DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c06-05

Exercices calculs et automatismes

17 Primitive

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{1}(3x^2+4x+3)\mathrm{d}x$ est égale à :

a $[x^3+2x^2+3]_{-1}^{1}$. b $[x^3+2x^2+3x-8]_{-1}^{1}$.
c $[6x+1]_{-1}^{1}$. d 8.

18 Calcul d'intégrale (1)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{0}^{3} t\,\mathrm{d}t$ est égale à :

a 3. b 9.
b 1,5. b 4,5.

19 Calcul d'intégrale (2)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{1}(2t+1)\mathrm{d}t$ est égale à :

a l'aire sous la courbe entre –1 et 1. b 2.
c $\int_{0}^{1}(2t+1)\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{0}(2t+1)\,\mathrm{d}t$. d 0.

20 Calcul d'intégrale (3)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

$\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ est égale à $[\ln(1-x)]_{-2}^{0}$. ☐ ☐

21 Valeurs moyennes (1)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

La valeur moyenne de la fonction carré sur $[-2\,;0]$ est $\frac{4}{3}$. ☐ ☐

22 Valeurs moyennes (2)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1,5 est la valeur moyenne sur $[0\,;3]$ de la fonction :

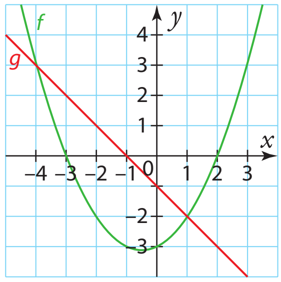
a $f(x)=4-x^2$. b $f(x)=x$.
c $f(x)=2x+1$. d $\frac{1}{3}[x]_{-2}^{4}$.

23 Calcul d'intégrale (3)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? V F

$\int_{0}^{\ln(3)}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$ est égale à $-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$. ☐ ☐

Pour les exercices 24 à 28, on considère les fonctions *f* et *g* définies sur ℝ par :
$f(x)=0{,}5(x-2)(x+3)$
et $g(x)=-x-1$



24 Calcul d'intégrale (5)

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

$\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x$ est égale à :

a 4,5. b l'aire d'un demi-carré de côté 3.
c $\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{2}$. d $\int_{-4}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x$.

25 Aire sous la courbe

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

L'aire de la surface entre la courbe de *f* et l'axe des abscisses entre $x=-4$ et $x=3$ est :

a $\int_{-4}^{3} f(x)\mathrm{d}x$. b $2□\int_{-4}^{-0,5} f(x)\mathrm{d}x$. c $\frac{47}{4}$ u.a.

d $2□\int_{-4}^{-3}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{2}(0{,}5x^2+0{,}5x-3)\mathrm{d}x$

26 Estimer une intégrale

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? V F

a) $\int_{-1}^{1} f(x)x\,\mathrm{d}x < $ à $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x$. ☐ ☐

b) $\int_{1}^{2} f(x)x\,\mathrm{d}x >$ à $\int_{1}^{2} g(x)\mathrm{d}x$. ☐ ☐

27 Aire entre deux courbes

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

L'aire comprise entre la courbe de *f* et de *g* entre $x=-4$ et 0 est égale à :

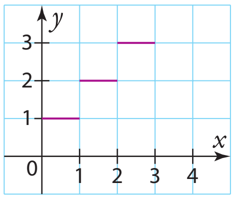
a $\int_{-4}^{0}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$. b $\int_{-4}^{0}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x$.
c $[-0{,}5x^2-1{,}5x-0{,}5]_{-4}^{0}$. d $\frac{2}{3}$ u.a.

Exercices d'application

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

Méthode 1 p. 143

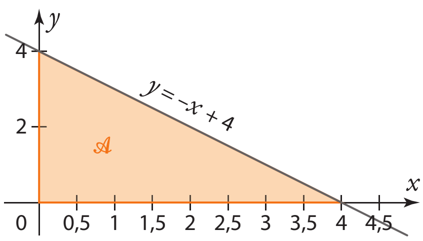
28 On considère la fonction f affine par morceaux représentée ci-dessous.



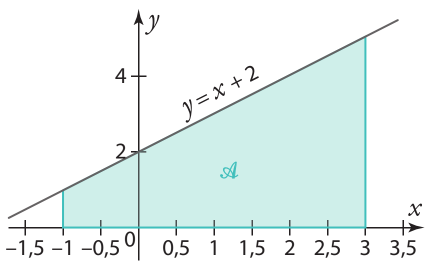
1. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et 3.
2. On considère la fonction g définie sur [0,3] par $g(x) = f(x) + 2$. Calculer l'aire sous la courbe de la fonction g entre 0 et 3.

29 Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère le point A sur la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et d'abscisse 2 ainsi que le point B sur la droite d'équation $y = 2x$ et d'abscisse 3.
Déterminer l'aire du triangle OAB.

30 Calculer $\int_0^4 (-x+4)\,dx$.



31 Calculer $\int_{-1}^3 (x+2)\,dx$.



32 Calculer les intégrales suivantes.

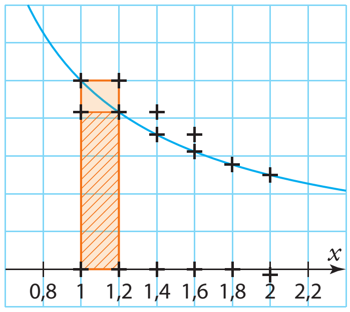
a) $\int_0^1 x\,dx$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,dt$ **c)** $\int_2^4 (-y+3)\,dy$

33 Calculer l'aire sous la courbe des fonctions suivantes sur [0 ; 3].
a) $x \mapsto x$. **b)** $x \mapsto 2$. **c)** $x \mapsto -x+3$.

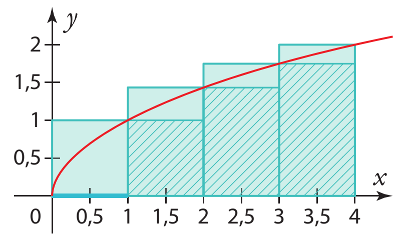
Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

Méthode 2 p. 143

34 On considère la fonction inverse sur [1 ; 2].
1. On partage l'intervalle [1 ; 2] en cinq intervalles de même amplitude. Quelle est la longueur d'un intervalle ?
2. Quelle est l'aire du rectangle coloré en rouge ? Quelle est l'aire du rectangle hachuré ?
3. En considérant deux séries de rectangles, déterminer un encadrement de l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur [1 ; 2].



35 La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ a été encadré par deux séries de quatre rectangles de base 1 comme sur le graphique ci-dessous.



Estimer $\int_0^4 f(x)\,dx$.

36 **1.** Tracer l'allure de la courbe de la fonction logarithme sur l'intervalle [5 ; 10].
2. En partageant [5 ; 10] en dix intervalles de même amplitude, déterminer un encadrement de $\int_5^{10} \ln(t)\,dt$.

Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Méthode 3 p. 145

37 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\int_0^4 (t-3)\,dx$ **b)** $\int_0^{11} (1-x)\,dx$

c) $\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1-x^2)\,dx$ **d)** $\int_{-1}^4 (2t^3-3t^2-4t+2)\,dt$

38 Déterminer les valeurs des intégrales utilisant des fonctions usuelles suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-2x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$

39 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2+2}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 x(2-x^2)^3\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} t(t^2-1)\,\mathrm{d}t$ **d)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\mathrm{d}x$

40 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int_4^{15} \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ **d)** $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+2}\mathrm{d}x$

Utiliser la relation de Chasles

Méthode 4 p. 145

41 On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par :

$$f(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t\in[-1;2] \\ -t+3 & \text{si } t\in\,]2;3] \\ t+3 & \text{si } t\in\,]3;4] \end{cases}$$

Calculer alors $\displaystyle\int_{-1}^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

42 On considère la fonction g définie sur $[-6\,;6]$ de période égale à 2. Sur $[-1\,;1]$, la fonction g est égale à $|x|$.

1. Construire la courbe représentative de g sur $[-5\,;5]$.

2. Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_{-6}^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

43 Soit f définie sur $[0;3]$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2 \\ \dfrac{-x+3}{1} & \text{si } 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur son intervalle de définition.

Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Méthode 5 p. 147

44 Soit la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f : x \mapsto x^2+3$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur l'intervalle de définition.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

45 Soit la fonction définie sur $[\mathrm{e}\,;4]$ par :

$$g : x \mapsto \frac{x}{(x^2-3)}.$$

1. Déterminer la valeur moyenne sur $[\mathrm{e}\,;4]$.

2. Interpréter le résultat de manière géométrique.

46 Calculer $\displaystyle\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de g sur $[1\,;3]$ est égale à $\ln(2)$.

47 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ est égale à $\frac{2}{\pi}$ et que la fonction f est paire.

48 Donner l'expression de la valeur moyenne de toute fonction linéaire sur un segment $[a\,;b]$.

Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Méthode 6 p. 147

49 **1.** Représenter dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x-1$.

2. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$ **b)** $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x.$

3. Déterminer le signe de f sur $[-2\,;3]$.

4. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 1.

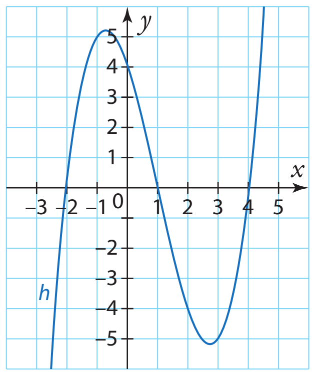
5. Déterminer l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses entre -2 et 3.

50 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=0{,}5(x+2)(x-1)(x-4)$ dont une représentation est donnée ci-contre.

1. Déterminer le signe de h sur $[-2\,;4]$.

2. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre 1 et 4.

3. Déterminer l'aire entre la courbe de h et l'axe des abscisses entre -3 et 4.



51 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{15}{4}.$$

1. Déterminer le signe de f sur $[-5\,;6]$.

2. Déterminer l'aire sous la courbe de f et l'axe des abscisses entre -5 et 6.

3. Calculer $\displaystyle\int_{-5}^6 f(x)\,\mathrm{d}x.$

4. Comparer les résultats des questions **2.** et **3.**.

Exercices d'entraînement

Calculs d'intégrales

52 Soit f et g les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(x) \quad \text{et } g(x) = x\ln(x) - x.$$

1. Calculer $g'(x)$. déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\int_1^{e} f(x)\,dx$.

53 **1.** En remarquant que $x = x + 1 - 1$, déterminer deux réels a et b tel que $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$.

2. Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = 1 - \ln(2)$.

54 **1.** Montrer que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

55 On considère la fonction f définie sur $]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$.

2. Calculer $\int_4^5 f(x)\,dx$.

56 On définit sur $[0 ; 1]$ la fonction C par :

$$C(x) = \sqrt{2x - x^2} + 1.$$

On munit le plan d'un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de C et on considère le point I(1 ;1).

1. Justifier que C est positive sur $[0 ; 1]$.

2. Soit M un point de la courbe $\mathscr{C}$. Démontrer que la distance IM est constante et égale à 1. Que peut-on en déduire sur $\mathscr{C}$?

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 C(t)\,dt$.

Aire sous la courbe

57 On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ si } t \in [0 ; 1] \\ \dfrac{1}{t} \text{ si } t \in [1,3] \end{cases}$$

Déterminer l'aire entre la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses entre 0 et 3.

58 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. Déterminer le signe de f sur $[0 ; +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la suite (u_n) par $u_n = \int_0^n f(t)\,dt$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

b) Déterminer u_n en fonction de n.

59 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + x - 2$.
Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et $1{,}5$.

60 On considère la fonction : $x \mapsto \frac{-4}{(x+2)^2}$.

Déterminer l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses entre -1 et 1.

61 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} \text{ si } x \leqslant 2 \\ e^{2-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

1. Vérifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.

62 On considère la fonction $f : x \mapsto |x^2 + x - 2|$.

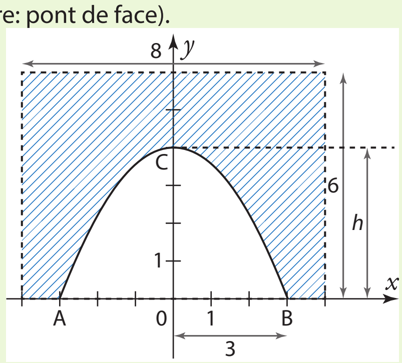
1. Déterminer le signe de $x^2 + x - 2$ en fonction de x.

2. En déduire une expression de $I = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ comme somme de trois intégrales.

3. Calculer I et $J = \int_{-3}^{2} (x^2 + x - 2)\,dx$. Comparer I et J.

63 Démo

Une autoroute doit traverser une voie ferrée. Une entreprise est chargée de construire un pont par-dessus la voie ferrée pour laisser passer l'autoroute.
La longueur totale du pont est de 8 m; sa hauteur de 6 m (voir figure: pont de face).



L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur $h = 4$ m et d'axe de symétrie (Oy).
Les points A et B sont tels que OA = OB = 3 m.
Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieure ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.

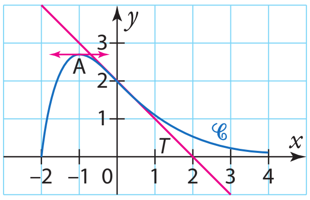
1. On considère le repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) où 1 cm représente 1 m.
Une équation de la parabole dans ce repère est de la forme: $y = ax^2 + c$.
Déterminer c, puis a.

2. Déterminer l'aire de l'ouverture déterminée par l'arc de parabole.

3. Vérifier que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges exposées dans l'énoncé.

D'après Bac pro Travaux publics 1993

64 On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$. On nomme A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 et B le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.



- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;-1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;4]$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ au point A est horizontale.
- La droite T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point B et a pour équation $y=-x+2$.

A ▶ 1. a) Donner la valeur de $f'(-1)$.

b) Déterminer le signe de $f'(2)$.

c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.

2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ exprimée en unité d'aire.

B ▶ La fonction f de la partie **A** a pour expression :

$$f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A.

2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;4]$.

3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2\ ;4]$ par $F(x)=(-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f.

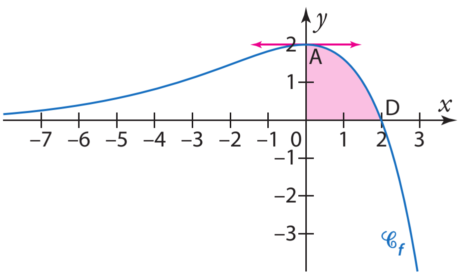
4. a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question **2.** de la partie **A**.

65 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(-x+2)\mathrm{e}^{0,5x}$$

dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



1. À l'aide de la figure, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}$ est comprise entre 2 et 4.

2. a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x)=(-2x+8)\mathrm{e}^{0,5x}$
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer la valeur exacte de $\int_{0}^{2} f(x)dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

D'après Bac ES Amérique du Nord 2013

Fonction définie par une intégrale

66 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$F(x)=\int_0^x (1-\mathrm{e}^{-t^2})\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étudier le signe de la fonction en fonction de x sur cet intervalle.

67 Déterminer les variations de F, définie sur $[0\ ;1]$ par :

$$F(x)=\int_0^x (1-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\ .$$

Aire d'un domaine entre deux courbes

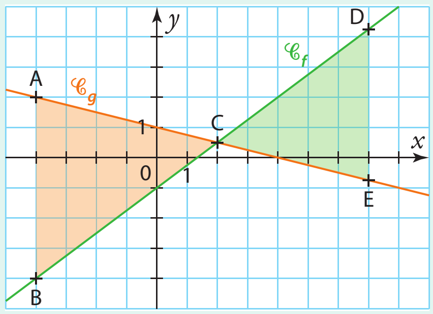
Méthode 7 p. 148

Thème 4

68 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{3}{4}x-1 \text{ et } g(x)=-\frac{1}{4}x+1.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.



1. Résoudre $f(x) > g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

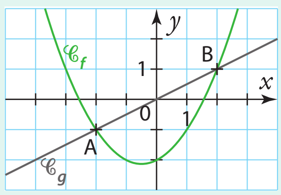
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. Déterminer l'aire entre les deux droites représentant les deux fonctions entre 2 et 7.

69 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2 \text{ et } g(x)=0,5x.$$

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions ont été tracées sur la figure suivante.



1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.

2. Résoudre $f(x) < g(x)$.

2. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

Exercices d'entraînement

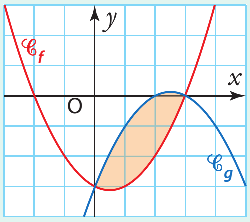
Thème 4

70 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 \text{ et}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont été tracées ci-dessous.

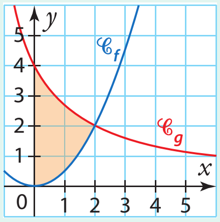


1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B des deux courbes.
2. Sur quel intervalle la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$?
3. Déterminer l'aire entre les deux courbes entre l'abscisse de A et l'abscisse de B.

71 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{et } g(x) = \frac{8}{x+2}.$$

On s'intéresse au domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = a$ ($a > 0$).



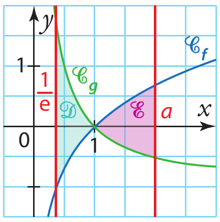
1. a) Montrer que 2 est racine du polynôme $N(x) = x^3 + 2x^2 - 16$.
b) Déterminer 3 réels b, c et d tels que $N(x) = (x-2)(bx^2 + cx + d)$.
c) En déduire le signe de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. On suppose que $a < 2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
3. On suppose que $a \geqslant 2$. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

72 Soit f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : TICE

$$f(x) = \ln(x) \text{ et } g(x) = \frac{1}{x} - 1.$$

On définit :
- le domaine $\mathscr{D}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, la droite $x = e^{-1}$ et la droite d'équation $x = 1$.
- le domaine $\mathscr{E}$ compris entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, la droite $x = 1$ et la droite $x = a$ ($a > 1$).

On cherche a tel que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.



1. a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et proposer une une valeur possible de a.
b) Donner le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. Soit $h(x) = x\ln(x) + x - 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
a) Calculer $h'(x)$. Que peut-on dire de h ?
b) Étudier les variations de la fonction h.
c) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Déterminer l'aire du domaine $\mathscr{D}$.
4. a) Montrer que l'aire du domaine $\mathscr{E}$ est égale à $(a-1)\ln(a)$.
b) Étudier les variations de la fonction $k(x) = (x-1)\ln(x)$.
c) Déterminer a telle que les aires $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ soient égales.

Interpréter une intégrale

Méthode 8 p. 149

Thème 1

73
Une usine produit des pièces métalliques. On note x la production en dizaine de pièces et le bénéfice obtenu par la vente de ces pièces est donné par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(x) = -0{,}04e^x + x - 1$$

1. Établir les variations de la fonction f.
2. Tracer la courbe et donner sans justifier une valeur approchée a 10^{-1} par excès du réel α tel que $f(\alpha) = 0$ avec $\alpha > 2$.
3. Calculer $\int_2^4 f(x)\,dx$.
4. Déterminer la quantité q_0 de pièces à produire et à vendre pour un bénéfice maximal, et calculer une valeur approchée de ce bénéfice maximal arrondie à 10 euros près.
5. Déterminer la quantité q_1, supérieure à q_0, à partir de laquelle l'entreprise travaille à perte.
6. À 1 euro près par défaut, calculer le bénéfice moyen réalisé par l'entreprise quand elle produit et vend entre 20 et 40 pièces.

D'après Bac

74
Une machine-outil achetée neuve coûte 10 milliers d'euros. Au bout d'un an, son prix de revente a diminué de 18 % et on admet qu'il en est ainsi chaque année.
1. Quel est le prix de revente en milliers d'euros au bout de trois années ?
2. On note V_n le prix de revente de la machine au bout de n années, en milliers d'euros.
a) Exprimer V_n en fonction de n.
b) Déterminer par le calcul le nombre d'années à partir duquel le prix de revente de la machine sera inférieur ou égal à 1,5 millier d'euros.
3. Soit k la fonction définie sur $[0\,;8]$ par : $k(x) = 10\,e^{-0{,}2x}$. On admet que $k(n)$ est une bonne approximation de V_n pendant les 8 premières années. On note I, l'intégrale : $I = \int_0^5 k(x)\,dx$.
a) Calculer la valeur exacte de I, puis en donner une valeur approchée arrondie à l'unité la plus proche.
b) Estimer la valeur moyenne du prix de revente de la machine sur cinq années d'utilisation, puis en donner une valeur approchée

D'après Bac

Thème 1

75 Un supermarché souhaite acheter des fruits à un paysan.
Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandés. Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$en euros du kilogramme de fruits est donné pour $x \in [100 ; +\infty[$ par la formule : $P(x) = \dfrac{x+300}{x+100}$

Par exemple si le supermarché achète 300 kg de fruits, ces fruits lui sont vendus $P(300) = \dfrac{600}{400} = 1{,}50$ € le kg.
Dans ce cas, le supermarché devra payer
$300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

A ▶ Étude du prix proposé par le fournisseur

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.

2. Montrer que $P'(x) = \dfrac{-200}{(x+100)^2}$ sur $[100 ; +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction P.

B ▶ Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme). Pour $x \in [100 ; +\infty[$, cette somme est donc égale à : $S(x) = xP(x)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[$:
$$S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x+100)^2}$$

3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100 ; +\infty[$:
$$S(x) = x + 200 - 20\,000 \times \frac{1}{x+100}.$$

4. En déduire une primitive T de S sur $[100 ; +\infty[$.

C ▶ Étude de différentes situations

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits. Préciser, au kg près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.

2. Le supermarché estime acheter régulièrement, selon les saisons, entre 400 et 600 kg de fruits à ce fournisseur. Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400 ; 600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.

D'après Bac ES Amérique du Nord 2011

Thème 1

76 **1.** On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 10e^{t\ln(0,9)}$

a) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$

b) Représenter f sur l'intervalle $[0 ; 10]$. On prendra comme unité graphique 1 cm sur chaque axe.

2. On pose : pour tout entier naturel n, $v_n = 10e^{n\ln(0,9)}$.

a) Démontrer que la suite v est géométrique. Est-elle monotone ?

b) Représenter la suite v par un diagramme en bâtons dans le même repère que f.

c) Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ et $S' = v_1 + v_2 + \ldots + v_{10}$.

3. On appelle I l'intégrale $\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) En interprétant I, S et S' comme des aires, démontrer graphiquement que $S' < I < S$.

b) Calculer la valeur exacte de I.

c) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

4. Une voiture a une valeur d'achat de 10 000 €. On estime que sa valeur marchande (en euros constants) diminue de 10 % par an.

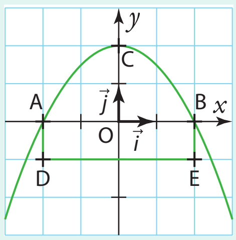
a) Démontrer que sa valeur au bout de n années, exprimée en milliers d'euros, est v_n.

b) Au bout de combien d'années sa valeur est-elle inférieure à 4 000 € ?

c) Évaluer sa valeur moyenne sur 10 ans d'utilisation.

D'après Bac ES 2012

77 Pour établir le devis de nettoyage de la façade de la bibliothèque de Tromsø, le prestataire de service doit établir la surface à nettoyer. On cherche donc à calculer l'aire qui se compose d'un rectangle surmonté par une surface délimitée par une courbe parabolique. On définit un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé d'unité 10 mètres. La hauteur [OC] de la parabole est égale à 20 mètres et sa largeur [AB] vaut 40 m.



1. La parabole est la courbe représentative d'une fonction f de la forme $f(x) = b - ax^2$ avec a et b deux réels positifs. Déterminer a et b.

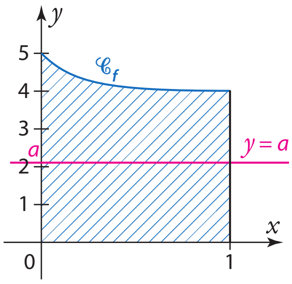
2. Déterminer l'aire de la façade en u.a., puis en m^2.

Exercices bilan

78 Égalité des aires

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = 4 + e^{-5x}.$$



On a tracé dans le repère orthogonal ci-dessus la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Le domaine $\mathscr{D}$ hachuré sur la figure est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
On veut partager le domaine hachuré en deux domaines de même aire par une droite d'équation $y = a$, parallèle à l'axe des abscisses, selon l'exemple donné ci-dessus.

1. Justifier que la valeur $a = 3$ ne convient pas.
2. Déterminer à 0,1 près une valeur de a qui convienne.

D'après Bac ES 2017

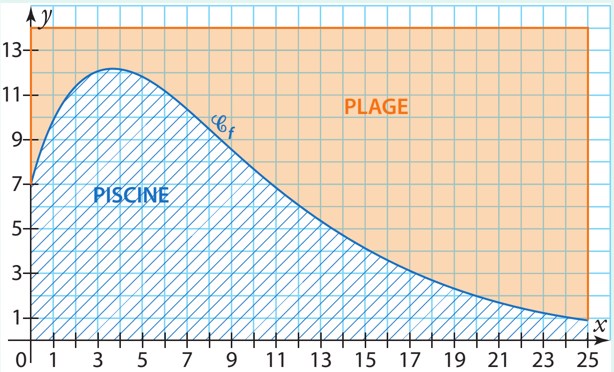
79 Quelle forme de plage pour la piscine

Thème 4

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable.
Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la « plage » se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

La bordure est modélisée par la fonction f définie par :

$$f(x) = (5x + 7)e^{-0,2x}.$$



1. Montrer que $F(x) = (-25x - 160)e^{-0,2x}$ est une primitive de f.

2. Quelle est l'aire en m² de la zone hachurée représentant la piscine ?

3. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie. Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre ?

D'après Bac ES 2018

80 Vendre des voitures

Économie — Thème 1

Une entreprise vend des voitures télécommandées.
La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures.
Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures.
On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaine de milliers d'euros, pour la vente de x milliers de voitures.

1. Donner $r(1)$.

2. On admet que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, la recette mensuelle est modélisée par :

$$r(x) = 6 + x + 2\ln(x).$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [1 ; 5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.

b) Étudier les variations de r sur l'intervalle [1 ; 5].

3. a) Soit g la fonction définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$.
Montrer que la fonction G définie pour tout $x \in [1 ; 5]$ par $G(x) = 2x(\ln(x) - 1)$ est une primitive de la fonction g.

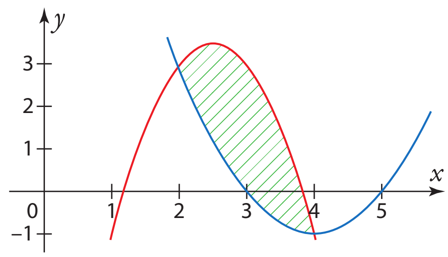
b) En déduire une primitive R de la fonction r sur l'intervalle [1 ; 5].

c) Donner une valeur approchée à la dizaine d'euros de la valeur moyenne de la recette totale lorsque l'entreprise vend entre 2 000 et 4 000 voitures télécommandées.

D'après Bac ES 2018

81 Aire entre deux courbes

Soit $f : x \mapsto x^2 - 8x + 15$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 10x - 9$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont une représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. Calculer l'aire du domaine hachuré.

CONTRÔLE CONTINU

Préparer le BAC L'essentiel

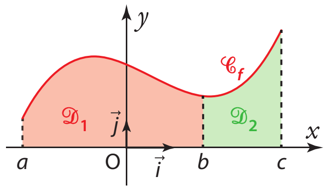
Définition de l'intégrale

- **Définition**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

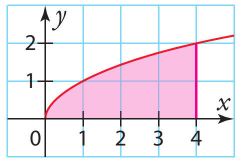
- **Relation de Chasles**

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$



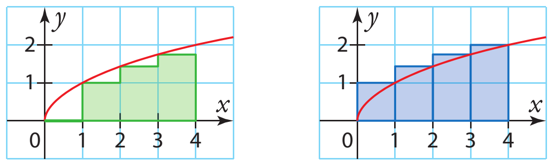
Aire sous la courbe d'une fonction positive

- **Calcul exact**



$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

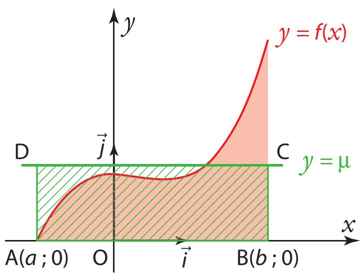
- **Estimation : méthode de rectangles**



$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_i = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{A}_s = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

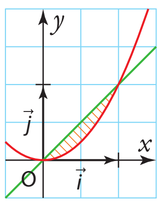
Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



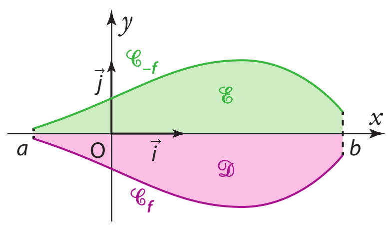
Aire entre deux courbes

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$



Aire sous la courbe d'une fonction négative

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$



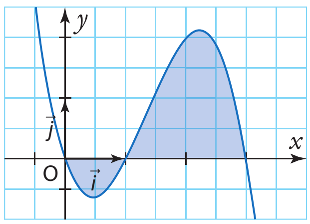
Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de ...		Parcours d'exercices
▶ Estimer une intégrale par calcul d'aire	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 29, 30, 3, 4, 35, 36
▶ Calculs d'intégrales en utilisant les primitives et la relation de Chasles	Méthode 3, Méthode 4	5, 6, 38, 39, 7, 8, 42, 43
▶ Déterminer la valeur moyenne d'une fonction	Méthode 5	9, 10, 45, 46
▶ Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale	Méthode 6, Méthode 8	11, 12, 50, 51, 15, 16, 74, 75
▶ Calculer une aire entre deux courbes	Méthode 7	13, 14, 69, 70

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c06-06

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ dont $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative dessinée ci-contre.



	A	B	C	D
82 L'unité d'aire est la surface de	1 carreau.	2 carreaux.	3 carreaux.	4 carreaux.
83 Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$:	$I \geqslant 0$	$I \leqslant 0$	I est l'aire sous la courbe, entre 0 et 1.	$1 \leqslant -I \leqslant 2$
84 L'aire colorié en bleu est égale à :	$\int_0^3 f(x)\,dx$	$\int_1^3 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$	$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$	$\int_1^3 f(x)\,dx + \int_0^1 -f(x)\,dx$
85 La valeur moyenne µ de f sur [1 ; 3] est égale à :	la longueur d'un rectangle de largeur 3 et d'aire la surface sous la courbe de f entre 0 et 3.	$\frac{1}{2} \times \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_1^3$	$\int_1^3 f(x)\,dx$	$1 \leqslant \mu \leqslant 3$
86 Soit $I = \int_0^{\ln(2)} 3e^x\,dx$, alors :	$I = 3$	$I = 6$	$I = -3$	$I = 3\ln(2)$
87 Une primitive F de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$, est :	$F(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.	$F(x) = -(1 + x)e^{-x}$.	$F(x) = -xe^{-x}$.	$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
88 $\int_0^1 (xe^{x^2})\,dx$ est	positive.	négative.	égale à $0{,}5(e - 1)$.	égale à $0{,}5(1 - e)$.

89 Estimer une intégrale

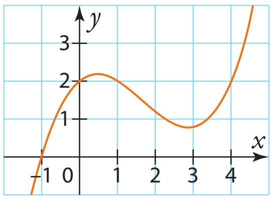
Estimer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 x\,dx$ **b)** $\int_1^3 (2t+1)\,dt$ **c)** $\int_{-2}^1 (-y+3)\,dy$

Méthode 1 p. 143

90 Estimer une intégrale

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on s'intéresse à la courbe représentative d'une fonction f. D'après ce graphique, dire quel encadrement de $I = \int_{-1}^4 f(t)\,dt$ on peut donner :



a $0 \leqslant I \leqslant 5$, **b** $7 \leqslant I \leqslant 12$, **c** $5 \leqslant I \leqslant 7$.

Méthode 2 p. 143

91 Calcul d'intégrale

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 6x - 4$.

1. Vérifier que $F : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 4x$ est une primitive de f.

2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$

Méthode 3 p. 145

92 Estimer une intégrale

Donner une interprétation géométrique de l'intégrale

$\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ puis en calculer une valeur exacte.

Méthode 1 p. 143

93 Calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;0]$ par :

$$f(x) = -2xe^{1-x^2}.$$

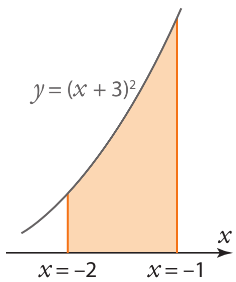
1. Vérifier le signe de $f(x)$ sur $[-2\,;0]$.

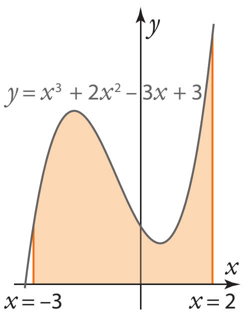
2. En déduire l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction sur cet intervalle.

Méthode 6 p. 147

94 Calcul d'intégrale

Déterminer l'aire de chaque surface proposée.





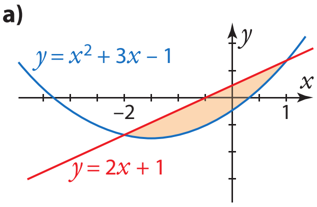
Méthode 3 p. 145

95 Calcul d'aire

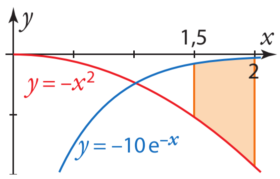
Calculer l'aire de chaque surface colorée.

Méthode 7 p. 148

a)



b)



96 Calcul d'aire

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;0]$ par :

$$f(x) = 2xe^x.$$

1. Déterminer la dérivée de f sur $[-1\,;0]$.

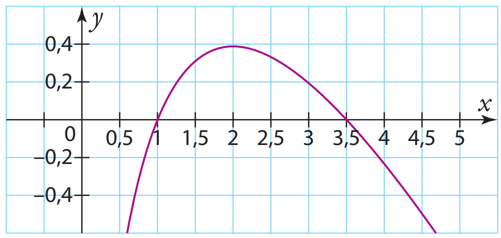
2. En déduire la valeur de $I = \int_{-1}^0 (2x+2)e^x\,dx$.

3. Justifier pourquoi I correspond à l'aire sous la courbe de la fonction $x \mapsto (2x+2)e^x$ sur $[-1\,;0]$.

Méthode 6 p. 147

97 Résoudre un problème

On désigne par f la fonction définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = 1 - x + 2\ln(x)$. La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).



1. Calculer la limite de f en 0.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f. Dresser le tableau des variations de f.

3. a) Calculer $f(1)$.

b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3\,;4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α.

c) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4. On appelle g la fonction définie sur $]0\,;5]$ par :

$$g(x) = x\left(-\frac{1}{2}x + 2\ \ln(x) - 1\right).$$

a) Montrer que g est une primitive de f sur $]0\,;5]$.

b) Sur le graphique ci-dessus, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire $\mathscr{A}$ de ce domaine est égale en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.

c) Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}$ exprimée en cm^2. (On utilisera la valeur approchée de α trouvée au **3. b)**.

D'après bac ES 2006

Méthode 6 p. 147

PARTIE 2

Probabilités et statistiques

Jacques Bernoulli (1654-1705)

En 1713, Jacques Bernoulli publie son *Ars Conjectandi* où il approfondit des travaux de Huygens. Il y étudie pour la première fois la distribution binomiale et la loi des grands nombres.

↳ Dicomaths p. 294

Antoine Deparcieux (1703-1768)

En 1746, Deparcieux présente son *Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine* où on trouve certaines des premières tables de mortalité, servant aux compagnies d'assurance-vie.

↳ Dicomaths p. 295

Au début du XIXe siècle, la statistique inférentielle émerge du fait, notamment, de l'approche probabiliste de la théorie des erreurs de Lagrange et Laplace et de la méthode des moindres carrés imaginée par Legendre puis par Gauss, qui l'applique à la prédiction de la position d'un astéroïde.

↳ Dicomaths p. 296

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes

- J'ai calculé des probabilités dans des cas simples, des probabilités conditionnelles et des probabilités de deux événements indépendants.
- J'ai étudié la notion de variable aléatoire ainsi que ses paramètres : espérance, variance et écart-type.

En Terminale générale

- Je vais étudier le schéma de Bernoulli, la loi binomiale ainsi que la loi géométrique. Je vais découvrir les lois uniforme et exponentielle.
- Je vais également modéliser des situations par un nuage de points et appliquer la méthode de la régression linéaire.

Adolphe Quételet (1796-1874)

Irénée Jules Bienaymé (1796-1878)
Pafnouti Tchebychev (1821-1894)

Karl Pearson (1857-1936)

William Gosset (1876-1937)

Dans les années 1830, Quételet introduit des méthodes statistiques en sociologie et étudie la distribution de données autour de la moyenne.

En 1867, Bienaymé et Tchebychev démontrent l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et parlent de fréquences d'échantillons.

↪ Dicomaths p. 294, p. 297

Au début du XX^e^ siècle, Pearson s'intéresse à la notion de corrélation entre variable (coefficient de corrélation), développe le test du χ^2 et applique les méthodes statistiques à la biomédecine. Le travail de Pearson sera poursuivi par Student (de son vrai nom Gosset) et Fisher, à l'origine du test de Student-Fisher.

↪ Dicomaths p. 296, p. 297

Domaines professionnels

- Un·e **créateur·trice de jeux** se servira de la loi binomiale pour déterminer la probabilité qu'un joueur gagne un certain nombre de parties parmi parties jouées.
- Un·e **ingénieur·e** concevra des tests pour vérifier la fiabilité d'une machine automatique.
- Un·e **contrôleur·se de qualité** utilisera le test de Student afin de vérifier la production de son entreprise.
- Un·e **géologue** datera un échantillon radioactif au moyen de la loi exponentielle.
- Un **médecin** étudiera la pertinence d'un protocole de traitement.
- Un·e **statisticien·ne** dans une cabinet d'études fera des prévisions concernant le chiffre d'affaires d'un établissement.