie, ici, que x est compris entre 1 et 3.

3 Pour calculer l'intégrale de f sur I, on utilise une primitive de f.

4 En calculant l'intégrale de f on a déjà trouvé une primitive de f mais elle est légèrement différente de la fonction de répartition F car elle ne s'annule pas en 1.

5 On doit donc chercher la constante c qui permet d'avoir $F(1)=0$.

Solution

1. f est une fonction affine **1** continue sur $\mathbb{R}$, donc sur I. De plus **2** :

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \square\, 1 \geqslant -\frac{1}{4}x \geqslant -\frac{1}{4} \square\, 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}+1 \geqslant -\frac{1}{4}x+1 \geqslant -\frac{3}{4}+1$$

$\Leftrightarrow 0{,}75 \geqslant f(x) \geqslant 0{,}25$. Donc f est bien positive sur I.

Et on a : $\displaystyle\int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_1^3 = -\left(-\frac{3^2}{8}+3\right)-\left(-\frac{1^2}{8}+1\right) = \frac{15}{8}-\frac{7}{8} = \frac{8}{8} = 1.$ **3**

Ainsi, la fonction f est bien une densité de probabilité sur I.

2. a) $\displaystyle p(x \geqslant 2) = p(X \in [2\,;3]) = \int_2^3 \left(-\frac{1}{4}x+1\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_2^3 = \left(-\frac{3^2}{8}+3\right)-\left(-\frac{2^2}{8}+2\right) = \frac{15}{8}-\frac{12}{8} = \frac{3}{8}$ **2**

$$p(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5) = \int_{1{,}5}^{2{,}5} \left(-\frac{1}{4}x+1\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{8}x^2+x\right]_{1{,}5}^{2{,}5} = \left(-\frac{2{,}5^2}{8}+2{,}5\right)-\left(-\frac{1{,}5^2}{8}+1{,}5\right) = \frac{55}{32}-\frac{39}{32} = \frac{1}{2}$$

b) La fonction de répartition F est la primitive **4** de f sur l'intervalle $[1\,;3]$ qui s'annule en 1.

Les primitives de f sont de la forme :

$F(x) = -\frac{1}{4} \times \frac{x^2}{2} + x + c = -\frac{x^2}{8} + x + c$ (où c est une constante réelle). **5** Or $F(1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1^2}{8}+1+c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{7}{8}$.

Donc l'expression de la fonction de répartition de la variable aléatoire X sur $[1\,;3]$ est $F(x) = -\frac{x^2}{8} + x - \frac{7}{8}$.

c) $F(2) = \left(-\frac{2^2}{8}+2-\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8}$. Cela signifie que la probabilité $p(X \leqslant 2)$ est égale à $\frac{5}{8}$.

À vous de jouer !

1 On considère la fonction g définie sur $\mathrm{I} = [0\,;1]$ par $g(x) = 3x^2$.

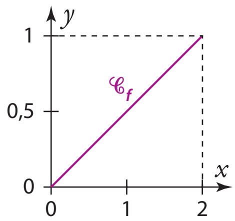
1. Démontrer que g est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité g sur $[0\,;1]$. Déterminer $p(X \geqslant 0{,}25)$ et $p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 0{,}75)$.

2 Soit f la fonction linéaire dont la courbe est représentée ci-contre dans un repère orthonormal.

1. Justifier que f est une densité de probabilité sur $\mathrm{I} = [0\,;2]$.

2. Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f sur $[0\,;2]$. Déterminer $p(X < 1)$ et $p(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1{,}5)$.



3 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité $f : x \mapsto \frac{1}{2}x$ sur l'intervalle $[0\,;2]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

2. Calculer $F(1{,}5) - F(0{,}5)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

4 Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité $f : x \mapsto 3x^2$ sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

2. Calculer $F(0)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

3. Calculer $F(-0{,}5) - F(-0{,}2)$. Interpréter le résultat en termes de probabilités.

→ Exercices 39 à 50 p. 210

Cours

2 Espérance et variance d'une loi à densité

Définition Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur un intervalle I.
L'espérance de X est $E(X)=\int_I xf(x)\mathrm{d}x$ et la variance de X est $V(X)=\int_I (x-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque La variance peut aussi se calculer à l'aide de la formule de Koenig-Huygens :
$V(X)=\int_I x^2 f(x)\mathrm{d}x-(E(X))^2$

Exemple Si X suit la loi de densité $f: x \mapsto 2x$ sur [0 ; 1] alors :

$$E(X)=\int_0^1 x \times 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 2x^2\mathrm{d}x=\left[2\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\times\frac{1^3}{3}-2\times\frac{0^3}{3}=\frac{2}{3}$$

Et donc $V(X)=\int_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\times 2x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)\times 2x\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x\right)\mathrm{d}x$.

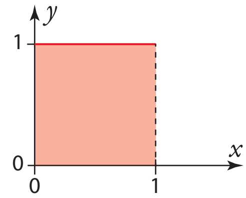
Soit $V(X)=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{8x^3}{9}+\frac{4}{9}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}-0=\frac{1}{18}$

3 Loi uniforme sur [0 ; 1]

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre 0 et 1, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).
Ainsi, dans cette situation on choisira comme densité de probabilité une fonction constante

Définition Loi uniforme sur [0;1]

On appelle loi uniforme sur I = [0 ; 1] la loi de densité de probabilité f,
où f est la fonction constante égale à 1 pour tout x de I.



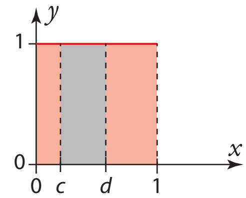
Démonstration

La fonction f ainsi définie est bien une densité de probabilité sur [0 ; 1] car elle est continue, positive et l'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe est égal à 1 u.a. sur [0 ; 1] car c'est un carré de côté 1.

Propriété Probabilité dans le cas d'une loi uniforme sur [0 ; 1]

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [0 ; 1] alors, pour tous réels c et d compris entre 0 et 1, on a :

$$p(c \leqslant X \leqslant d)=d-c$$



Démonstration

On peut le voir graphiquement : l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x=c$ et $x=d$ correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $d-c$ et de longueur 1.
Donc l'aire est égale à longueur × largeur = $d-c$.

Exemple Dans un cabinet médical, on a établi, après étude statistique, que le temps d'attente était complètement aléatoire et variait de façon uniforme jusqu'à 1 heure maximum. Si on appelle X la variable aléatoire qui correspond au temps d'attente, alors on peut dire que X suit la loi uniforme sur [0 ; 1].

Et donc la probabilité qu'un patient attende plus d'un quart d'heure est égale à $p\left(\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant 1\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.
Un patient a donc $\frac{3}{4}$ ou 75 % de chances d'attendre plus d'un quart d'heure.

Exercices résolus

Méthode 2 Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi à densité

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto x - \frac{1}{2}$ sur l'intervalle I = [1 ; 2].
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Solution

$$E(X) = \int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{5}{3} - \frac{1}{12} = \frac{19}{12}.$$ **1**

Et, on a donc, en utilisant la formule de König-Huygens : $V(X) = \int_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x - \left(\frac{19}{12}\right)^2$

Or $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = 3$. Donc $V(X) = 3 - \left(\frac{19}{12}\right)^2 = \frac{71}{144}$. **2**

Conseils & Méthodes

1 Il n'existe pas de formule pour déterminer la primitive du produit de fonctions $x \times f(x)$. Il faut donc développer ce produit.

2 On procède de même pour le produit $x^2 \times f(x)$.

À vous de jouer !

5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto 0{,}5x$ sur l'intervalle $I = [0 ; 2]$.
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

6 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité $f : x \mapsto 3x^2$ sur l'intervalle I = [0 ; 1].
Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

↪ Exercices 51 à 52 p. 211

Méthode 3 Calculer des probabilités dans le cas d'une loi uniforme sur [0 ; 1]

Énoncé

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0 ; 1]. Calculer les probabilités suivantes.

a) $p(X \in [0{,}125 ; 0{,}387])$ **b)** $p\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right)$ **c)** $p(X \geqslant \sqrt{3} - 1)$

Solution

a) $p(X \in [0{,}125 ; 0{,}387]) = 0{,}387 - 0{,}125 = 0{,}262$

b) $p\left(X \leqslant \frac{1}{4}\right) = p\left(0 \leqslant X \leqslant \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

c) $p(X \geqslant \sqrt{3} - 1) = P(\sqrt{3} - 1 \leqslant X \leqslant 1) = 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$ **1**

Conseils & Méthodes

1 Lorsqu'on utilise la loi uniforme sur [0 ; 1], l'événement : « $X \geqslant \sqrt{3} - 1$ » signifie de façon implicite « $1 \geqslant X \geqslant \sqrt{3} - 1$ » car X est forcément inférieur ou égal à 1.

À vous de jouer !

7 Un technicien de la société qui fournit l'énergie doit passer chez Sarah pour relever les compteurs de gaz. Il a prévenu qu'il passait entre 8h00 et 9h00. Sarah l'attend. Son temps d'attente, en heures, est une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme sur [0 ; 1].
1. Quelle est la probabilité que Sarah attende moins de 20 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que Sarah attende plus de trois quart d'heure ?

8 Wassim et Lilia utilisent la fonction **random()** de la calculatrice qui affiche un nombre au hasard entre 0 et 1. Le plus grand nombre obtenu gagne.
1. À la première partie, Wassim commence et obtient 0,2797356, puis Lilia s'apprête à jouer. Quelle est la probabilité que Lilia gagne la partie ?
2. À la deuxième partie, Lilia commence et obtient 0,9969427. Quelle est la probabilité qu'elle gagne encore la partie ?

↪ Exercices 53 à 54 p. 211

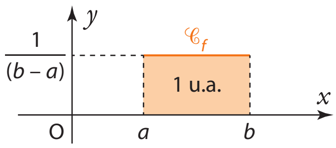
Cours

4 Loi uniforme sur $[a\,;b]$

Quand on considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard entre a et b, on est dans une situation où la probabilité de chaque issue est la même (équiprobabilité).
On choisira donc aussi comme densité de probabilité une fonction constante.

Définition Loi uniforme sur $[a\,;b]$

Soit a et b deux nombres réels.
On appelle loi uniforme sur $I=[a\,;b]$ la loi de densité de probabilité f,
où f est la fonction constante $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ pour tout x de I.



Remarque La loi uniforme sur $[a\,;b]$ peut être notée $U([a\,;b])$. Cette définition est aussi une propriété qui peut être démontrée.

Démonstration

Sur $[a\,;b]$, f est continue car c'est une fonction constante et est positive car $b > a$.
L'aire du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe est égale à 1 u.a. sur $[a\,;b]$ car ce domaine est un rectangle de longueur b-a et de largeur $\dfrac{1}{b-a}$. On a aire = longueur × largeur $= \dfrac{1}{b-a}\times(b-a)=1$.

Propriété Probabilité dans le cas d'une loi uniforme sur $[a\,;b]$

Si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$ alors,
pour tous réels c et d dans $[a\,;b]$, on a :

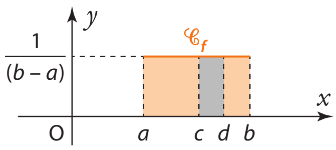
$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Démonstration

On peut le voir graphiquement : l'aire du domaine compris entre les droites verticales d'équation $x=c$ et $x=d$ correspond à l'aire d'un rectangle de largeur $d-c$ et de longueur $\dfrac{1}{b-a}$.
Donc l'aire est égale à longueur × largeur $= \dfrac{1}{b-a}\times(d-c)$

On peut aussi le démontrer avec une intégrale :

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a}.$$



Propriété Fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a\,;b]$

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$
alors la fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a\,;b]$
par :

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Propriété Espérance et variance d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$.
L'espérance de X est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Démonstration

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 4 Calculer des probabilités dans le cas d'une loi uniforme sur $[a\,;b]$

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [1 ; 5].

1. Calculer $p(X \leqslant 2)$ et $p(2 < X < 4)$.

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Solution

1. [1] $p(X \leqslant 2) = p(1 \leqslant X \leqslant 2) = \dfrac{2-1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$ et $p(2 < X < 4) = \dfrac{4-2}{5-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

2. $E(X) = \dfrac{5+1}{2} = 3$ et $V(X) = \dfrac{(5-1)^2}{12} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

Conseils & Méthodes

[1] Lorsqu'on utilise la loi uniforme sur [1 ; 5], l'évènement : « $X \leqslant 2$ » signifie de façon implicite « $1 \leqslant X \leqslant 2$ » car X est forcément supérieur ou égal à 1.

À vous de jouer !

9 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 10].
1. Calculer $p(X > 3)$ et $p(X \in [2\,;7])$
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

10 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [−4 ; 4].
1. Calculer $p(X \geqslant -1)$ et $p(X \in [-3\,;3])$
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

↪ Exercices 55 à 56 p. 211

Méthode 5 Modéliser avec la loi uniforme

Énoncé

On considère que le temps d'attente, en minutes, au service d'assistance téléphonique d'un opérateur de téléphone mobile est donné par une variable aléatoire X qui suit une loi à densité. De plus l'opérateur assure que le temps d'attente avant d'obtenir un conseiller n'excédera pas 15 min.

1. Quelle densité de probabilité permet de modéliser ce problème ?

2. Déterminer la probabilité que le temps d'attente soit :

a) inférieur à 3 min. b) supérieur à 10 min.

Solution

1. Aucune valeur n'est privilégiée donc on peut modéliser à l'aide d'une loi uniforme. Comme la variable aléatoire prend ses valeurs dans [0 ; 15] [1], on prend la loi uniforme sur [0 ; 15] dont la densité de probabilité est la fonction constante $f : x \mapsto \dfrac{1}{15}$.

2. a) $p(X < 3) = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$ b) $p(X > 10) = p(10 < X \leqslant 15) = \dfrac{15-10}{15} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Conseils & Méthodes

[1] Si l'énoncé ne précise pas le temps minimal d'attente c'est qu'il s'agit de 0 minutes !

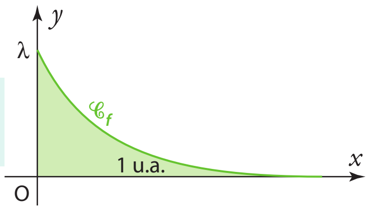
À vous de jouer !

11 Émilie achète un pull sur un site de vente en ligne et paie une livraison « express » comprise entre 24 h et 72 h. On admet que ce délai de livraison D suit une loi uniforme.
1. Quelle est la probabilité qu'Émilie reçoive son pull :
a) dans moins de 24 h ? b) dans plus de deux jours ?
2. En moyenne, dans ce type de livraison « express », quel est le délai de livraison ?

12 Un programme informatique fait varier la couleur de l'écran de veille d'un ordinateur toutes les 10 s en choisissant aléatoirement une longueur d'onde comprise entre 400 nm et 670 nm.
Quelle est la probabilité qu'au prochain changement de couleur, l'écran de veille prenne :
a) la couleur violette (moins de 462 nm) ?
b) la couleur orange (de 600 nm à 625 nm environ) ?

↪ Exercices 57 à 58 p. 211

5 Loi exponentielle



Propriété Densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$

Soit λ un nombre réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est une **densité de probabilité** sur $[0\,;+\infty[$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c08-04

↪ **Apprendre à démontrer** p. 208

Définition Loi exponentielle de paramètre λ

On appelle **loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$**, notée $E(\lambda)$, la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

Remarque $f(0)=\lambda e^{-\lambda\times 0}=\lambda e^{0}=\lambda$. Donc l'ordonnée à l'origine de la courbe représentative de f est égale à λ.

Propriété Calcul de probabilités

Pour tous nombres positifs a, c et d : • $p(X\leqslant a)=1-e^{-\lambda a}$ • $p(X\geqslant a)=e^{-\lambda a}$ • $p(c\leqslant X\leqslant d)=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$

Démonstration

$$p(X\leqslant a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a=-e^{-\lambda a}-(-e^{-\lambda\times 0})=-e^{-\lambda a}+e^{0}=1-e^{-\lambda a}$$

$$p(X\geqslant a)=1-p(X<a)=1-p(X\leqslant a)=1-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}$$

$$p(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d=-e^{-\lambda d}+e^{-\lambda c}=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}.$$

Propriété Fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi $E(\lambda)$ alors **la fonction de répartition de la loi exponentielle** de paramètre λ est la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=1-e^{-\lambda x}$.

Propriété (admise) Espérance

L'**espérance** d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$

Propriété Absence de mémoire

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$. Pour tous nombres strictement positifs t et h, on a : $p_{(X>t)}(X>t+h)=p(X>h)$

Démonstration $p_{(X>t)}(X>t+h)$ est une probabilité conditionnelle, donc :

$$p_{(X>t)}(X>t+h)=\frac{p((X>t)\cap(X>t+h))}{p(X>t)}=\frac{p(X>t+h)}{p(X>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda(t+h)+\lambda t}=e^{-\lambda h}=p(X>h)$$

Exemple Soit un appareil dont la durée de vie en années est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}1$. On a alors $p_{X>3}(X>5)=p_{X>3}(X>3+2)=p(X>2)$. Donc si l'appareil a déjà fonctionné pendant plus de 3 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 2 ans de plus (soit plus de 5 ans en tout) est la même que la probabilité (non conditionnelle) de fonctionner pendant plus de 2 ans.

Remarque On dit alors que la loi exponentielle est **sans vieillissement** ou **avec absence de mémoire**.

Exercices résolus

Méthode 6 Calculer une probabilité avec la loi exponentielle de paramètre λ

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Déterminer : a) $p(X \leqslant 2)$, $p(X > 1)$ et $p_{X>1}(X > 3)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-4} près. b) $E(X)$

Solution

a) $p(X \leqslant 2) = 1 - e^{-2\times2} = 1 - e^{-4} \approx 0{,}9817$ **1** et $p(X > 1) = e^{-2\times1} = e^{-2} \approx 0{,}135\,3$

D'après la propriété « d'absence de mémoire » on a :

$p_{X>1}(X > 3) = p_{X>1}(X > 1 + 2) = p(X > 2) = e^{-2\times2} = e^{-4} \approx 0{,}0183$ **2**

b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

Conseils & Méthodes

1 $p(X > 1) = p(X \geqslant 1)$

2 On décompose 3 en 1 + 2 pour montrer la propriété d'absence de mémoire : $p_{(X>t)}(X > t + h) = p(X > h)$ avec, ici, t qui vaut 1 et h qui vaut 2.

À vous de jouer !

13 X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$. Déterminer :
a) $p(X \leqslant 5)$ **b)** $p(10 < X < 20)$ **c)** $p_{X>6}(X \geqslant 16)$ **d)** $E(X)$.

14 X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}02$. Déterminer :
a) $p(X > 50)$ **b)** $p(X \in [15\,;75])$ **c)** $p_{X>50}(X \geqslant 80)$ **d)** $E(X)$.

↪ Exercices 59 à 60 p. 211

Méthode 7 Modéliser avec la loi exponentielle

Énoncé

La durée de vie d'un appareil photo numérique avant la première panne suit une loi exponentielle de paramètre λ. Janek vient d'en acheter un. Les utilisateurs de cet appareil ont signalé une première panne au bout de 4 ans d'utilisation.

1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par la durée de vie D de cet appareil photo.

2. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne 10 ans sans avoir de panne ?

3. Trois ans plus tard Janek n'a pas eu de panne. Quelle est la probabilité que son appareil fonctionne encore 2 ans sans avoir de panne ?

Solution

1. $E(D) = 4$. **1** Or D suit une loi exponentielle, donc $E(D) = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi $\frac{1}{\lambda} = 4$. Et donc $\lambda = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

2. $p(D \geqslant 10) = e^{-0{,}25\times10} = e^{-2{,}5} \approx 0\,{,}082$.
La probabilité qu'il fonctionne 10 ans est d'environ 8,2 %.

3. $p_{D\geqslant3}(D \geqslant 3 + 2) = p(D \geqslant 2) = e^{-0{,}25\times2} = e^{-0{,}5} \approx 0{,}607$. **2** Sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans, la probabilité qu'il dure encore 2 ans sans avoir de panne est d'environ 60,7 %.

Conseils & Méthodes

1 Le terme « moyenne » indique que l'on parle de l'espérance de la variable D c'est-à-dire 4 ans.

2 On pense à une probabilité conditionnelle car on sait que $D > 3$.

À vous de jouer !

15 Un appareil photo numérique a une durée de vie moyenne de 10 ans.
1. Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle suivie par cet appareil photo.
2. Sachant que cet appareil a fonctionné pendant 10 ans, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore 5 ans sans avoir de panne ?

16 Dans un pays, la répartition de la population en fonction de l'âge pouvait être modélisée par la densité de probabilité $f : x \mapsto \frac{1}{16}e^{-\frac{1}{16}x}$.
On interroge une personne au hasard dans cette population.
1. Quelle est la probabilité que cette personne ait :
a) moins de 18 ans ? **b)** plus de 60 ans ?
2. Quel est l'âge moyen de la population de ce pays ?

↪ Exercice 61 p. 211

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c08-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 8 Étudier une densité de probabilité sur un intervalle I = [a ; $+\infty$[ou I =]$-\infty$; a]

Énoncé

f est la fonction définie sur I = [2 ; $+\infty$[par $f(x) = \dfrac{8}{x^3}$.

1. Justifier que la fonction f est une densité de probabilité sur I.

2. Soit X la variable aléatoire à densité f sur I. Déterminer l'espérance de X.

Solution

1. La fonction f est une fonction rationnelle, elle est continue en chaque point où elle est définie **1**. Ainsi f étant définie sur [2 ; $+\infty$[, elle est aussi continue sur [2 ; $+\infty$[. Si $x \in [2 ; +\infty[$ alors x est positif, et donc x^3 est aussi positif. 8 étant un nombre positif, le quotient $\dfrac{8}{x^3}$ est donc positif sur [2 ; $+\infty$[.

On en conclut que f est continue et positive sur I. **2**

Étudions maintenant, pour tout réel b supérieur à 2, l'intégrale de f de 2 à b : $\displaystyle\int_2^b f(x)\mathrm{d}x$.

f est continue sur [2 ; b[et est telle que $f(x) = 8 \times \dfrac{1}{x^3}$.

f admet donc une primitive F sur [2 ; b[telle que $F(x) = 8 \times \left(-\dfrac{1}{2x^2}\right) = -\dfrac{4}{x^2}$.

Donc : $\displaystyle\int_2^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_2^b = F(b) - F(2) = -\frac{4}{b^2} - \left(-\frac{4}{2^2}\right) = -\frac{4}{b^2} + 1.$

Si b tend vers $+\infty$, alors $-\dfrac{4}{b^2}$ tend vers 0 **3**.

Ainsi, par addition des limites on en déduit : $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_2^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} -\frac{4}{b^2} + 1 = 1.$

Cela signifie que l'intégrale de f sur l'intervalle I = [2 ;$+\infty$[est égale à 1.

2. Comme l'intervalle I a une borne infinie on va devoir encore utiliser une limite pour déterminer l'espérance :

$\displaystyle E(X) = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b xf(x)\mathrm{d}x.$

Or, $\displaystyle\int_2^b xf(x)\mathrm{d}x = \int_2^b x \times \frac{8}{x^3}\mathrm{d}x = \int_2^b \frac{8}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{8}{x}\right]_2^b = -\frac{8}{b} - \left(-\frac{8}{2}\right) = -\frac{8}{b} + 4.$

Si b tend vers $+\infty$, alors $-\dfrac{8}{b}$ tend vers 0.

Ainsi, par addition des limites on en déduit : $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_2^b x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} -\frac{8}{b} + 4 = 4$. Donc $E(X) = 4$.

Conseils & Méthodes

1 On utilise les propriétés de continuité des fonctions usuelles.

2 L'intégrale de f sur [2 ; $+\infty$[se traduit par $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \int_2^b f(x)\mathrm{d}x$. Dans ce cas on calcule d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_2^b f(x)\mathrm{d}x$ puis on étudie ensuite la limite lorsque b tend vers $+\infty$

3 D'après la propriété de quotient des limites : « $\dfrac{-4}{+\infty} = 0$ »

À vous de jouer !

17 Soit g la fonction définie sur]$-\infty$; 0] par $g(t) = \mathrm{e}^t$.

1. Soit x un nombre réel strictement négatif.

Démontrer que $\displaystyle\int_x^0 g(t)\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^x$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^x$.

3. En déduire que g est une densité de probabilité sur l'intervalle]$-\infty$; 0].

4. Soit X la variable aléatoire à densité g sur]$-\infty$; 0]. Déterminer la probabilité que X soit supérieur à -4.

18 h est la fonction définie sur I = [1 ; $+\infty$[par :

$$h(x) = \frac{1}{x^2}.$$

1. Justifier que la fonction h est une densité de probabilité sur I.

2. Soit Y la variable aléatoire à densité h sur I.

a) Déterminer $p(Y \geqslant 5)$

b) Que peut-on dire de $E(Y)$?

→ Exercices 68 à 70 p. 212

Exercices résolus

Méthode 9 Déterminer le paramètre λ d'une loi exponentielle

Cours 5 p. 204

Énoncé

Une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est telle que la probabilité $p(x < 5) = \frac{1}{4}$.

Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et une valeur approchée à 10^{-2} près.

Solution

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout réel a positif, on a **1** : $p(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$.

Donc pour $a = 5$, cela donne : $p(X < 5) = 1 - e^{-5\lambda}$.

Or, d'après l'énoncé $p(X < 5) = \frac{1}{4}$. Donc on a : $1 - e^{-5\lambda} = \frac{1}{4}$.

Résolvons cette équation : $1 - e^{-5\lambda} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = e^{-5\lambda} \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}{5} \approx 0{,}06$.

Conseils & Méthodes

1 On traduit l'égalité $p(X < 5) = \frac{1}{4}$ en une équation mettant en jeu la fonction exponentielle à l'aide des formules.

À vous de jouer !

19 Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Sachant que $p(Y \geqslant 10) = \frac{2}{5}$, déterminer λ.

20 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Sachant que $p(X \leqslant 2) = 0{,}75$ déterminer λ.

21 La durée de vie, en années, d'une calculatrice est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On sait que 10 % des calculatrices tombent en panne durant la première année.
1. Déterminer la valeur, arrondie à 10^{-2} près de λ.
2. En déduire la durée de vie, en moyenne, d'une calculatrice.

Exercices 82 à 84 p. 214

Méthode 10 Déterminer une loi uniforme $U([a\,;b])$

Cours 4 p. 202

Énoncé

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On sait que $E(X) = 5$ et $V(X) = 3$. Déterminer les réels a et b.

Solution

$E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. **1**

On obtient le système $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 5 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 10 \\ (b-a)^2 = 36 \end{cases}$.

On peut résoudre ce système en utilisant la méthode « par substitution » **2** :

$\begin{cases} a = 10 - b \\ (b-(10-b))^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 - b \\ (2b-10)^2 = 36 \end{cases}$ Résolvons la deuxième équation **3** :

$(2b-10)^2 = 36 \Leftrightarrow 2b - 10 = 6$ ou $2b - 10 = -6 \Leftrightarrow b = 8$ ou $b = 2$.

Comme $a = 10 - b$ alors $a = 2$ ou $a = 8$. Sachant que $a < b$, on en déduit que $a = 2$ et $b = 8$

Conseils & Méthodes

1 C'est un problème à deux inconnues a et b, donc pour le résoudre il s'agit de trouver deux équations, qui vont nous être données grâce aux formules de $E(X)$ et $V(X)$.

2 On isole d'abord a dans la première équation puis on remplace a dans la deuxième équation par l'expression trouvée dans la première. On obtient ainsi une équation à une seule inconnue b.

3 C'est une équation de la forme $x^2 = c$, où c est un nombre réel positif, qui a deux solutions $\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

À vous de jouer !

22 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1\,;b]$ où b est un nombre réel supérieur à 1.
Sachant que $V(X) = \frac{1}{3}$, déterminer b.

23 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme de densité $f : x \mapsto \frac{1}{10}$ sur $[a\,;b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Sachant que $E(X) = 2$. Déterminer a et b.

Exercices 76 à 78 p. 213

La propriété à démontrer

Soit λ un nombre réel strictement positif. La fonction f définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur I.

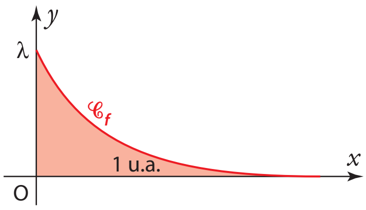
On utilisera la définition de la densité de probabilité.

Comprendre avant de rédiger

- Pour montrer que f est une densité de probabilité sur I, il faut vérifier que f possède trois caractéristiques :

① continue sur I. ② positive sur I. ③ son intégrale sur I est égale à 1.

- La difficulté principale est que l'intervalle I sur lequel on étudie la densité de la fonction f possède ici une borne infinie. Donc pour calculer l'intégrale de f sur I et montrer qu'elle est égale à 1, on doit étudier une limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt$.



Rédiger

Étape 1

On montre que f est continue sur I.

On peut utiliser le fait qu'une fonction dérivable est obligatoirement continue. Donc montrer que la fonction est dérivable puis en déduire qu'elle est continue.

Étape 2

On montre que f est positive sur I.

Penser à utiliser la condition sur λ donnée dans la propriété.

Étape 3

On montre que l'intégrale de f sur I est égale à 1.

Le calcul de cette intégrale se fait en deux temps :

- On commence par calculer l'intégrale de f de 0 à x, $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt$, où x est un réel positif.
- On étudie ensuite la limite de cette intégrale lorsque x tend vers $+\infty$.

La démonstration rédigée

La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est de la forme e^u où u est la fonction affine $u : t \mapsto -\lambda t$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I inclus dans $\mathbb{R}$. Or, on sait que si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I. La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est donc dérivable sur I. Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I et λ étant une constante, on en déduit que la fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est continue sur I.

D'une part, on sait que λ est un nombre strictement positif sur I. D'autre part, on sait que, quel que soit le nombre réel X, e^X est strictement positif ; donc $e^{-\lambda t} > 0$.

Le produit $\lambda e^{-\lambda t}$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, sur l'intervalle I.

Si on pose $u(t) = -\lambda t$, on a alors $u'(t) = -\lambda$. La fonction $f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ est donc de la forme $-u'(t)e^{u(t)}$ qui admet pour primitive $-e^{u(t)}$.
Donc f admet pour primitive la fonction $F : t \mapsto -e^{-\lambda t}$.

Ainsi on a : $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^{-\lambda \times 0} = 1 - e^{-\lambda x}$

Comme $\lambda > 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} -\lambda x = -\infty$. On sait que $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition des limites, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$.

Donc par soustraction des limites, on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante.

Soit λ un nombre réel strictement positif.
La fonction f définie sur $I =]-\infty\,; 0]$ par $f(t) = \lambda e^{\lambda t}$ est une densité de probabilité sur I.