7

Lois discrètes

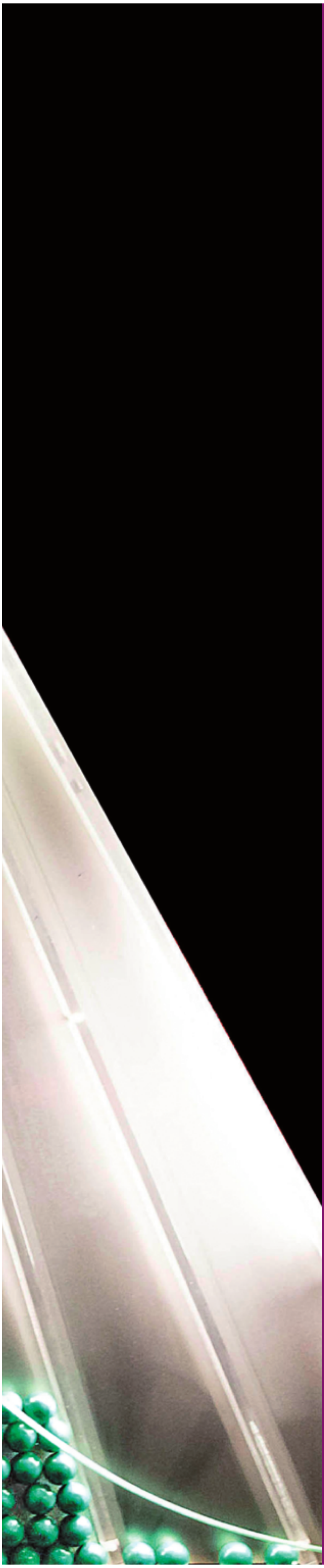
Dans cet extrait de l'émission *Défis Cobayes* les candidats sont interrogés sur la répartition des billes dans cet étrange instrument qu'est la planche de Galton !

Comment expliquer la répartition des billes dans les réceptacles ?

↪ Exercice 101 p. 190

VIDÉO

La planche de Galton
lienmini.fr/maths-c07-01



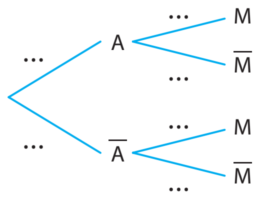
Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis
lienmini.fr/maths-c07-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser un arbre pondéré

Dans un supermarché, 22 % des paiements se font à la caisse automatique dont 74 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour les paiements en caisse non automatique, 11 % correspondent à des courses de moins de dix articles.
Pour un paiement effectué dans ce magasin, on considère les événements :
- A : « Le paiement a été fait en caisse automatique ».
- M : « Le paiement correspond à des courses de moins de dix articles ».



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.
2. a) Calculer $p(A \cap M)$ puis $p(M)$.
b) En déduire $p_M(A)$.

2 Représenter une succession de deux épreuves indépendantes

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 puis une pièce équilibrée à PILE ou FACE .
1. Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.
2. Déterminer la probabilité que le résultat du dé soit inférieur ou égal à 3 et que la pièce tombe sur PILE .

3 Modéliser par une variable aléatoire

Un jeu de grattage coûtant 1 € rapporte :
- 100 € avec une probabilité 0,005,
- 20 € avec une probabilité 0,01,
- 5 € avec une probabilité 0,02,
- 1 € avec une probabilité 0,1.
- 0 € avec une probabilité 0,865.

On considère la variable aléatoire G donnant le gain algébrique à ce jeu (en tenant compte du prix du ticket).
1. Donner la loi de probabilité de G sous forme de tableau.
2. a) Calculer « à la main » E(G), l'espérance de G.
b) Déterminer à la calculatrice $\sigma(G)$, l'écart-type de G.
c) Ce jeu est-il équitable ?
3. Calculer $p(G \geqslant 15)$.

4 Interpréter une espérance

Le gain algébrique (en euros) à un jeu est modélisé par une variable aléatoire X dont l'espérance est $E(X) = -0{,}01$.
Quelle somme d'argent peut-on approximativement s'attendre à perdre :
a) si on joue 100 fois à ce jeu ? **b)** si on joue 1000 fois à ce jeu ?

Activités

20 min

1 Loi uniforme discrète

1. On considère la variable aléatoire Q donnant le nombre obtenu lorsque l'on lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de Q puis déterminer l'espérance de Q.

2. Reprendre la question précédente avec la variable aléatoire H donnant le nombre obtenu lorsque l'on lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ si X prend pour valeurs les n entiers 1, 2, …, n de manière équiprobable.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $X = k$ pour k entier entre 1 et n ?

b) D'après les questions **1.** et **2.**, que peut-on conjecturer pour expression de $E(X)$ en fonction de n ?

c) Démontrer cette conjecture.

Coup de pouce Rappeler la formule de Première permettant de calculer $1 + 2 + \ldots + n$.

↪ Cours 1 p. 170

25 min

Thème 7

2 Découvrir les schémas de Bernoulli

Le basketteur Lebron James a les taux de réussite suivants :
- 54,8 % au tir à deux points,
- 34,3 % au tir à trois points.

1. Lors d'un match, le temps restant ne laisse que quatre possessions du ballon à son équipe. Lebron James compte tirer quatre fois.
Intuitivement, quel type de tir doit-il choisir pour maximiser ses chances de marquer au moins 6 points en quatre tirs du même type (à deux ou trois points) ?

2. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à deux points.

a) Justifier que chacun de ces tirs est une épreuve de Bernoulli.
Préciser la probabilité d'un succès.

b) On suppose les quatre tirs indépendants.
Représenter la situation par un arbre.

c) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins trois paniers sur ces quatre tirs.

3. On considère que Lebron James choisit de faire quatre tirs à trois points.

a) Reprendre les questions **2. a)** et **b)** pour cette nouvelle succession d'épreuves.

b) Déterminer la probabilité qu'il mette au moins deux paniers sur ses quatre tirs.

4. Reprendre la question **1.** à l'aide des questions **2.** et **3**.

↪ Cours 3 p. 172

20 min

3 Découvrir les k parmi n

1. Représenter un schéma de Bernoulli correspondant à 3 répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

2. Pour n et k entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre $\binom{n}{k}$, se lit « ***k* parmi *n*** », est le nombre de façons d'obtenir k succès dans un schéma de Bernoulli de taille n (correspondant à n répétitions).

a) En utilisant l'arbre précédent, déterminer $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

b) Vérifier avec la calculatrice sachant que $\binom{n}{k}$ s'écrit :

- **n C k** avec la **TI-83 Premium CE** où **C** s'obtient avec la touche math puis menu **PROB** puis **Combinaison**,
- **n C k** avec la **CASIO GRAPH90+E** où **C** s'obtient avec la touche OPTN puis le menu **PROB**,
- **binomial(n,k)** avec la **NUMWORKS** où **binomial** s'obtient avec la touche paste puis le menu **Dénombrement**.

↪ Cours 4 p. 172

20 min

4 Découvrir le triangle de Pascal

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1						
2						
3						
4						
5						

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{0} = 1$.

Coup de pouce Revenir à la définition de « n parmi n » et « 0 parmi n ».

2. On souhaite compléter le tableau ci-contre appelé **triangle de Pascal** dans lequel on inscrit les $\binom{n}{k}$. Par exemple, la case jaune, correspondant à $n = 3$ et $k = 2$, contiendra la valeur de $\binom{3}{2}$.
Recopier le triangle de Pascal vide puis, en utilisant la question **1.**, compléter sa première colonne et sa diagonale.

3. On admet que pour tout entier k entre 1 et n, on a la formule $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

a) Exprimer $\binom{2}{1}$ en fonction de $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$ puis inscrire la valeur de $\binom{2}{1}$ à sa place dans le triangle.

b) Calculer $\binom{3}{1}$ puis l'inscrire à sa place dans le triangle.

c) Finir de compléter le triangle de Pascal pour n entier entre 3 et 5.

↪ Cours 4 p. 172

Problème ouvert 10 min Thème 7

5 Travailler avec la loi binomiale

On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de 1 obtenus lorsque l'on lance 8 fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
Déterminer $p(X = 2)$.

Coup de pouce Combien de branches de l'arbre associé à cette répétition d'expériences correspondent à 2 succès et quelles sont les pondérations présentes sur chaque branche ?

↪ Cours 5 p. 174

TICE 5 min Thème 7

6 Déterminer directement $p(X = k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$

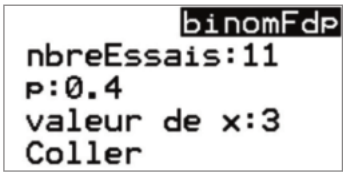
1. On souhaite calculer la probabilité $p(X = 3)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(11\,;0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon votre modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE

Étape 1
On accède au menu **distrib** en appuyant successivement sur les touches 2nde puis var (distrib).

Étape 2
On sélectionne **A:binomFdp(** dans le menu suivant.

Étape 3
On obtient le menu suivant.



dans lequel, on rentre dans l'ordre n (ici 11), p (ici 0.4) et k (ici 3) puis on valide en sélectionnant **Coller**.

Étape4
binomFdp(11,0.4,3) est affiché à l'écran, on le valide avec la touche entrer pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

CASIO GRAPH 90+E

Étape 1
Dans le menu de base **Exe-Mat**, on appuie sur la touche OPTN puis on sélectionne **STAT** avec **F5** puis **DIST** avec **F3** puis **BINOMIAL** avec **F5**.

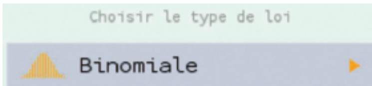
Étape 2
On sélectionne alors **Bpd** ce qui engendre l'affichage de **BinomialPD(** à l'écran.

Étape 3
On complète cette ligne avec dans l'ordre k (ici 3), n (ici 11) et p (ici 0.4) séparés par des virgules (obtenues avec la touche ,) puis on ferme la parenthèse de sorte que l'on obtienne **BinomialPD(3,11,0.4)** puis on valide avec la touche EXE pour afficher la probabilité $p(X = 3) \approx 0{,}177$ cherchée.

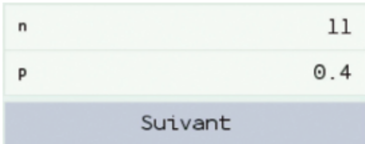
NUMWORKS

Étape 1
On appuie sur (touche accueil) et on choisit **Probabilités**.

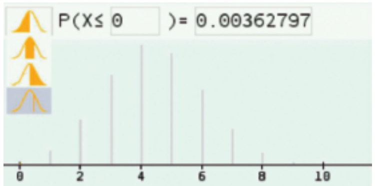
Étape 2
On sélectionne ensuite **Binomiale** :



Étape 3
On règle les valeurs de n (ici 11) et p (ici 0.4) puis on valide **Suivant** :



Étape 4
Avec les flèches, on se déplace sur la courbe à gauche et on fait apparaître le menu déroulant avec EXE :



puis on sélectionne le dernier pictogramme et on valide.

Étape 5
On saisit k (ici 3) après le = de sorte d'obtenir :

2. Calculer les probabilités $p(Y = 10)$ et $p(Z = 17)$ pour Y suivant la loi $\mathcal{B}(53\,;0{,}2)$ et Z suivant la loi $\mathcal{B}(40\,;0{,}32)$.

↪ Cours 5 p. 174

TICE 5 min

7 Déterminer directement $p(X \leqslant k)$ avec la calculatrice pour la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$

1. On souhaite calculer la probabilité $p(X \leqslant 5)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(11\,;\,0{,}4)$.
Suivre les consignes ci-dessous selon le modèle de calculatrice.

TI-83 Premium CE 	CASIO GRAPH 90 +E 	NUMWORKS 
Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **B:binomFRép** plutôt que **A:binomFdp.** On obtient donc **binomFRép(11,0.4,5)** à l'**étape 4** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 2**, où l'on choisit **Bcd** plutôt que **Bpd**. On obtient donc **BinomialCD(5,11,0.4)** à l'**étape 3** qui donne environ 0,753.	Reprendre la méthode vue dans l'activité précédente **sauf à l'étape 4** où l'on choisit plutôt que . On obtient donc P(X≤ 5)= 0.7534981

2. Calculer les probabilités $p(Y \leqslant 22)$ et $p(Z \leqslant 56)$ pour Y suivant la loi $\mathcal{B}(30\,;\,0{,}85)$ et Z suivant la loi $\mathcal{B}(100\,;\,0{,}5)$.

Remarque La calculatrice **NUMWORKS**, permet de calculer des probabilités d'autres types que $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (par exemple $p(a \leqslant X \leqslant b)$).
Pour les calculatrices **TI** et **CASIO**, se reporter à Méthode 5 p.175 pour voir comment faire dans les autres cas.

Cours 5 p. 174

Algo 30 min Thème 7

8 Découvrir la loi géométrique

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
On appelle L la variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués jusqu'à ce que l'on obtienne 6.

1. a) Essayer de tracer un arbre représentant cette succession d'expériences.
Pourquoi n'est-ce pas possible ?

b) Tracer le début de cet arbre pour les quatre premiers lancers.

2. a) Déterminer $p(L = 1)$, $p(L = 2)$, $p(L = 3)$ et $p(L = 4)$.

b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, donner l'expression de $p(L = k)$ en fonction de k.

3. a) Compléter les pointillés dans l'instruction `K=[k for k in range(...)]` afin que la liste **K** contienne les entiers k entre 1 à 25.

b) Compléter les pointillés dans l'instruction `P=[(1/6)*(5/6)**... for k ...]` afin que la liste **P** contienne $p(L = k)$ pour tous les entiers k entre 1 à 25 (dans l'ordre des k croissants).

c) Écrire un programme **Python** dans lequel on définit les listes **K** et **P** précédentes sur les deux premières lignes puis on écrit les trois lignes ci-dessous :

```
import matplotlib.pylot as plt
plt.bar(K,P)
plot.show()
```

Ce programme affiche le diagramme en barres associé à la variable aléatoire L.

d) Exécuter ensuite le programme et dire à quelle fonction l'allure de ce diagramme fait penser.

Cours 7 p. 178

Cours

1 Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Définition Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$ si elle prend pour valeurs les entiers de 1 à n de manière équiprobable, c'est-à-dire si $p(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout k entier entre 1 et n.

Remarque Dans ce cas, X prend des valeurs isolées (ici des entiers), on dit que X suit une **loi discrète**. Les autres lois étudiées dans ce chapitre (loi de Bernoulli, binomiale et géométrique) sont également des lois discrètes.

Propriété Espérance et variance de la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Pour X suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$, on a : • $E(X) = \frac{n+1}{2}$ • $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ • $\sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

Exemple On lance un dé équilibré à huit faces numérotées de 1 à 8 et on considère la variable aléatoire X donnant le résultat obtenu. X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$.
Son espérance est $E(X) = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$ et sa variance est $V(X) = \frac{8^2-1}{12} = \frac{21}{4}$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-03

↪ **Activité 1** p. 166

2 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition Épreuve de Bernoulli

Une expérience aléatoire à deux issues, succès (noté S) et échec (noté $\overline{S}$ ou E), est dite épreuve de Bernoulli.

Exemple Une urne contient des tickets gagnants ou perdants.
L'expérience consistant à tirer un ticket dans l'urne et à regarder s'il est gagnant ou non est une épreuve de Bernoulli (un ticket gagnant correspondant à un succès) car il y a deux issues.

Définition Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0 ; 1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathscr{B}(p)$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété Espérance, variance et écart-type suivant la loi de Bernoulli

Pour X suivant la loi $\mathscr{B}(p)$, on a : • $E(X) = p$ • $V(X) = p(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-04

↪ **Exercice 43** p. 184

Exemple On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,1 et on regarde le nombre de PILE obtenus (0 ou 1). X suit la loi donnée dans le tableau ci-contre, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre 0,1.
Son espérance est donc $E(X) = 0{,}1$ et son écart-type $\sigma(X) = \sqrt{0{,}1 \times 0{,}9} = 0{,}3$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	0,9	0,1

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Identifier et utiliser la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \ldots ; n\}$

Énoncé

Lorsqu'il emprunte des livres à la bibliothèque, Mathieu en emprunte 1, 2, 3, 4 ou 5 avec la même probabilité. On appelle L la variable aléatoire donnant le nombre de livres empruntés par Mathieu quand il va à la bibliothèque.

1. Quelle loi suit L ? **2. En déduire $E(L)$.** **3. Déterminer $p(L \geqslant 4)$.**

Solution

1. L prend de manière équiprobable toutes les valeurs entières entre 1 et 5 donc L suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$. 1

2. $E(L) = \frac{1+5}{2} = 3$ 2

3. $p(L \geqslant 4) = p(L = 4) + p(L = 5) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. 3

Conseils & Méthodes

1 Les valeurs possibles sont de la forme $\{1 ; 2 ; \ldots ; 5\}$ et sont équiprobables.

2 On applique la formule de l'espérance.

3 $p(L = k) = \frac{1}{5}$ pour tout entier k entre 1 et 5.

À vous de jouer !

1 Dans un groupe de six amies, deux ont 1 frère, deux ont 2 frères et deux ont 3 frères.

On choisit une de ces amies au hasard et on considère la variable aléatoire F donnant son nombre de frère(s).

1. Justifier que F suit une loi uniforme.

2. Calculer $p(F \leqslant 2)$.

2 Pour son jeu de rôle, Gani utilise un dé équilibré à vingt faces numérotées de 1 à 20.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire D donnant le résultat d'un lancer ?

2. Calculer la probabilité d'obtenir une réussite critique, c'est-à-dire un 20, lors d'un lancer.

↪ Exercices 34 à 37 p. 184

Méthode 2 Identifier et utiliser la loi de Bernoulli

Énoncé

Dans un lycée, il y a 11 professeurs de mathématiques parmi les 100 professeurs. On tire au sort un professeur parmi ces 100 et on considère la variable aléatoire M donnant le nombre de professeurs de mathématiques obtenu (0 ou 1).

1. Justifier que M suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre p.

2. Donner l'espérance de M.

Solution

1. M peut être égal à 1 avec une probabilité $\frac{11}{100} = 0{,}11$ ou à 0 avec une probabilité 0,89 donc M suit une loi de Bernoulli et son paramètre est $p = 0{,}11$. 1

2. $E(M) = p = 0{,}11$. 2

Conseils & Méthodes

1 On énonce que M prend comme valeurs 0 ou 1 et $p = p(M = 1)$.

2 On applique la formule du cours.

À vous de jouer !

3 Soit la variable aléatoire R donnant le nombre de boules roses obtenues (0 ou 1) lorsque l'on tire une boule dans une urne contenant 10 boules roses et 5 boules vertes.

1. Justifier que R suit la loi $\mathscr{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

2. Combien faut-il ajouter de boules vertes dans l'urne pour que R suive la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{4}\right)$?

4 X suit la loi $\mathscr{B}(0{,}2)$.

1. Donner $p(X = 0)$ et $p(X = 2)$.

2. Déterminer $E(X)$.

↪ Exercices 41 à 42 p. 184

Cours

3 Schéma de Bernoulli

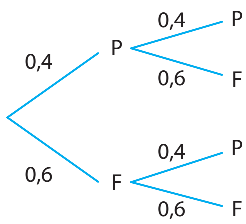
Définition Schéma de Bernoulli

La répétition de *n* épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un schéma de Bernoulli de taille *n*.

Exemple On lance deux fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité d'un succès « tomber sur PILE » est 0,4.

• Les lancers sont indépendants et on réalise bien une succession de 2 épreuves de Bernoulli identiques donc cette succession d'épreuves est un schéma de Bernoulli que l'on peut représenter par l'arbre ci-contre.

• La probabilité d'obtenir un PILE sur ces deux lancers est donc $0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.



4 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition Coefficients binomiaux

Pour *n* et *k* entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, qui se lit « *k* parmi *n* », est le nombre de façons d'obtenir *k* succès dans un schéma de Bernoulli de taille $n \neq 0$ et par convention, $\binom{0}{0} = 1$.

Exemple Dans le schéma de Bernoulli de taille $n = 2$ de l'exemple précédent, il y a 2 façons d'obtenir 1 succès (« tomber sur PILE ») : PILE-FACE ou FACE-PILE. Ainsi, $\binom{2}{1} = 2$.

Remarque Concrètement, *k* parmi *n* s'obtient à l'aide de la calculatrice ou du triangle de Pascal (voir la propriété et l'exemple ci-dessous) dès que l'on ne peut plus faire d'arbre (à partir de $n > 4$).

Propriété (admise) Propriétés des coefficients binomiaux

Pour *n* et *k* entiers naturels avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : • $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Exemple Ces propriétés permettent de tracer le **triangle de Pascal**.

• $\binom{n}{0} = 1$ assure que la première colonne ne contient que des 1,

• $\binom{n}{n} = 1$ assure que la diagonale ne contient que des 1,

• $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ permet de déterminer n'importe quel coefficient binomial à partir de deux connus auparavant.

Par exemple, pour $n = 5$ et $k = 2$, on a $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété (admise) Propriété de symétrie des coefficients binomiaux

Pour *n* et *k* entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Exemple Pour $n = 4$ et $k = 3$, on constate bien que $\binom{4}{3} = 4$ et $\binom{4}{4-3} = \binom{4}{1} = 4$ également.

Méthode 3

Identifier, représenter et utiliser un schéma de Bernoulli

Énoncé

Gloria a remarqué que quand une personne entre dans sa librairie, la probabilité qu'elle achète un livre est 0,67. On admet que les achats des clients sont indépendants les uns des autres. Quatre personnes entrent de façon successive dans la librairie. On s'intéresse au fait qu'elles achètent un livre ou non.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera *n*, le nombre de répétitions, et *p*, la probabilité d'un succès.

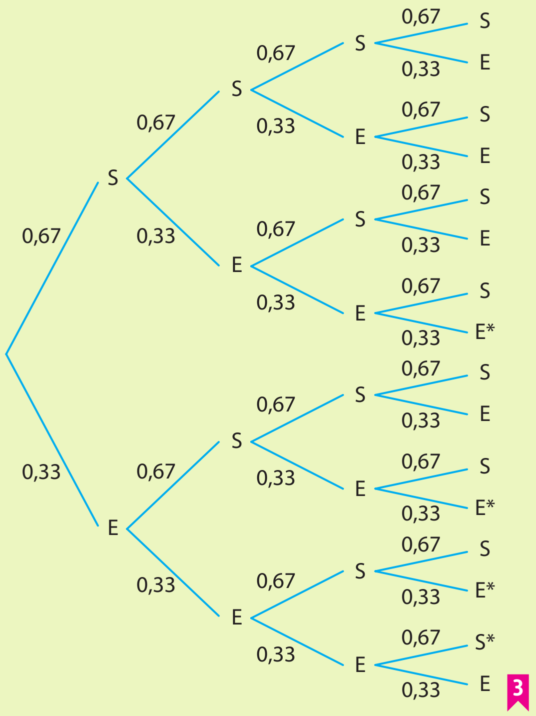
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité qu'une seule des quatre personnes achète un livre.

Solution

1. En considérant que l'achat d'un livre par le client est un succès 1, on réalise $n = 4$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli 2 pour laquelle la probabilité d'un succès (S) est $p = 0{,}67$ donc cette situation correspond bien à un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = 0{,}67$.

2.



3. On cherche $p(X = 1) = 0{,}67 \times 0{,}33^3 + 0{,}33 \times 0{,}67 \times 0{,}33^2 + 0{,}33^2 \times 0{,}67 \times 0{,}33 + 0{,}33^3 \times 0{,}67 \approx 0{,}096$. 4

Conseils & Méthodes

1 On associe le succès à l'événement qui nous intéresse (ici, « le client achète ») de sorte que l'on ait affaire à une expérience à deux issues, succès S et échec E (ou $\overline{S}$).

2 Pour justifier qu'une succession d'expériences est un schéma de Bernoulli, il y a trois arguments à donner :

① toutes les réalisations sont indépendantes.

② l'expérience réalisée est la même.

③ c'est une épreuve de Bernoulli.

3 Dans l'arbre, les sous-arbres partant d'un même nœud sont identiques et correspondent à l'arbre représentant l'épreuve de Bernoulli (avec les pondérations 0,67 et 0,33 ici).

4 Identifier les chemins associés au nombre de succès souhaité et appliquer les méthodes de calculs de Première dans l'arbre.

À vous de jouer !

5 On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.

1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera *n* le nombre de répétitions et *p*, la probabilité d'un succès.

2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.

3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

6 Sylvain joue 3 fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est 0,1.

1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces 3 parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?

2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces 3 parties ?

↪ Exercices 44 à 46 p. 185

Cours

5 Loi binomiale

Définition **Loi binomiale**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès. La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée loi binomiale de paramètres n et p et se note $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Exemple On reprend l'exemple de la page précédente où l'on lance deux fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4.
• On a vu que cette répétition d'épreuves est un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X donnant le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de PILE obtenus, suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}4$. On peut noter plus simplement « X suit la loi $\mathscr{B}(2\,;0{,}4)$ ».
• Par exemple, la probabilité d'obtenir 1 PILE est $p(X = 1) = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}48$.

Propriété (admise) **Probabilités et loi binomiale**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$.
Pour tout entier k dans entre 0 et n, on a $p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Exemple Dans l'exemple précédent, on retrouve $p(X=1) = \binom{2}{1} \times 0{,}4^1 \times 0{,}6^{2-1} = 2 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}48$.

Remarque Pour calculer des probabilités avec la loi binomiale, on peut utiliser la formule précédente ou utiliser les fonctions avancées de la calculatrice.

Propriété admise **Espérance, variance et écart-type suivant la loi binomiale**

Pour X suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$, on a : • $E(X) = np$ • $V(X) = np(1-p)$ • $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple La variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(20\,;0{,}6)$ a pour espérance $E(X) = 20 \times 0{,}6 = 12$, pour variance $V(X) = 20 \times 0{,}6 \times 0{,}4 = 4{,}8$ et pour écart-type $\sigma(X) = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}19$.

Démonstration

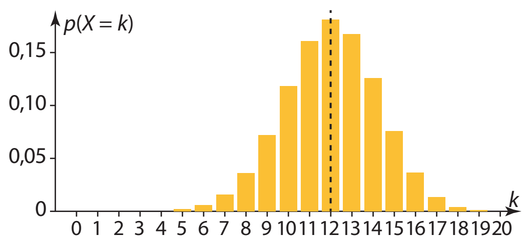
VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-06

Apprendre à démontrer p. 182

Propriété **Forme du diagramme en barres associé**

Pour X suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$, le diagramme en barres associé à X est en forme de cloche, approximativement centré sur son espérance $E(X)$.

Exemple On donne ci-contre le diagramme en barres associé à la loi $\mathscr{B}(20\,;0{,}6)$ d'espérance 12.
Par exemple, pour $k = 10$, la hauteur de la barre est $p(X = 10) \approx 0{,}12$.
On constate bien que le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré par rapport à la droite d'équation $x = 12$ tracée en pointillés.



Exercices résolus

Méthode 4 Reconnaître la loi binomiale et calculer une probabilité de la forme $p(X = k)$

Énoncé

Une urne contient 9 boules rouges et 1 boule verte. On y tire 11 boules avec remise et on considère la variable aléatoire V donnant le nombre de boules vertes obtenues.

1. **Donner la loi de V.**

2. **Calculer $p(V = 2)$.**

Solution

1. En considérant que l'obtention d'une boule verte est un succès, V donne le nombre de succès quand on réalise $n = 11$ fois, de manière indépendante, la même expérience de Bernoulli 1 dont la probabilité d'un succès est $p = 0{,}1$ 2 donc V suit la loi $\mathscr{B}(11\,;0{,}1)$.

2. $p(V = 2) = \binom{11}{2} \times 0{,}1^2 \times (1 - 0{,}1)^{11-2} = 55 \times 0{,}1^2 \times 0{,}9^9 \approx 0{,}21$. 3

Conseils & Méthodes

1 La justification est la même que pour un schéma de Bernoulli en précisant que V donne le nombre de succès.

2 La probabilité d'un succès est $p = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

3 On utilise la formule du cours ou la calculatrice.

↪ Activités 6 p. 168 et 7 p. 169

À vous de jouer !

7 On lance 20 fois une pièce équilibrée et on considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de FACE obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.

2. Calculer $p(X = 11)$.

8 On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de « trèfle » obtenus.

1. Justifier que T suit une loi binomiale.

2. Calculer $p(T = 5)$.

↪ Exercices 51 à 52 p. 185

Méthode 5 Calculer des probabilités avec la loi binomiale

Énoncé

Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}23$, calculer :

a) $p(X < 12)$ **b)** $p(X \geqslant 4)$ **c)** $p(5 < X \leqslant 8)$

Remarque Les calculatrices de lycée permettent de calculer des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leqslant k)$ (ainsi que $p(X \geqslant k)$ et $p(k \leqslant X \leqslant k')$ pour la **NUMWORKS**) mais il faut pouvoir calculer tous types de probabilités avec la loi binomiale.

Solution

a) $p(X < 12) = p(X \leqslant 11) \approx 0{,}512$. 1

b) $p(X \geqslant 4) = p(\overline{X \leqslant 3}) = 1 - p(X \leqslant 3) \approx 0{,}999$. 2

c) $p(5 < X \leqslant 8) = p(6 \leqslant X \leqslant 8) = p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5) \approx 0{,}14$. 3

On peut aussi remarquer que $p(5 < X \leqslant 8) = p(X = 6) + p(X = 7) + p(X = 8) \approx 0{,}14$.

Conseils & Méthodes

1 X prend des valeurs entières : les événements $X < 12$ et $X \leqslant 11$ sont donc identiques.

2 $X \geqslant 4$ est l'événement contraire de $X \leqslant 3$.

3 On a $\underbrace{0\,;\ldots;4\,;5}_{X \leqslant 5}\,;\underbrace{6\,;7\,;8}_{5 < X \leqslant 8}\,;9\,;\ldots;50$ donc $p(5 < X \leqslant 8)$ est égal à $p(X \leqslant 8) - p(X \leqslant 5)$.

À vous de jouer !

9 On considère la variable aléatoire X qui suit la loi $\mathscr{B}(20\,;0{,}36)$.

1. Calculer $p(X > 6)$.

2. Calculer $p(3 \leqslant X < 12)$.

10 On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathscr{B}(30\,;0{,}85)$.

1. Calculer $p(Y < 24)$.

2. Calculer $p(21 < Y < 25)$.

↪ Exercices 53 à 56 p. 185

Cours

6 Intervalles de fluctuation et loi binomiale

Définition Intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale et un réel $a \in]0\,;1[$.

Un intervalle $[a\,;b]$ (avec a et b réels) tel que $p(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de $1-\alpha$ (ou au risque α) associé à X.

Propriétés Intervalle de fluctuation « à gauche », « à droite » et « centré »

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale et un réel $\alpha \in]0\,;1[$.

① L'intervalle $[0\,;b]$ où b est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$ est un **intervalle de fluctuation « à gauche »** au seuil de $1-\alpha$ associé à X.

② L'intervalle $[a\,;n]$ où a est le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > \alpha$ et où n est le nombre de répétitions associé à X est un intervalle de fluctuation « **à droite** » au seuil de $1-\alpha$ associé à X.

③ L'intervalle $[a\,;b]$ où a et b sont les plus petits entiers vérifiant respectivement $p(X \leqslant a) > \dfrac{\alpha}{2}$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 1-\dfrac{\alpha}{2}$ est un **intervalle de fluctuation centré** (ou bilatéral) au seuil de $1-\alpha$.

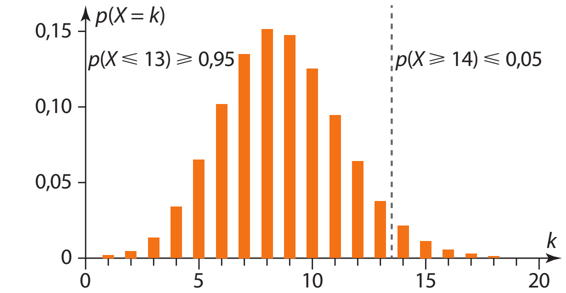
Remarque Les propriétés ① et ② précédentes donnent les plus petits intervalles de fluctuation associés à X respectivement de la forme $[0\,;b]$ et $[a\,;n]$.

Exemples

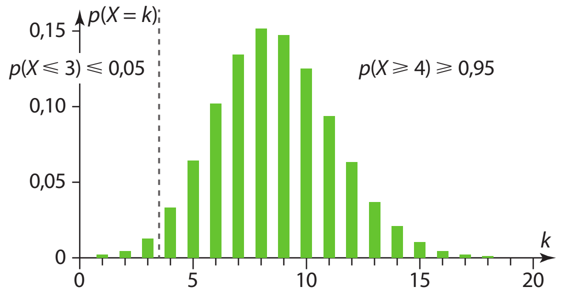
On considère une variable aléatoire X suivant la loi $\mathscr{B}(43\,;0{,}2)$ et $\alpha = 0{,}05$ (donc $1-\alpha = 0{,}95$).

① On a :
$p(X \leqslant 12) \approx 0{,}927$ donc $p(X \leqslant 12) < 0{,}95$
et $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}964$ donc $p(X \leqslant 13) \geqslant 0{,}95$.

Ainsi $[0\,;13]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, qu'il n'y aura pas plus de 13 succès sur les 43 répétitions.



② On a :
$p(X \leqslant 3) \approx 0{,}018$ donc $p(X \leqslant 3) \leqslant 0{,}05$
et $p(X \leqslant 4) \approx 0{,}051$ donc $p(X \leqslant 4) > 0{,}05$.
Ainsi $[4\,;43]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, qu'il n'y aura pas moins de 4 succès sur les 43 répétitions.

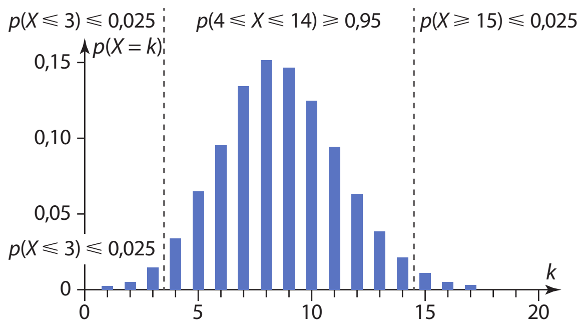


③ Notons que $\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$ et $1-\dfrac{\alpha}{2} = 0{,}975$.

On a :

- $p(X \leqslant 3) \approx 0{,}018 \leqslant 0{,}025$
et $p(X \leqslant 4) \approx 0{,}051 > 0{,}025$.
- $p(X \leqslant 13) \approx 0{,}964 < 0{,}975$
et $p(X \leqslant 14) \approx 0{,}984 \geqslant 0{,}975$

Ainsi $[4\,;14]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1-\alpha = 0{,}95$ associé à X :
on est sûr, à au moins 95 %, d'avoir entre 4 et 14 succès sur les 43 répétitions.



Méthode 6 Déterminer un intervalle de fluctuation avec la calculatrice

Énoncé

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}63$.

1. Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associé à X de la forme $[0\,;\,b]$.

2. Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % associé à X.

Solution

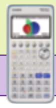
1. D'après le cours, il s'agit de trouver le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. **1**

TI-83 Premium CE

On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en appuyant sur f(x) puis en tapant `\Y1■binomFRép(50,0.63,X)` **2**.
Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9825

Casio GRAPH 90+E



On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans le menu **7:Table** du menu principal en tapant **Y1=BinomialCD(x,50,0.63)** **3**.
Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

X	Y1
35	0.8805
36	0.931
37	0.9635
38	0.9824

NUMWORKS

Dans le menu **Fonctions**, on tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ en écrivant `f(x) = binomcdf(x,50,0.63)` **4** où **binomcdf** s'obtient avec la touche paste puis le menu **Probabilités>Loi binomiale**. Ensuite, on affiche le tableau de valeurs.
On obtient :

34	0.8093511
35	0.8805196
36	0.9310107
37	0.9635405
38	0.9824891

Conclusion : on a $p(X \leqslant 36) < 0{,}95$ et $p(X \leqslant 37) \geqslant 0{,}95$ donc l'intervalle cherché est $[0\,;\,37]$.

2. Il s'agit de trouver les plus petits entiers a et b tels que $p(X \leqslant a) > 0{,}025$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.
On tabule la fonction $k \mapsto p(X \leqslant k)$ dans la calculatrice et on obtient le tableau suivant

k	…	24	25	…	37	38	…
$p(X \leqslant k)$		0,0216	0,0411		0,9635	0,9825	

Donc l'intervalle $[25\,;\,38]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% associé à X.

Conseils & Méthodes

1 On utilise les propriétés du cours pour savoir quel(s) nombre(s) on cherche.

2 X s'obtient avec X,T,θ,n.

3 x s'obtient avec X,θ,T.

4 x s'obtient avec la touche x,n,t

À vous de jouer !

11 On considère une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}51$.
Déterminer le plus petit intervalle de fluctuation au seuil de 90 % associé à Y de la forme $[a\,;\,100]$.

12 On considère une variable aléatoire Z qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}81$.
Déterminer un intervalle de fluctuation centré au seuil de 99 % associé à Z.

↪ Exercices 62 à 67 p. 186

Cours

7 Loi géométrique

Définition Loi géométrique

On considère une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité d'un succès est p et on répète cette épreuve de Bernoulli de manière indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.

La variable aléatoire X donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir ce succès suit la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$.

Exemple On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 jusqu'à l'obtention d'un 2.
La variable aléatoire D donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un 2 suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}25$. En effet, D donne le nombre de succès « obtenir 2 » lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès est $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Propriété Probabilités et espérance associées à la loi géométrique

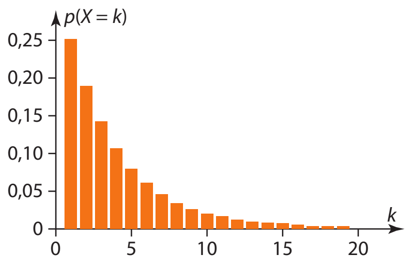
Soit X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, et $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

- $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$
- $p(X \leqslant k) = 1 - (1 - p)^k$
- $p(X > k) = (1 - p)^k$
- $E(X) = \frac{1}{p}$

Exemple Dans l'exemple précédent, D suit la loi $\mathcal{G}(0{,}25)$ donc la probabilité qu'il faille cinq essais pour obtenir un 2 est $p(D = 5) = (1 - 0{,}25)^{5-1} \times 0{,}25 = 0{,}75^4 \times 0{,}25 \approx 0{,}08$.
L'espérance de D est $E(D) = \frac{1}{0{,}25} = 4$. Concrètement, cela veut dire que si l'on recommence un grand nombre fois cette succession d'épreuves alors le nombre moyen d'essais à réaliser afin d'obtenir un 2 est proche de quatre.

Propriété Aspect graphique de la loi géométrique

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, son diagramme en barres associé correspond à une décroissance exponentielle et $p = p(X = 1)$ est la hauteur de la première barre.



Propriété Non vieillissement ou absence de mémoire de la loi géométrique

- **Pour X suivant une loi géométrique, on a $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$ pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$.**
- **Réciproquement, si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tous $s \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{N}^*$, on ait $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$ alors X suit une loi géométrique.**

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-07

↪ Exercice 95 p. 189

Exemple

Dans l'exemple précédent, la probabilité qu'il faille plus de dix essais pour obtenir un 2 sachant qu'après sept essais, on n'en a pas encore obtenu est :
$p_{D>7}(D > 10) = p_{D>7}(D > 7 + 3) = p(D > 3) = (1 - 0{,}25)^3 = 0{,}75^3 \approx 0{,}42$.
On a bien utilisé le fait que la probabilité de réussir en plus de dix essais sachant qu'on en a raté sept, c'est-à-dire en plus de trois essais supplémentaires, est la même que la probabilité de réussir en plus de trois essais au départ : les sept premiers essais ont été « oubliés ».

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Identifier et utiliser la loi géométrique

Énoncé

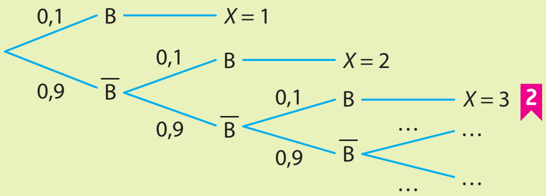
Dans un étang, il y a 100 poissons : 90 carpes et 10 brochets.
Elsa souhaite pêcher un brochet de sorte que si elle pêche une carpe, elle la remet à l'eau et continue à pêcher jusqu'à obtenir un brochet.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de prises réalisées par Elsa pour avoir un brochet.

1. **Justifier que X suit une loi géométrique et en donner le paramètre.**
2. **Représenter la situation par un arbre pour les 3 premières répétitions.**
3. **Quelle est la probabilité qu'elle doive prendre exactement 5 poissons pour obtenir un brochet ?**
4. **Déterminer $p(X \geqslant 10)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.**
5. **Calculer $E(X)$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.**

Solution

1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour d'obtenir un succès (« prendre un brochet ») lorsque l'on réalise de manière indépendante (tirage avec remise des poissons) une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est $\frac{10}{100} = 0{,}1$ donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}1$. 1

2. On appelle B l'événement « obtenir un brochet » :



3. On cherche $p(X = 5)$ 3 $= (1 - 0{,}1)^{5-1} \times 0{,}1 = 0{,}9^4 \times 0{,}1 \approx 0{,}07$.

4. $p(X \geqslant 10) = p(X > 9) = (1 - 0{,}1)^9 = 0{,}9^9 \approx 0{,}39$.
Cela veut dire que la probabilité qu'elle ait besoin de dix prises ou plus pour pêcher un brochet est environ 0,39. 4

5. $E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10$ donc, en moyenne, sur un grand nombre de parties de pêche, il faudra à Elsa 10 prises pour avoir un brochet. 5

Conseils & Méthodes

1 Pour justifier que X suit une loi géométrique, il faut donner tous les arguments suivants :
① X donne le nombre d'essais pour avoir un succès.
② les répétitions sont indépendantes.
③ ce sont des épreuves de Bernoulli identiques.

2 On s'arrête à chaque succès. On peut faire apparaître le nombre d'essais nécessaires : $X = \ldots$.

3 On traduit en termes de probabilités puis on applique la formule du cours.

4 Le cours donne une formule pour $p(X > n)$ donc on calcule $p(X \geqslant 10)$ en utilisant $p(X \geqslant 10) = p(X > 9)$ puisque X prend des valeurs entières.

5 L'espérance peut s'interpréter comme une moyenne.

À vous de jouer !

13 On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 et on appelle F la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
1. Justifier que F suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin d'exactement trois essais pour obtenir FACE.
3. Déterminer la probabilité que l'on ait besoin de quatre essais ou moins pour obtenir FACE.
4. Combien de lancers peut-on « espérer » faire pour obtenir FACE ?

14 La machine à café ne fonctionne pas au travail de Walid ce matin. Ses collègues lui ont dit d'insister car une fois sur 10, elle donne du café.
En supposant tous les essais indépendants, on appelle C la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un café.
1. Justifier que C suit une loi géométrique et en donner le paramètre.
2. Déterminer la probabilité que Walid ait besoin de 6 essais ou moins pour avoir un café.

↪ Exercices 68 à 73 p. 187

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c07-05 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 8 Utiliser le triangle de Pascal

↪ Cours 4 p. 172

Énoncé

On considère le triangle de Pascal ci-contre dans lequel apparaissent les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour n entier entre 0 et 5 et k entier entre 0 et n.

1. Lire $\binom{5}{3}$ dans le triangle de Pascal.

2. Déterminer $\binom{6}{3}$ à l'aide du triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Solution

1. Ici, $k = 3$ et $n = 5$ donc $\binom{5}{3} = 10$. **1**

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

2. D'après le cours on a : $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$ **2**.

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
6				20		

Conseils & Méthodes

1 On repère les valeurs de k (en vert) et n (en rouge) en on lit $\binom{5}{3}$ à l'intersection.

2 Pour compléter le triangle, on utilise la propriété du cours $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
Pour $n = 6$ et $k = 3$:
$\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ et on utilise le point **1** pour trouver $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$.

À vous de jouer !

15 **1.** Lire $\binom{4}{2}$ dans le triangle de Pascal.

2. Déterminer $\binom{6}{2}$ à l'aide du triangle de Pascal.

16 Donner la ligne du triangle de Pascal correspondant aux $\binom{6}{k}$ pour k entier entre 0 et 6.

↪ Exercices 82 à 83 p. 188

Exercices résolus

Méthode 9 Utiliser l'absence de mémoire de la loi géométrique

Cours 7 p. 178

Énoncé

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un nombre strictement supérieur à 3 lorsque l'on lance un dé équilibré à 12 faces numérotées de 1 à 12.

On admet que X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{9}{12} = 0{,}75$.

Si on n'a pas obtenu de nombre strictement supérieur à 3 après cinq essais, quelle est la probabilité qu'il faille plus de sept essais pour en obtenir un ?

Solution

On cherche $p_{X>5}(X > 7)$ **1** $= p_{X>5}(X > 5 + 2) = p(X > 2)$ **2** $= (1 - 0{,}75)^2 = 0{,}25^2 = 0{,}0625$ d'après la propriété d'absence de mémoire de la loi géométrique.

Conseils & Méthodes

1 On traduit l'énoncé en faisant apparaître $p_{X>s}(X > s+t)$.

2 On applique $p_{X>s}(X > s + t) = p(X > t)$.

À vous de jouer !

17 Avec l'énoncé de l'exercice résolu ci-dessus, donner la probabilité qu'il faille au moins 8 essais sachant qu'il en faut plus de 4.

18 Avec l'énoncé de l'exercice résolu ci-dessus, calculer $p_{X\geqslant 5}(X > 10)$.

Exercices 92 à 94 p. 189

Méthode 10 Utiliser l'espérance pour résoudre un problème

Énoncé

Dans un jeu, on doit choisir entre deux possibilités.
- **Choix 1 : lancer un dé équilibré à faces numérotées de 1 à 6. Le gain en € est le résultat obtenu.**
- **Choix 2 : lancer 6 fois de suite une pièce équilibrée. Le gain en euros est le nombre de FACE obtenus.**

Si l'on compte jouer un grand nombre de fois à ce jeu, lequel des deux choix faut-il faire ?

Solution

- **Pour le choix 1** : la variable aléatoire G donnant le gain pour le choix 1 suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ **1** donc $E(G) = \frac{1+6}{2} = 3{,}50$ € **2** : si l'on joue un grand nombre de fois on gagne en moyenne 3,50 € par partie.
- **Pour le choix 2** : la variable aléatoire G' donnant le gain pour le choix 2 donne le nombre de succès lorsque l'on réalise 6 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli de probabilité d'un succès (« obtenir FACE ») $p = 0{,}5$ donc G' suit la loi binomiale de paramètres n=6 et p=0,5.

On a donc $E(G') = n \times p = 6 \times 0{,}5 = 3$ € **3** : si l'on joue un grand nombre de fois on gagne en moyenne 3 € par partie.

On doit donc faire le choix 1.

Conseils & Méthodes

1 On identifie la loi associée au gain avec le choix 1.

2 On calcule l'espérance associée au premier gain.

3 On fait de même pour le choix 2.

À vous de jouer !

19 On considère les expériences « lancer une pièce équilibrée » et « lancer deux fois de suite une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir FACE est 0,2 ».
Si l'on réalise ces deux expériences un grand nombre de fois, laquelle choisir pour obtenir en moyenne le plus de fois FACE ?

20 Pour un concours n°1, on le réussit la X-ième fois où X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.
Pour un concours n°2, on le réussit la Y-ième fois où Y suit la loi $\mathcal{G}(0{,}25)$.
En moyenne, lequel de ces deux concours est le « plus facile » à obtenir ?

Exercices 96 à 97 p. 189

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c07-06

La propriété à démontrer

Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;p)$ alors $E(X) = np$.

On souhaite démontrer cette propriété pour $n \leqslant 3$.
On pourra utiliser en prérequis l'espérance associée à la loi de Bernoulli et la formule donnant $p(X = k)$.

Comprendre avant de rédiger

- On ne demande pas de démontrer le cas général ($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque) mais uniquement pour $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$: on peut donc traiter ces trois cas indépendamment.
- Le cas $n = 1$, revient à considérer que X suit la loi de Bernoulli, pour les deux autres cas, on peut dresser le tableau donnant leur loi puis appliquer la formule générale de l'espérance d'une variable aléatoire.

Rédiger

Étape 1
On commence par constater que, pour $n = 1$, X suit la loi de Bernoulli.

Étape 2
Pour $n = 2$, on dresse le tableau donnant la loi de X en calculant $p(X = 0)$, $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.

Étape 3
On applique la formule de l'espérance d'une variable aléatoire pour ce cas $n = 2$.

Étape 4
Pour $n = 3$, on procède comme pour le cas $n = 2$.

La démonstration rédigée

Pour $n = 1$, il n'y a qu'une seule épreuve
donc X suit la loi de Bernoulli d'où $E(X) = p = np$ pour $n = 1$.

Pour $n = 2$, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

car :

- $p(X = 0) = \binom{2}{0} \times p^0 \times (1-p)^{2-0} = (1-p)^2$
- $p(X = 1) = \binom{2}{1} \times p^1 \times (1-p)^{2-1} = 2p(1-p)$
- $p(X = 2) = \binom{2}{2} \times p^2 \times (1-p)^{2-2} = p^2$

$$E(X) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2$$
$$= 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p = np \text{ pour } n = 2.$$

Pour $n = 3$, la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

$$E(X) = 0 \times (1-p)^3 + 1 \times 3p(1-p)^2 + 2 \times 3p^2(1-p) + 3 \times p^3$$
$$= 3p(1 - 2p + p^2) + 6(p^2 - p^3) + 3p^3$$
$$= 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3 = 3p = np \text{ pour } n = 3.$$

Pour s'entraîner

Démontrer la propriété suivante en utilisant pour prérequis la formule donnant $p(X = k)$ pour k entier entre 0 et 2 et $E(X) = 2p$.

Si X suit la loi $\mathscr{B}(2\,;p)$ alors $V(X) = 2 \times p \times (1 - p)$