21 Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

La variable aléatoire donnant le produit des résultats de deux dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4 suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; 16\}$. ☐ ☐

22 Épreuve de Bernoulli

On tire au sort une boule dans une urne et on note sa couleur.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Cette expérience aléatoire est une expérience de Bernoulli quand l'urne contient :

a 10 boules : 3 jaunes, 2 vertes et 5 orange.
b 20 boules : 13 jaunes et 7 orange.
c 20 boules rouges numérotées : 10 avec des nombres pairs et 10 avec des nombres impairs.
d une seule boule.

23 Loi de Bernoulli (1)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

Toute variable aléatoire ne prenant que deux valeurs suit une loi de Bernoulli. ☐ ☐

24 Loi de Bernoulli (2)

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

On considère une variable aléatoire Y suivant une loi de Bernoulli et vérifiant $V(Y) = 0{,}16$.

Les valeurs possibles pour $p(Y = 1)$ sont :

a 0,2 b 0,8
c 0,4 d 0,016

25 Schéma de Bernoulli

Comment faire pour justifier qu'une succession d'épreuves est un schéma de Bernoulli ?

26 Loi binomiale (1)

On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}2$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse.

La variable aléatoire de E donnant le nombre d'**échecs** :

a ne suit pas une loi binomiale.
b suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}2$.
c suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.
d suit la loi binomiale de paramètres $n = 0{,}2$ et $p = 10$.

27 Loi binomiale (2)

On considère une variable aléatoire Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$.

Calculer $p(Y = 1)$.

28 Espérance de la loi binomiale (1)

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}63$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

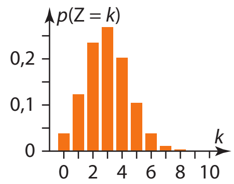
Quelle est l'espérance de X ?

a 63 b 126
c 200 d 630

29 Espérance de la loi binomiale (2)

Choisir la bonne réponse.

On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale représentée par le diagramme en barres ci-contre.



Quelle est son espérance ?

a 8 b 3
c 0,26 d 6

30 Intervalle de fluctuation

En tabulant $p(X \leqslant k)$ pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale, on obtient le tableau.

k	$p(X \leqslant k)$
0	0,0016
1	0,0142
2	0,0617
3	0,1727
4	0,3519
5	0,5643
6	0,7549
7	0,8868
8	0,9578
9	0,9876
10	0,9972

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

L'intervalle $[0 ; 8]$ est le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la forme $[0 ; b]$. ☐ ☐

31 Loi géométrique (1)

Soit X suivant une loi géométrique de paramètre 0,4.

Calculer $p(X = 5)$.

32 Loi géométrique (2)

Soit X suivant une loi géométrique de paramètre 0,3.

Choisir la bonne réponse.

La valeur de $p_{X > 10}(X > 15)$ est :

a $0{,}3^5$ b $0{,}7^5$
c $0{,}3^{15}$ d $0{,}7^{15}$

33 Loi géométrique (3)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? V F

La variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir le premier échec lorsque l'on réalise successivement et de manière indépendante la même expérience de Bernoulli suit une loi géométrique. ☐ ☐

Exercices d'application

Loi uniforme sur {1 ; 2 ; … ; n} Méthode 1 p. 171

34 Benoît reçoit entre 1 et 15 courriels par jour et les probabilités de ces différents nombres sont égales.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire C donnant le nombre de courriels reçus par Benoît pendant un jour ?
2. En déduire $E(C)$ et $V(C)$.
3. Quelle est la probabilité qu'il reçoive plus de 4 courriels ?

35 On tire un nombre au hasard entre 10 et 99 et on considère la variable aléatoire D donnant son chiffre des dizaines.
1. Justifier que D suit une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ en précisant la valeur de n.
2. Pour ce tirage, la variable aléatoire U donnant le chiffre des unités suit elle une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$?

36 Érika boit équiprobablement entre 1 et 4 cafés par jour.

1. Donner la loi suivie par la variable aléatoire C donnant le nombre de cafés bus par Érika en un jour.
2. Expliquer pourquoi sur 100 jours, on peut s'attendre à ce qu'elle ait bu environ 250 cafés.

37 On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ et dont l'espérance est 11,5. Déterminer n.

Épreuve de Bernoulli

38 Dans un lycée, 27 % des élèves de Terminale ont choisi l'option « Mathématiques complémentaires ».
On tire au sort un élève de Terminale dans ce lycée et on regarde s'il a opté pour l'option « Mathématiques complémentaires » ou non.
Expliquer en quoi cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli, préciser à quoi peut correspondre un succès puis donner la probabilité p d'un succès.

39 D'après la SNCF, 91,4 % des TGV arrivent à l'heure.
1. Elie prend un TGV.
Expliquer pourquoi l'expérience aléatoire consistant à regarder s'il est à l'heure ou non est une épreuve de Bernoulli.
2. Préciser la probabilité p d'un succès.

40 Fiona joue à « pierre-feuille-ciseaux ».
Expliquer pourquoi le choix de son adversaire (pierre, feuille ou ciseaux) à ce jeu n'est pas assimilable à une épreuve de Bernoulli.

Loi de Bernoulli Méthode 2 p. 171

41 On considère une pièce truquée de sorte qu'elle ait deux chances sur trois de tomber sur PILE.
On lance une seule fois cette pièce et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de FACE obtenus.
1. Justifier que X suit la loi de Bernoulli et préciser la valeur de p.
2. Donner l'écart-type de X.

42 **1.** On lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12 et on considère la variable aléatoire X donnant le chiffre des dizaines du résultat obtenu.
Justifier que X suit une loi de Bernoulli et préciser son paramètre p.
2. On lance deux dés équilibrés, l'un à quatre faces numérotées de 1 à 4 et l'autre à huit faces numérotées de 1 à 8.
On considère la variable aléatoire Y donnant le chiffre des dizaines de la somme des deux nombres obtenus.
Préciser la loi de Y.

Démo

43 Soit X suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
1. Démontrer la formule du cours $E(X) = p$.
2. Démontrer la formule du cours $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Schéma de Bernoulli

Méthode 3 p. 173

44 Quand elle joue avec son bilboquet, Samira arrive à planter la boule sur le socle avec une probabilité 0,78.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 3 « lancers » de bilboquet à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'elle plante exactement une fois la boule sur le socle.

b) qu'elle plante au moins deux fois la boule sur le socle.

45 La probabilité qu'un appel aux pompiers soit injustifié est 0,19.

1. Quelle hypothèse doit-on faire pour pouvoir assimiler la répétition de 4 appels aux pompiers, selon qu'ils sont injustifiés ou non, à un schéma de Bernoulli ?

2. Sous cette hypothèse, représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité :

a) qu'exactement deux des quatre appels soient injustifiés.

b) qu'au moins un appel soit justifié.

46 Lorsqu'il fait ses devoirs, Ismaël n'éteint jamais son téléphone.

Quand il reçoit un message, il y a deux chances sur trois qu'il le regarde, indépendamment du fait qu'il ait regardé ou non les messages précédents.

Pendant tout le temps qu'il a consacré à ses devoirs, il a reçu 3 messages.

1. Justifier que cette situation est assimilable à un schéma de Bernoulli en spécifiant à quel événement correspond un succès.

2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité qu'il ait regardé au moins 2 messages.

Coefficients binomiaux sans triangle de Pascal

47 Sans calculatrice, donner $\binom{10}{10}$ et $\binom{100}{0}$.

48 **1.** Avec la calculatrice, donner $\binom{12}{5}$ et $\binom{12}{6}$.

2. En déduire sans calculatrice :

a) $\binom{12}{7}$ **b)** $\binom{13}{6}$ **c)** $\binom{13}{7}$

49 **1.** Avec la calculatrice, donner $\binom{15}{4}$ et $\binom{15}{5}$.

2. En déduire sans calculatrice :

a) $\binom{15}{11}$ **b)** $\binom{15}{10}$ **c)** $\binom{16}{5}$ **d)** $\binom{16}{11}$

Loi binomiale, définition et calcul de $p(X = k)$

Méthode 4 p. 175

50 On donne le tableau ci-contre dans lequel les valeurs sont arrondies à 10^{-3}.

k	$\binom{4}{k}$	$0{,}42^k$	$0{,}58^k$
0	1	1	1
1	4	0,42	0,58
2	6	0,176	0,336
3	4	0,074	0,195
4	1	0,031	0,113

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}42$ et Y une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}58$.

À l'aide de ce tableau, donner des valeurs approchées de :

a) $p(X = 1)$ **b)** $p(X = 2)$ **c)** $p(Y = 1)$ **d)** $p(Y = 2)$

51 À la roulette, la probabilité que la boule tombe sur rouge est $\frac{18}{37}$.

On joue 20 fois successivement à la roulette en misant systématiquement sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Quelle loi suit X ? Justifier.

2. Calculer la probabilité de gagner 9 parties.

52 On considère que la probabilité qu'un élève de Terminale ait 18 ans ou plus durant l'année scolaire est 0,67.

1. Dans une classe de Terminale de 35 élèves, quelle est la loi suivie par la variable aléatoire M donnant le nombre d'élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année ? Justifier.

2. Calculer $p(M = 10)$, $p(M = 11)$ et $p(M = 12)$.

3. En déduire la probabilité qu'il y ait entre 10 et 12 élèves de la classe encore mineurs à la fin de l'année scolaire.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

Méthode 5 p. 175

53 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}78$.

Calculer avec la calculatrice :

a) $p(X < 75)$ **b)** $p(X > 79)$ **c)** $p(X \geqslant 74)$ **d)** $p(73 < X \leqslant 81)$

54 On considère une variable aléatoire T qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 789$ et $p = 0{,}04$.

Calculer avec la calculatrice :

a) $p(T \in [27 ; 32])$ **b)** $p(T \in [30 ; 789])$

c) $p(T \in [0 ; 40[)$ **d)** $p(T \in]19 ; 41])$

Exercices d'application

55 La probabilité de gagner à un jeu de grattage est 0,1. On considère 1 000 joueurs ayant joué à ce jeu dont on suppose que leurs résultats (« Gagné » ou « Perdu ») sont indépendants et on appelle G la variable aléatoire donnant le nombre de gagnants parmi ces 1 000 joueurs.
Déterminer la probabilité qu'il y ait :
a) plus de 100 gagnants.
b) moins de 85 gagnants.
c) entre 95 (inclus) et 105 (inclus) gagnants.
d) entre 90 (exclu) et 110 (exclu) gagnants.

56 Dans une population, la proportion de végétariens est de 12 %. On suppose cette population suffisamment grande pour pouvoir assimiler le tirage d'une personne dans cette population à un tirage avec remise.
Une cantine servant 250 repas à des personnes issues de cette population prévoit 32 repas végétariens.
Quelle est la probabilité que ce ne soit pas suffisant ?

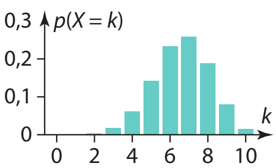
Loi binomiale : espérance et aspect graphique

57 **1.** On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,83$.
Calculer l'espérance de X.
2. Même question avec Y suivant la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,79$.

58 Écrire une fonction **Python** que l'on nommera **`param_binom`** de paramètres **`n`** et **`p`** et qui renvoie $E(X)$ où X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

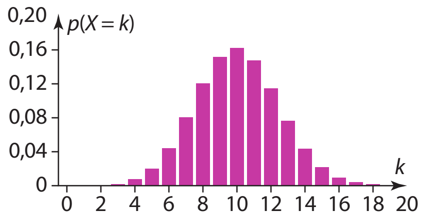
59 On considère une variable aléatoire Z suivant une loi binomiale de paramètres n et p inconnus et vérifiant $E(Z) = 2$ et $0,15 \leqslant p \leqslant 0,16$.
1. Donner un encadrement de n puis en déduire sa valeur.
2. En déduire p.

60 On donne ci-contre le diagramme en barres associé à une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et p inconnu.

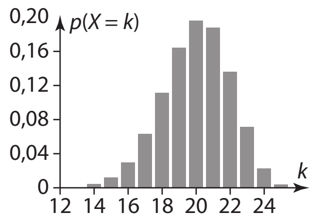


Parmi les trois réels ci-dessous, lequel est susceptible d'être la valeur de p ?
a) 0,66 **b)** 0,16 **c)** 0,87

61 On considère un entier n inconnu et on donne ci-dessous le diagramme en barres associé à une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;0,4)$.



1. a) On admet que $E(X) \in \mathbb{N}$.
Donner une valeur possible pour $E(X)$.
b) En déduire une valeur possible pour n.
2. On donne ci-contre le diagramme en barres associé à une variable aléatoire Y suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ où p est inconnu et ou n est le nombre trouvé à la question **1. b)**.



Proposer une valeur possible de p associé à cette loi.

Intervalles de fluctuation

Méthode 6 p. 177

62 On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 54$ et $p = 0,45$. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation associé à X de la forme $[0\,;b]$:
a) au seuil de 0,95. **b)** au seuil de 99 %.

63 Soit Y qui suit la loi $\mathscr{B}(50\,;0,12)$. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de Y de la forme $[a\,;50]$:
a) au seuil de 0,90. **b)** au risque de 5 %.

64 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0,71$. Déterminer :
a) un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à Z.
b) un intervalle de fluctuation centré au risque de 0,01 associé à Z.

65 Soit F la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus lorsque l'on lance 20 fois la même pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,36.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[0\,;k]$ avec k entier tel que $p(F \in [0\,;k]) \geqslant 0,95$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire.

On peut être sûr au seuil de 95 % que la **fréquence** de FACE obtenus sera inférieure ou égale à … %.

66 Soit J la variable aléatoire donnant le nombre de boules jaunes obtenues lorsque l'on tire 40 fois avec remise une boule dans une urne en contenant 7 jaunes et 13 vertes.
1. Déterminer le plus petit intervalle $[k\,;40]$ avec k entier tel que $p(J \in [k\,;40]) \geqslant 0,99$.
2. Compléter les pointillés sans calcul supplémentaire.

On peut être sûr au seuil de 99 % que la **fréquence** de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à … %.

67 Soit P la variable aléatoire donnant le nombre de nombres pairs obtenus lorsque l'on lance 25 fois `random.randint(1,11)` avec **Python**.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à P.

2. En déduire un encadrement de la fréquence de nombres pairs obtenus au risque de 5 %.

Loi géométrique

Méthode 7 p. 179

68 On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}12$.

Calculer :

a) $p(X = 5)$ **b)** $p(X > 4)$ **c)** $p(X \leqslant 6)$

d) $p(X \geqslant 10)$ **e)** $p(X < 8)$ **f)** $p(4 < X < 10)$

69 On considère une variable aléatoire Y suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0{,}03$.

Calculer :

a) $p(Y = 3)$ **b)** $E(Y)$ **c)** $p(10 < Y < 20)$

d) $p(24 \leqslant Y < 33)$ **e)** $p(33 < Y \leqslant 40)$ **f)** $p(17 \leqslant Y \leqslant 45)$

70 Léa commence une séance d'entraînement de pétanque et on considère que la probabilité qu'elle réussisse un « carreau » est 0,2. On suppose tous les essais indépendants.On appelle X la variable aléatoire donnant le rang du premier carreau réussi.

1. Donner la loi suivie par X.

2. Représenter la situation par un arbre pour les trois premiers essais et y lire $p(X = 2)$.

3. Calculer $p(X = 5)$ puis l'interpréter.

4. Calculer $p(X \leqslant 3)$ puis l'interpréter.

71 On suppose que la probabilité de gagner une partie à une machine à sous est 0,001.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes et on appelle X la variable aléatoire donnant le rang de la première partie gagnée quand on joue plusieurs parties de suite.

1. Donner la loi suivie par X.

2. En combien de parties en moyenne peut-on espérer gagner la première fois avec cette machine à sous ?

3. Calculer $p(X > 500)$ puis l'interpréter.

4. La mise à cette machine à sous est de 2€.

Quelle est la probabilité que l'on gagne avant de ne plus avoir d'argent s'il on dispose de 2000€ ?

72 Sur sa calculatrice, Intissar tire des nombres au hasard avec `EntAlea(1,15)` (générant un entier au hasard entre 1 et 15) jusqu'à ce qu'elle obtienne le nombre 10. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.

1. Justifier que X suit une loi géométrique.

2. Quelle est la probabilité qu'il lui faille entre 5 et 12 essais ?

73 Elsa a une pièce truquée qu'elle lance jusqu'à obtenir PILE. Après de nombreux essais, elle a remarqué qu'en moyenne, il lui fallait 6 lancers afin d'obtenir son premier PILE. Déterminer la probabilité d'obtenir PILE lançant cette pièce.

Probabilités conditionnelles et successions d'épreuves

74 Thème 6 Une urne contient 20 boules de quatre couleurs différentes : 7 rouges, 10 vertes, 2 jaunes et 1 bleue. On tire deux boules sans remise dans cette urne et on note à chaque fois la couleur obtenue.

1. Cette succession de deux épreuves est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

2. La représenter par un arbre.

3. a) Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule verte et une boule jaune (sans tenir compte de l'ordre du tirage).

c) Déterminer la probabilité que la première boule soit jaune sachant que la deuxième est rouge.

d) Déterminer la probabilité que la première boule soit verte sachant que la deuxième est bleue.

75 Le programme des cours collectifs de la salle de sport d'Audrey est le suivant aux heures où elle peut s'y rendre.

- **Lundi :** pilate une semaine sur quatre et musculation trois semaines sur quatre.
- **Mardi :** zumba deux semaines sur cinq et *cycling* trois semaines sur cinq.
- **Mercredi :** fitness une semaine sur six, yoga deux semaines sur six et tai chi trois semaines sur six.

On admet que les activités sont indépendantes d'un jour sur l'autre. Audrey se rend à la salle de sport trois jours de suite du lundi au mercredi.

1. Représenter la situation par un arbre.

2. Calculer la probabilité qu'elle fasse ses trois activités préférées : pilate, *cycling* et yoga.

76 Suite à des problèmes de production, un fabricant de tablettes de chocolat met en place une nouvelle chaîne de production : l'ancienne chaîne ne prend désormais en charge que 40 % de la production.

Un contrôle qualité montre que :

- parmi les tablettes produites par l'ancienne chaîne, 68 % sont commercialisables,
- parmi les tablettes produites par la nouvelle chaîne, 90 % sont commercialisables.

On choisit une tablette au hasard dans la production.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

Coup de pouce On introduira des événements correctement choisis.

2. Calculer la probabilité que la tablette provienne de la nouvelle chaîne de production et soit commercialisable.

3. La tablette tirée au sort n'est pas commercialisable. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la nouvelle chaîne ?

D'après bac

Exercices d'entraînement

Approfondir sur les lois

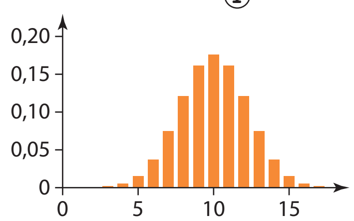
77 On considère une variable X suivant une loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ telle que $V(X) = 24$.
Déterminer n.

78 À un guichet, le temps d'attente exprimé en secondes est 1, 2, …, 600, ces six cents temps d'attente étant équiprobables. On appelle T la variable aléatoire donnant le temps d'attente à ce guichet en seconde.
1. Quelle est la loi suivie par T ?
2. Calculer la probabilité qu'on attende 3 minutes ou plus ?
3. Sachant qu'elle a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité que Fatou attende moins de 4 minutes ?

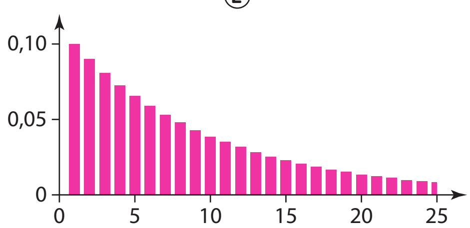
79 Thème 7 La directrice d'une société de location de véhicules affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
Sous cette hypothèse, on considère les 600 premiers contrats signés l'année précédente et on appelle C le nombre de contrats de courte durée parmi tous ces contrats supposés indépendants.
1. Décrire la loi de la variable aléatoire C.
2. En déduire un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à C.
3. 550 des 600 contrats étaient de courte durée.
a) Faire le lien avec la réponse à la question **2.**.
b) Que peut-on penser de l'affirmation de la directrice ?
D'après bac

80 **1.** Un des graphiques ci-dessous correspond à une loi géométrique, l'autre à une loi binomiale.
Associer chaque graphique à sa loi.

①



②



2. Donner une approximation de l'espérance associée à chacune de ces lois.

81 Démo On considère X suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.
1. Montrer $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire $p(X \leqslant k)$ puis $p(X > k)$.

Triangle de Pascal

Méthode 8 p. 180

Pour les exercices 82 à 83 on donne le triangle de Pascal ci-contre.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

82 Déterminer
$\binom{7}{2}, \binom{6}{5}, \binom{7}{6}, \binom{5}{4}$ et $\binom{7}{3}$.

83 Compléter les lignes correspondant à $n = 8$ puis $n = 9$ du triangle de Pascal

84 Démo **1.** Conjecturer une expression de $\binom{n}{1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier cette conjecture à l'aide de la définition des k parmi n.

Intervalles de fluctuation en contexte

85 Thème 7 Quand Munir va faire ses courses, il prévoit toujours la même liste de 30 articles.
Malheureusement, pour chaque article indépendamment les uns des autres, il a remarqué que la probabilité que l'article soit en rayon est 0,8.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre d'articles qu'il trouvera sur les 30.
2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de la forme $[a\,; 30]$ au seuil de 99 % puis interpréter cet intervalle dans les termes de l'énoncé.

86 Une athlète de haut niveau finit toujours ses entraînements quotidiens par un « 100 m ». Elle a remarqué que la probabilité qu'elle le coure en moins de 13 s est 0,74 indépendamment de son temps les autres jours.
1. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % du nombre de fois où elle courra en moins de 13 s sur 70 entraînements.
2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de la forme $[0\,; b]$ au seuil de 95 % du nombre de fois où elle courra en moins de 13 s sur 100 entraînements.

Simulation de lois

87 **1.** Quelle loi la commande **Python** `random.randint(1,10)` permet-elle de simuler ?

2. Donner une commande **Python** permettant de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 100\}$.

88 On considère la fonction **Python** ci-contre.

```
def bernoulli1():
    if random.random() <= 0.63:
        X=1
    else:
        X=0
    return X
```

Justifier que la variable aléatoire x donnant la valeur renvoyée par la fonction `bernoulli1` suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre.

89 Écrire une fonction en **Python** `bernoulli` de paramètre `p` flottant entre `0` et `1` et renvoyant `0` ou `1` de sorte que la fonction simule une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et renvoie sa valeur.

90 On considère le programme **Python** ci-contre.

```
a=random.random()
n=1
while a > 0.3 :
      a=random.random()
      n=n+1
print n
```

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire donnant la valeur `n` affichée par le programme ?

Propriété de non vieillissement

Méthode 9 p. 181

91 Soit X suivant une loi géométrique.
Écrire sans probabilité conditionnelle :

a) $p_{X>9}(X > 12)$ **b)** $p_{X>6}(X \geqslant 10)$

c) $p_{X>5}(X \leqslant 8)$ **d)** $p_{X>2}(X < 20)$

Coup de pouce
Pour les questions **c)** et **d)**, on rappelle que $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.

92 On considère que la probabilité d'être contrôlé lors d'un trajet de bus suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}05$. Depuis le début du mois, Flore a pris 15 fois le bus et n'a pas été contrôlée.
Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas contrôlée avant le 30^{e} trajet ?

93 Thème 7
En 10 lancers successifs d'un dé équilibré à six faces, on n'a pas obtenu de 6.
1. Quelle est la probabilité que l'on n'obtienne pas de 6 avant le 14^{e} lancer ?
2. Quelle est la probabilité que l'on obtienne un 6 avant le 16^{e} lancer ?

94 L'entraînement hebdomadaire de natation de Sabrine est parfois annulé avec une probabilité 0,1 (indépendamment des autres fois).
Cela fait 5 semaines que l'entraînement a bien eu lieu.
1. Quelle est la probabilité que l'entraînement ait bien lieu lors des 10 semaines suivantes ?
2. Quelle est la probabilité qu'un entraînement soit annulé avant le 13^{e} ?

95 Démo
On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$, on ait $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$. On appelle $p = p(X = 1)$.
1. Justifier que $p((X > s + t) \cap (X > s)) = p(X > s + t)$.
2. Montrer que,
$p(X > n + 1) = p(X > n) \times p(X > 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que la suite (u_n) définie par $u_n = p(X > n)$ est géométrique de premier terme $u_1 = 1 - p$ et de raison $1 - p$.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. En remarquant que $p(X = n) = p(X > n - 1) - p(X > n)$, en déduire une expression de $p(X = n)$ puis en déduire la loi suivie par X.

Résolution de problèmes avec l'espérance

Méthode 10 p. 181

96 On considère deux jeux dans lesquels soit on perd, soit on gagne 4 €. Précisement :
- le jeu n° 1 coûte 2 € et la probabilité de gagner est 0,09.
- le jeu n° 2 coûte 1 € et la probabilité de gagner est 0,05.

Comme elle dispose de 20 €, Sineha prévoit d'acheter soit 10 tickets du jeu n° 1 (option 1) soit 20 tickets du jeu n° 2 (option 2) et on appelle X le nombre de tickets gagnants avec l'option 1 et Y avec l'option 2.
1. Donner sans justification les lois de X et Y (on supposera tous les tickets indépendants).
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$. Laquelle des deux options permet d'obtenir en moyenne le plus de tickets gagnants ?

97 Dans un jeu, la mise est de 1 € et on gagne 9 € avec la probabilité 0,1 (on ne gagne rien le reste du temps). On considère deux stratégies. Précisément :
- **Stratégie 1 :** on joue 20 parties.
- **Stratégie 2 :** on joue jusqu'à gagner une partie et on s'arrête (on suppose que l'on dispose d'argent « infini »).

1. Dire combien de parties on peut « espérer » gagner avec la stratégie 1.
Sans tenir compte de la mise, en déduire quelle somme on peut « espérer » gagner avec la stratégie 1 ?
2. Quelle somme gagne-t-on avec la stratégie 2 ?
3. a) Quelle somme dépense-t-on avec la stratégie 1.
b) Dire combien de parties on peut « espérer » jouer puis quelle somme on peut « espérer » miser avec la stratégie 2.
4. Avec laquelle des deux stratégies peut-on espérer perdre le moins possible ?

Exercices bilan

98 Partie de pêche

A ▶ Calcul de probabilités

Le week-end, Michaela va souvent à la pêche.
La probabilité qu'elle y aille le samedi est 0,7 et la probabilité qu'elle y aille le dimanche est :
- 0,3 si elle y est allée le samedi.
- 0,9 s'il n'y est pas allée le samedi.

1. Expliquer pourquoi les deux épreuves consistant à regarder si Michaela va à la pêche le samedi et le dimanche ne sont pas indépendantes.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré puis déterminer la probabilité qu'elle aille au moins une fois à la pêche le week-end.
3. Sachant qu'elle est allée à la pêche ce week-end, quelle est la probabilité qu'elle y soit allée samedi ?

B ▶ Loi géométrique

On considère que la probabilité que Michaela rentre de la pêche après 17 h est de 0,4, indépendamment d'une fois à l'autre.
On appelle X la variable aléatoire donnant le rang de la première fois où elle rentre après 17 h depuis l'ouverture de la pêche.
1. Quelle loi suit X ?
Justifier.
2. Calculer $p(X < 4)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.
3. Déterminer la probabilité qu'il faille attendre la 3^{e} session de pêche pour qu'elle rentre après 17 h.
4. Michaela est allé pêcher 4 fois et est toujours rentrée avant 17 h.
Quelle est la probabilité qu'elle rentre avant 17 h pendant ses 9 premières sessions (les 4 premières comprises) ?

99 Comparaison de lois

Choisir la bonne réponse.
Quand on réalise un grand nombre de fois les expériences aléatoires suivantes, en moyenne, obtient-on un nombre plus élevé en :
a regardant le nombre obtenu quand on lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8 ?
b regardant le nombre de PILE obtenus quand on lance 8 fois une pièce de monnaie équilibrée ?

100 Loi uniforme — Démo

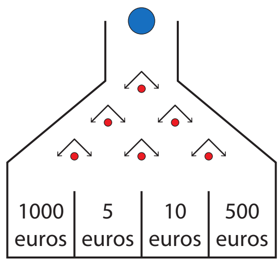
Sans utiliser la formule de l'espérance de la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$, démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ est 3.

Coup de pouce Voir la définition de la loi uniforme et la formule générale de l'espérance d'une variable aléatoire.

101 La planche de Galton — Algo

A ▶ Avec 3 étages

Dans un jeu télévisé , on fait glisser un palet le long d'une planche cloutée comme ci-contre (le palet est en bleu et les clous en rouge).
À chaque étage, le palet rencontre un clou et va à gauche ou à droite puis, après 3 étages, il arrive dans un des quatre réceptacles et indique le gain du joueur.



1. a) Quel serait le gain du joueur si le palet allait à gauche puis à droite puis à gauche sur le dessin ?
À droite puis à droite puis à gauche ?
b) Quel serait le gain du joueur si le palet allait une fois à gauche et deux fois à droite (indépendamment de l'étage) ?
2. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où le palet va à gauche sur le dessin.
a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et en donner les paramètres n et p.
b) Déterminer $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$ et $p(X=3)$.
c) Écrire et compléter le programme Python ci-contre afin qu'il simule le lancer d'un palet et affiche le gain correspondant.

```
import random

gauche = 0
for i in range(3):
    if random.random()<=0.5:
            gauche = gauche+1
if gauche == 0:
   print("…euros")
…
```

d) Recopier et compléter le tableau ci-contre donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire G donnant le gain à ce jeu.

g_i	1 000	5	10	500
$p(G=g_i)$	…	…	…	…

B ▶ Avec 11 étages

On considère le même dispositif appelé « planche de Galton » mais cette fois-ci avec 11 étages : c'est le dispositif utilisé par le présentateur dans la vidéo de début de chapitre p. 164.
1. Sans justifier, combien de réceptacles y aura-t-il dans ce cas ?
2. a) On considère que les réceptacles sont numérotés de 0 pour le plus à gauche à 11 pour le plus à droite.
Quand on considère une bille, expliquer pourquoi la variable aléatoire R donnant le numéro du réceptacle dans lequel elle finit suit une loi binomiale puis donner les paramètres n et p de cette loi binomiale.
b) Tracer le diagramme en barres associé à cette loi binomiale c'est-à-dire le diagramme en barres pour lequel les barres sont centrées sur les valeurs entières k entre 0 et n et dont la hauteur des barres est donnée par $p(X=k)$.
c) Faire le lien avec la vidéo de début de chapitre.

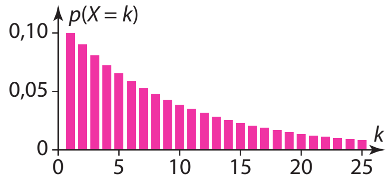
Préparer le BAC L'essentiel

Propriétés de X suivant une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$

- X prenant les valeurs entières de 1 à n avec la même probabilité suit la loi uniforme $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$.
- $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$
- $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$
- $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$

Propriétés de X suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

- X donnant le rang du premier succès quand on réalise successivement et indépendamment la même épreuve de Bernoulli suit une loi géométrique.
- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$
- $p(X \leqslant k) = 1 - (1 - p)^k$
- $p(X > k) = (1 - p)^k$
- Représentation graphique typique de la décroissance exponentielle.



- Loi sans vieillissement : $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$.

Épreuve de Bernoulli

Épreuve à deux issues : succès et échec.

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

X suit une loi $\mathcal{B}(p)$ si $p(X = 1) = p$ et $p(X = 0) = 1 - p$.

Schéma de Bernoulli

Successions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli.

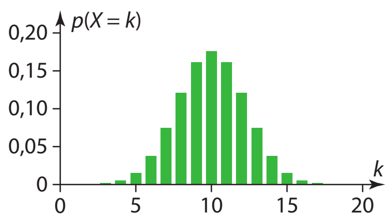
Coefficients binomiaux

- $\dbinom{n}{k}$: nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n
- $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$
- $\dbinom{n-1}{k-1} + \dbinom{n-1}{k} = \dbinom{n}{k}$
- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$
- Triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

Propriétés de X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$

- X donnant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.
- $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$
- $p(X = k) = \dbinom{n}{k} \times p \times (1 - p)^{n-k}$
- Représentation graphique en forme de cloche centrée sur l'espérance



Intervalle de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$

- $[0 ; b]$ avec b le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha$
- $[a ; n]$ avec a le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > \alpha$
- $[a ; b]$ avec a et b les plus petits entiers tels que : $p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de... / Parcours d'exercices

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Identifier et travailler avec la loi uniforme	Méthode 1	1, 34 ,35
▶ Identifier et travailler avec une expérience ou une loi de Bernoulli ou un schéma de Bernouilli	Méthode 2, Méthode 3	38, 3, 41, 42, 5, 44, 45
▶ Travailler avec la loi binomiale	Méthode 4, Méthode 5, Méthode 6	7, 51, 9, 53, 55, 11, 62, 63, 64, 85
▶ Identifier et travailler avec la loi géométrique	Méthode 7, Méthode 9	68, 13, 70, 17, 91, 92
▶ Manipuler les coefficients binomiaux	Méthode 8	15, 82, 83
▶ Comparer des situations avec l'espérance	Méthode 10	19, 96, 97
▶ Travailler avec des arbres et des probabilités conditionnelles		74, 75, 76

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c07-09

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la(les) bonne(s) réponse(s).**

Pour les exercices 102 à 106, une urne contient 200 boules dont 50 sont roses. On tire successivement 10 fois avec remise dans cette urne et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de boules roses obtenues.

	A	B	C	D
102 Ces 10 épreuves indépendantes forment :	un schéma binomial	un schéma de Bernoulli	une loi binomiale	une loi de Bernoulli
103 X suit la loi $\mathscr{B}(n;p)$ avec :	$n = 200$ et $p=50$	$n = 50$ et $p=200$	$n = 200$ et $p = 0{,}25$	$n = 10$ et $p = 0{,}25$
104 $p(X = 3)$ vaut environ :	0,474	0,25	0,776	0,251
105 La probabilité d'obtenir entre 1 et 4 boules roses (inclus) est environ :	0,678	0,532	0,866	0,72
106 La représentation graphique associée à X est :	en forme de cloche centrée sur 2,5	en forme de cloche centrée sur 10	en forme de cloche centrée sur 50	d'une autre forme
107 Lorsque l'on lance un dé équilibré à 6 faces, la variable aléatoire donnant le résultat 0 si le résultat est pair et 1 sinon suit une loi :	de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$	de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$	binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{6}$	binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{1}{2}$
108 X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; 20\}$ $E(X)$ vaut :	10	10,5	11	21
109 Soit X suivant la loi $\mathscr{G}(0{,}02)$. $p(X > 51)$ vaut environ :	0	0,35	0,357	0,364
110 $p_{X>5}(X > 20)$ vaut :	$p(X > 5)$	$p(X > 15)$	$p(X > 20)$	$p(X > 25)$

111 Intervalle de fluctuation

Dans la cantine d'un lycée, 237 élèves ont réservé un repas. Les statistiques montrent que lorsqu'un élève a réservé, la probabilité qu'il mange finalement à la cantine est 0,93.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'élèves supposés indépendants qui mangeront effectivement à la cantine parmi les 237 ayant réservé.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
Justifier.

2. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 95 %.

3. Interpréter cet intervalle dans les termes de l'énoncé.

Méthode 4 p. 175 Méthode 6 p. 177

112 Succession d'épreuves

Dans son téléphone, Naïm a 457 titres classés en deux catégories : 261 titres « métal » et 196 titres « électro ».

Il met son téléphone en mode aléatoire et on considère l'épreuve consistant à jouer un titre et à regarder s'il est « métal » (M) ou « électro » (E).

Dans tout l'exercice, on donnera les probabilités arrondies au millième.

On suppose que le mode aléatoire joue les titres aléatoirement en faisant simplement en sorte de ne pas rejouer deux fois de suite le même titre.

1. La succession de deux de ces titres joués est-elle un schéma de Bernoulli de taille 2 ?

2. Représenter cette succession de deux épreuves par un arbre.

3. a) Calculer la probabilité que le téléphone joue exactement un titre « électro ».

b) Le deuxième titre est « électro ».
Quelle est la probabilité que le premier le soit aussi ?

> **Coup de pouce** Utiliser la définition d'uneprobabilité conditionnelle.

Méthode 3 p. 173

113 Triangle de Pascal

Dresser le triangle de Pascal pour n allant de 0 à 4 et pour tout k entier entre 0 et n.

Méthode 8 p. 180

114 Comparaison de lois

On considère les deux expériences aléatoires ci-dessous :

• on lance une fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 : un succès correspond à un 4 obtenu ;

• on lance quatre fois un dé équilibré à douze faces numérotées de 1 à 12 : un succès correspond à un 12 obtenu.

Sur un grand nombre de répétition de ces expériences en moyenne, laquelle de ces deux expériences aléatoires assure d'obtenir le plus de succès ?

Méthode 10 p. 181

115 Loi géométrique, aspect graphique

Soit X suivant la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}2$.
Sans calcul, tracer l'allure du diagramme en barres des $p(X = k)$ pour k entre 1 et 10 sachant que $p(X = 10) \approx 0{,}027$.

> **Coup de pouce** Voir la propriété du cours sur la représentation graphique d'une loi géométrique.

116 Intervalle de fluctuation centré et loi géométrique

Un grossiste en appareils électroniques assure que seulement 2 % des appareils qu'il vend ont des défauts.

La responsable d'une grande surface tire au sort des appareils parmi ceux livrés par ce grossiste afin de les tester, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise.

1. a) Si l'affirmation du grossiste est vraie, quelle est la probabilité que l'on trouve le premier appareil avec défaut dans les 30 premiers testés ?

> **Coup de pouce** Introduire une variable aléatoire donnant le rang du premier appareil testé ayant un défaut.

b) Au bout de combien d'appareils peut-on « s'attendre » à en trouver un avec défaut ?

c) Si l'on n'a aucun appareil avec défaut dans les 50 premiers testés, quelle est la probabilité que l'on n'en ait pas dans les 75 premiers testés ?

d) Si l'on n'a aucun appareil avec défaut dans les 25 premiers testés, quelle est la probabilité que l'on en ait un avant le 50^e ?

> **Coup de pouce** Utiliser l'événement contraire.

2. La responsable prélève en tout 1500 appareils parmi ceux livrés par ce grossiste.

On appelle D la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils avec défaut parmi eux.

a) Dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte, déterminer $p(D < 35)$ et $p(D \geqslant 30)$.

b) Donner un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à D dans l'hypothèse où l'affirmation du grossiste est correcte.

> **Coup de pouce** Voir la propriété sur les intervalles de fluctuation centrés.

c) Il y a 40 appareils avec défaut parmi les 1500.
Cela remet-il en cause l'affirmation du grossiste ?

> **Coup de pouce**
> Comparer l'effectif obtenu aux effectifs attendus.

Méthode 4 Méthode 5 p. 175 Méthode 6 p. 177 Méthode 7 p. 179 Méthode 9 p. 181