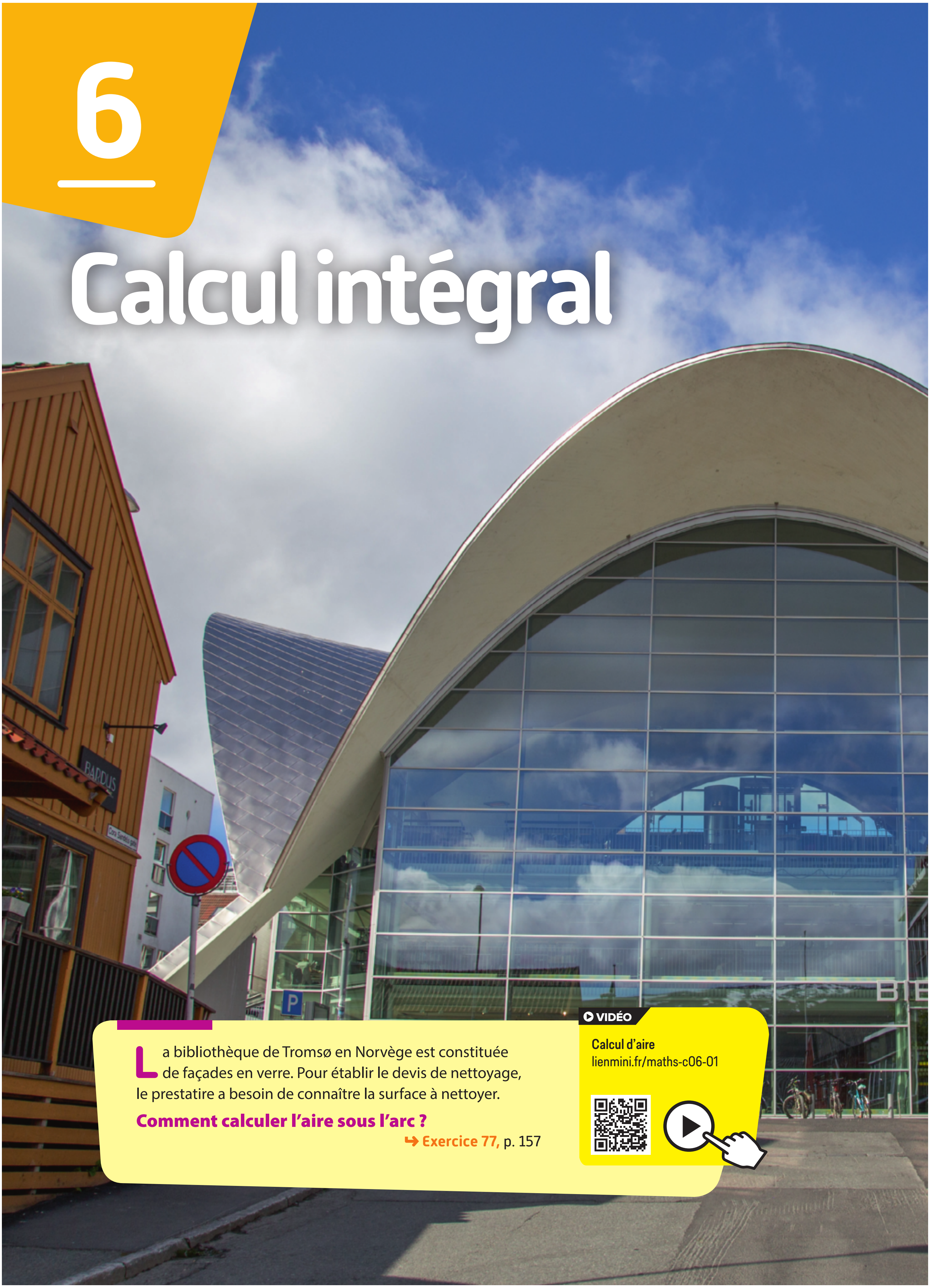
6

Calcul intégral



La bibliothèque de Tromsø en Norvège est constituée de façades en verre. Pour établir le devis de nettoyage, le prestatire a besoin de connaître la surface à nettoyer.

Comment calculer l'aire sous l'arc ?

↪ Exercice 77, p. 157

VIDÉO

Calcul d'aire

lienmini.fr/maths-c06-01

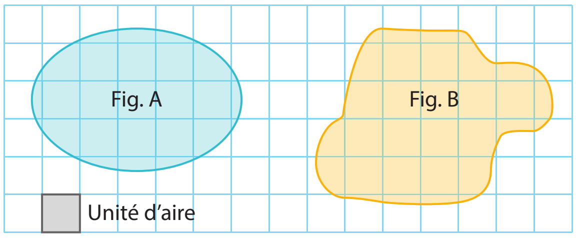
Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c06-02

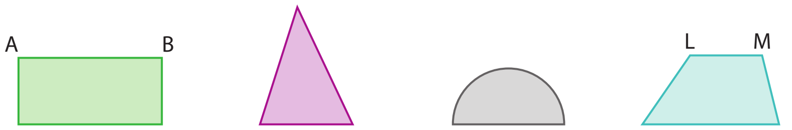
Les rendez-vous Sésamath

1 Calculer des aires

a) Déterminer un encadrement de l'aire exprimée en unités d'aire pour chaque figure ci-dessous.



b) Écrire les formules des aires des figures suivantes.



2 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

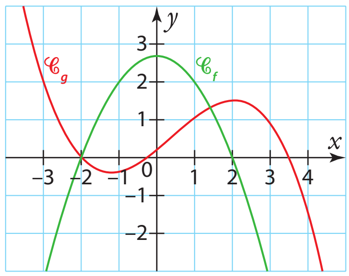
On considère les fonctions f et g dont une représentation graphique est tracée ci-contre.

Déterminer graphiquement :

a) le signe de la fonction f sur $[-3 ; 4]$,

b) le signe de la fonction g sur $[-3 ; 4]$,

c) la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur $[-3 ; 4]$.



3 Déterminer le signe d'une fonction

On considère les fonctions $f : x\, f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et $g : x \mapsto x - 1$ définies sur l'ensemble des réels.

1. Étudier le signe des fonctions f et g sur l'ensemble des réels.

2. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble des réels.

4 Déterminer une primitive

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto 5x^4 - x^3 + x$

b) $g : x \mapsto \dfrac{2x}{(3+x^2)^3}$

c) $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$

d) $h(x) = x^2 e^{x^3+1}$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

f) $k(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$

Activités

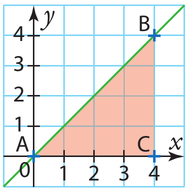
Algo 55 min **Thème 4**

1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue positive

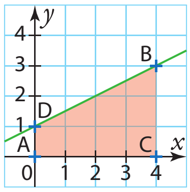
A ▶ Aire sous la courbe d'une fonction

Dans chacun des cas, donner la valeur de l'aire sous chacune des courbes entre les abscisses 0 et 4, en unités d'aire.

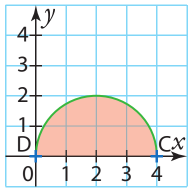
a) $f(x) = x$



b) $f(x) = 0{,}5x + 1$

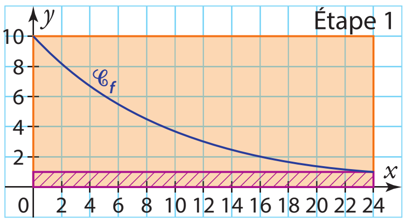


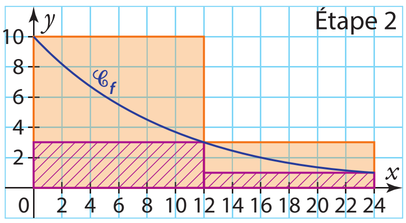
c) $f(x) = \sqrt{4-(x-2)^2}$

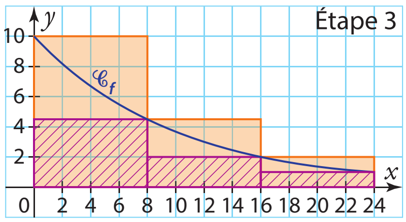


B ▶ Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

On considère la fonction f définie sur $[0\,;24]$ par $-x\ln\left(\dfrac{9}{24}\right)+\ln(10)$ représentée en bleu ci-dessous. Pour estimer l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe de f entre 0 et 24, on découpe l'aire de deux manières différentes.







1. Proposer un schéma de l'étape 4 puis décrire la construction des rectangles.

2. On note U_n la somme des aires des rectangles hachurés et V_n la somme des aires des rectangles colorés à l'étape n. On a donc $U_1 = 24 \times f(24)$ et $V_1 = 24 \times f(0)$. Exprimer U_2 et V_2 en fonction de f, puis U_3 et V_3.

3. L'intervalle $[0\,;24]$ est maintenant découpé en 12. Comment pensez-vous que les deux suites (U_n) et (V_n) évoluent ? Et si le découpage augmente, que se passe-t-il ?

4. Proposer un programme **Python** permettant de déterminer U_n et V_n. Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\mapsto\infty} U_n$ et $\lim\limits_{x\mapsto\infty} V_n$?

Remarque Ce nombre, correspondant à l'aire $\mathscr{A}$, se note $\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C ▶ Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles

On considère la fonction $g(x) = x^2$ sur $[0\,;1]$ et les suites (U_n) et (V_n) représentant les suites des sommes des rectangles définis comme précédemment.

1. Modifier le programme **Python** pour proposer une valeur approchée de $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$.

2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer U_1 et V_1 en fonction de g, puis U_2 et V_2 et enfin U_3 et V_3.

b) Démontrer que $U_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$. En déduire que $U_n = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

c) Démontrer que $V_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. En déduire que $V_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

3. Justifier l'encadrement $U_n \leqslant \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \leqslant V_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. Déterminer $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ en appliquant l'encadrement avec n très grand.

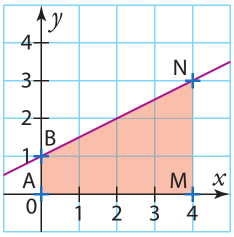
↪ Cours 1 p. 142

20 min

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

A ▸ Intégrale d'une fonction affine

On considère la fonction $f(t) = \frac{2}{3}t + 2$ sur $\mathbb{R}^+$. M est un point de l'axe des abscisses de coordonnées $(t\,;0)$ et N le point de la courbe de f d'abscisse t.



1. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(t)$ du trapèze AMNB est égale à $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{3}t^2 + 3t$.

2. Exprimer à l'aide d'une intégrale cette aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et t.

3. Calculer la dérivée de la fonction $\mathcal{A}$. Quel lien peut-on faire entre la fonction f et $\mathcal{A}$?

B ▸ Intégrale de la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \sqrt{t}$ et dont la courbe représentative est notée $\mathscr{C}$. Soit un réel $x > 0$, on désigne par $\mathscr{S}_x$ la surface sous $\mathscr{C}$ pour $0 \leqslant t \leqslant x$. On note $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la surface $\mathscr{S}_x$.

1. Justifier la notation $\mathcal{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit h un nombre réel tel que $x + h \in \mathbb{R}_+$.

a) Si $h > 0$, représenter l'allure de $\mathscr{C}$ ainsi que la surface d'aire $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$.

b) En encadrant cette aire, démontrer que $\sqrt{x} \leqslant \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leqslant \sqrt{x+h}$.

c) Déterminer de même un encadrement de $\frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h}$ lorsque $h < 0$.

3. Démontrer que $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ est dérivable pour tout $x > 0$ et en donner la fonction dérivée.

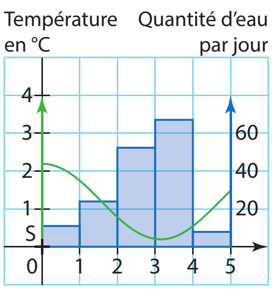
Que peut-on alors dire de la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$?

↪ Cours 2 p. 144

15 min

3 Valeurs moyenne d'une fonction

Pendant ses vacances dans une station de ski, Sam relève la quantité d'eau qui est tombée ainsi que les températures grâce à une station météo qui affiche le graphique suivant.



1. Voici le relevé des quantités d'eau de pluie par jour.

Jour	1	2	3	4	5
Quantité d'eau en mm	12	24	52	64	8

a) Quelle est la valeur moyenne de cette série ?

b) Donner l'interprétation géométrique de la valeur moyenne.

2. La courbe des températures est modélisée par la fonction f définie par $1{,}2 + \cos(x)$ sur $[0\,;5]$.

a) Exprimer l'aire sous la courbe.

b) Quelle est la hauteur du rectangle de longueur 5 qui a la même aire que celle sous la courbe ? Par extension, ce nombre est la valeur moyenne de la fonction f sur $[0\,;5]$.

↪ Cours 2 c p. 146

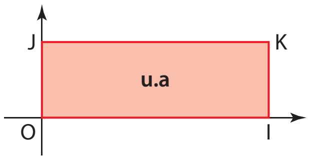
Cours

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$,
l'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle ayant pour côté [OI] et [OJ]

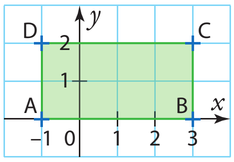
Exemple
Dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ci-contre, l'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ. Si OI = 3 cm et OJ = 1 cm alors 1 u.a. = 3 cm^2.



Définition Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire de la surface (aussi appelée domaine sous la courbe de f sur $[a\,;b]$) délimitée par :
• la courbe, • l'axe des abscisses, • les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aire.
On la note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple
Soit f la fonction constante définie par $f(x) = 2$.
Alors $\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \text{Aire(ABCD)} = 2 \times 4 = 8$ u.a.



Remarques

① $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est un nombre réel positif.

② $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ car cette intégrale est l'aire d'un segment.

③ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ne dépend que des valeurs de a, b et f. La variable x est dite « muette » on peut la remplacer par une autre lettre : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u \ldots$

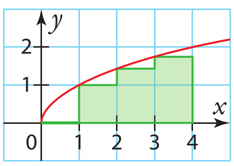
Propriété Méthode des rectangles inférieurs et supérieurs

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. On partage l'intervalle $[a\,;b]$ en n intervalles de même amplitude et on construit des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ». On note $\mathcal{A}_i$, resp. $\mathcal{A}_s$, l'aire des rectangles inférieurs (resp. supérieurs). Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_s = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

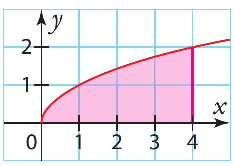
De plus, si la fonction est monotone : $\mathcal{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathcal{A}_s$.

Exemple Pour $n = 4$

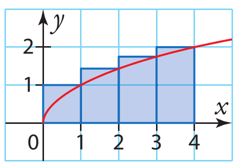
$\mathcal{A}_i$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



$\mathcal{A}_s$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Déterminer une intégrale par calcul d'aire

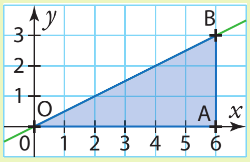
Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x$

Solution

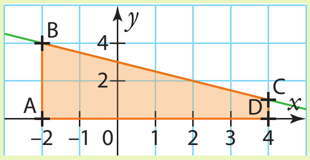
a) On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 0{,}5x$ 1 sur $[0\,;6]$ et f est une fonction linéaire continue et positive sur $[0\,;5]$. 2



$\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x$ est donc l'aire du triangle rectangle OAB. 3

D'où $\int_0^6 0{,}5x\,\mathrm{d}x = \dfrac{OA \times OB}{2} = \dfrac{6 \times 3}{2} = 9$.

b) On trace la courbe représentative de g définie par $g(x) = 3 - 0{,}5x$ sur $[-2\,;4]$ et on identifie le domaine sous la courbe. 1



g est continue et positive sur $[-2\,;4]$ et $\int_{-2}^4 3-0{,}5x\,\mathrm{d}x$ est l'aire du trapèze ABCD. 2

D'où $\int_{-2}^4 (3-0{,}5x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{AD \times (AB + DC)}{2} = \dfrac{6 \times (4+1)}{2} = 15$. 3

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f dans un repère orthogonal et identifier le domaine sous la courbe.

2 Vérifier que la fonction est continue et positive sur l'intervalle défini par les bornes de l'intégrale.

3 Déterminer l'aire du domaine sous la courbe

À vous de jouer !

1 Calculer $\int_2^5 2x\ \mathrm{d}x$.

2 Calculer $\int_{-4}^{-1} -2u - 1\mathrm{d}u$.

↪ Exercices 29 à 34 p. 152

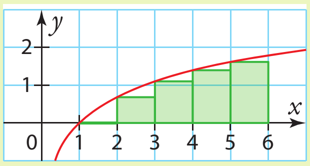
Méthode 2 Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

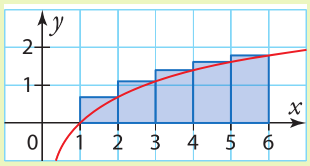
Énoncé

En divisant l'intervalle $[1\,;6]$ en 5 intervalles de même amplitude, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\mathrm{d}x$.

Solution

1





$\mathcal{A}_i = 0 + \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5)$

$\mathcal{A}_i = \ln(120)$

$\mathcal{A}_s = \ln(2) + \ln(3) + \ln(4) + \ln(5) + \ln(6)$

$\mathcal{A}_s = \ln(720)$

2 On en déduit $\ln(120) \leqslant \int_1^6 f(x)dx \leqslant \ln(720)$.

Conseils & Méthodes

1 Tracer la courbe représentative de fonction f et tracer les rectangles inférieurs et supérieurs.

2 Calculer l'aire des rectangles « inférieurs » et « supérieurs ».

À vous de jouer !

3 En divisant l'intervalle $[1\,;6]$ en 10 intervalles égaux, encadrer $\int_1^6 \ln(x)\mathrm{d}x$.

4 Soit $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2x+1)}{6}$.

Diviser $[-2\,;2]$ en 10 intervalles égaux, estimer $\int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

↪ Exercices 35 à 37 p. 152

2 Intégrale et primitive

a Fonction positive

Théorème **Existence d'une primitive**

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}$ est dérivable sur $[a\,;b]$
et a pour dérivée f.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c06-04

Remarque La fonction F est la primitive de f sur $[a\,;b]$ qui s'annule en a.

Théorème **Condition suffisante d'existence d'une primitive d'une fonction**

Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque Ce théorème ne donne pas directement une expression explicite de $F(x)$.

Exemple

La fonction ln est continue sur $[1\,;20]$, donc ln admet des primitives sur $[1\,;20]$.
La fonction F définie sur $[1\,;20]$ par $F(x) = \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1.

Propriété **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive**

Toute Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On notera communément $\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration

Pour tout élément $a \in [a\,;b]$, les fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto F(x) - F(a)$ sont deux primitives de f qui s'annulent en a. Elles sont égales et le calcul de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.

b Fonction continue

Définition **Généralisation de la définition de l'intégrale**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive quelconque de f sur $[a\,;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel défini par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque La méthode des rectangles s'applique à toute fonction continue.

Propriété **Relation de Chasles**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;c]$. Soit $b \in [a\,;c]$. On a $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^c = F(c) - F(a) = \mathrm{F}(c) - \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \left[F(x)\right]_a^b + \left[F(x)\right]_b^c = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque Si f est continue et positive et $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents.
$\mathcal{A}_{totale} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ ou $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercices résolus

Méthode 3 Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

Énoncé

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

Solution

a) La fonction $x \mapsto -x^2+3x+4$ admet pour primitive la fonction

$F : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x$. **1** $\int_{-1}^{4}(-x^2+3x+4)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{4}=\frac{269}{6}$. **2**

b) Soit h définie sur $[1\ ;\mathrm{e}]$ par $h(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$. On reconnaît une expression ressemblant à $\frac{v'}{v}$ avec $v(x)=x^2+2x$ et $v'(x)=2x+2=2(x+1)$. Donc une primitive est $H : H(x)=\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)$ est une primitive de h. **3**

$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{x+1}{x^2+2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\times\ln(x^2+2x)\right]_{1}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\times\ln(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e})-\frac{1}{2}\times\ln(2)=1+\mathrm{e}-\frac{1}{2}\ln 2$ **4**

Conseils & Méthodes

1 Chercher une primitive de f notée F.

2 Calculer l'intégrale c'est calculer $F(4)-F(-1)$.

3 Un candidat primitive est $\ln(v)$. $(\ln(v(x)))'=\frac{2x+2}{x^2+2x}$ d'où une primitive de g.

4 Calculer $H(\mathrm{e})-H(1)$.

À vous de jouer !

5 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{4}(x-1)^2\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{2}^{3}\frac{3x^2-1}{x^3-x}\mathrm{d}x$

6 Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{2}\frac{1}{(2x-3)^2}\mathrm{d}x$ **b)** $\int_{0}^{1}2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

↳ Exercices 38 à 41 p. 152

Méthode 4 Utiliser la relation de Chasles

Énoncé

Soit la fonction f, continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x<0\\ \mathrm{e}^x & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$. Déterminer $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Solution

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc intégrable. $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x$ **1**

$\int_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{0}(-x+1)\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-3}^{0}=7{,}5$ **2**

$\int_{0}^{5}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{5}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^5=\mathrm{e}^5-1$ **2**. On en déduit $\int_{-3}^{5}f(x)\mathrm{d}x=6{,}5+\mathrm{e}^5$.

Conseils & Méthodes

1 Décomposer l'intervalle d'intégration $[-3\ ;5]$ en intervalles sur lesquels la fonction ne change pas d'expression.

2 Calculer chaque intégrale séparément.

À vous de jouer !

7 Calculer l'intégrale $\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ avec $f(x)$ définie par : $x \mapsto x+1$ si $-1\leqslant x\leqslant 0$ et par $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ si $0\leqslant x\leqslant 1$.

8 Soit f définie sur $\mathrm{I}=[-1\ ;1]$ par :

$f(x)=\begin{cases}0{,}25x+3 & \text{si } x<0\\ 2x+3 & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$

Calculer l'intégrale de f sur I.

↳ Exercices 42 à 44 p. 153

Cours

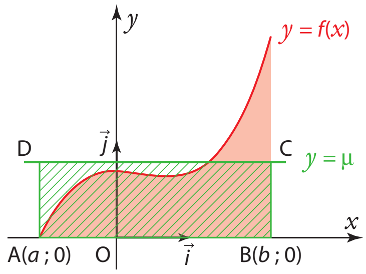
C Valeur moyenne d'une fonction

Définition Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel μ tel que : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Remarque Interprétation graphique dans le cas d'une fonction continue positive

Lorsque f est une fonction positive, on peut dire que l'aire sous la courbe de la fonction f entre a et b est donc égale à l'aire du rectangle ABCD de « largeur » $b-a$ et de « hauteur » μ.



Propriété Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et μ la valeur moyenne de f sur$[a\,;b]$.

Alors $a \leqslant \mu \leqslant b$.

3 Calculs d'aires à l'aide des intégrales

Propriété Aire sous la courbe d'une fonction continue et négative

Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative.

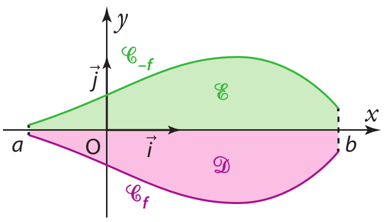
L'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (exprimée en unités d'aire).

Démonstration

Par symétrie, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'aire du domaine E, c'est-à-dire l'aire sous la courbe de la fonction g définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ par $g(x)=-f(x)$. g étant continue et positive, l'aire de $\mathscr{D}$ est donc égale à : $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (exprimée en u.a.).

La primitive de g, G, est égale à l'opposé de la primitive de F : $G=-F$.

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = G(b)-G(a) = -F(b)+F(a) = -(F(b)-F(a)) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Propriétés Aire entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$.
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à :

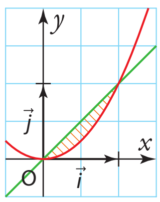
$$\int_a^b (g(x)-f(x))\mathrm{d}x$$

exprimée en unités d'aire.

Exemple

Soit f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x$ et $g(x)=x^2$. Comme pour tout $x \in [0\,;1]$, on a $x < x^2$, l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$ est égale à :

$$\mathscr{A}(D) = \int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ u.a}$$



Exercices résolus

Méthode 5 Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer la valeur moyenne m de la fonction f sur [2 ; 5].

2. Donner une interprétation géométrique.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule de la moyenne.

2 Vérifier que la fonction f est positive pour interpréter la valeur moyenne.

Solution

1. f est continue, $m = \frac{1}{5-2} \int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$. 1 Or $\int_2^5 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_2^5 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ donc $m = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$.

2. La fonction f est positive. 2 La valeur moyenne calculée est la longueur d'un rectangle de largeur 3 qui a la même aire que le domaine sous la courbe sur [2 ; 5].

À vous de jouer !

9 Déterminer la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-10t}$ sur [0 ; 2].

10 Calculer $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ sachant que la valeur moyenne de f sur [1 ; 4] est égale à 2.

↪ Exercices 45 à 49 p. 153

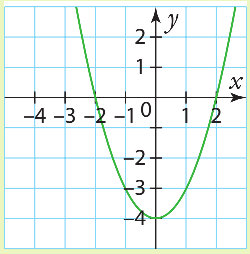
Méthode 6 Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

Énoncé

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer :

a) l'aire $\mathscr{A}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

b) l'aire $\mathscr{B}$ comprise entre la courbe et l'axe des abscisse entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = 1$.



Solution

a) f est négative entre −2 et 2. 1 $\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x$ 2

Une primitive de $x^2 - 4$ est $\frac{x^3}{3} - 4x$ donc

$$\mathscr{A} = -\int_{-2}^{2}(x^2-4)\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = -\left(-8+\frac{8}{3}\right)+\left(8-\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

b) f est positive sur [−5 ; −2] et négative sur [−2 ; 1]. 1

$$\mathscr{B} = \int_{-5}^{-2}(x^2-4)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{1}(x^2-4)\mathrm{d}x$$ 3 $$\mathscr{B} = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-5}^{-2} - \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{1} 3 = 36.$$

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x)$ entre −2 et 2.

2 Écrire l'égalité entre aire et intégrale. f étant négative, c'est l'opposé de l'intégrale de f qui est égale à l'aire

3 Décomposer l'intervalle [−5 ; 1] en sous-intervalles sur lesquels la fonction est de signe constant, puis calculer l'intégrale ou son opposé sur chacun des intervalles.

À vous de jouer !

11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -5$ et $x = -3$.

12 Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)^3 + 1$.

1. Montrer que la solution de $g(x) = 0$ est $x = 2$.
2. Calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses entre les droites d'équations $x = -3$ et $x = 4$.

↪ Exercices 50 à 52 p. 153

Exercices résolus

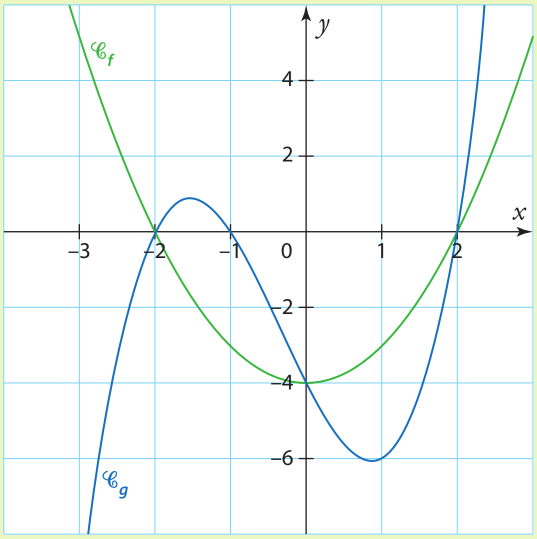
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c06-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Calculer une aire entre deux courbes

Cours 3 p. 146

Énoncé

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.



Solution

$f(x) - g(x) = x^2 - 4 - (x^2 - 4)(x + 1)$ **1**

$f(x) - g(x) = (x^2 - 4)(1 - x - x)$

$f(x) - g(x) = -x(x^2 - 4)$

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	-2		0		2
$x^2 - 4$	0	$-$	-4	$-$	0
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x) - g(x)$	0	$-$	0	$+$	0

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0 ; 2]$ et en dessous sur $[-2 ; 0]$. **1**

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0}(g(x) - f(x))\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$ **2**

$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} x(x^2 - 4) + \int_{0}^{2} -x(x^2 - 4)\mathrm{d}x$ **3**

$\mathcal{A} = \left[\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{(x^2 - 4)^2}{4}\right]_{0}^{2}$

$\mathcal{A} = \frac{(-4)^2}{4} - \frac{0^2}{4} + \frac{0^2}{4} - \frac{(-4)^2}{4}$

$\mathcal{A} = 8$ u.a.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour connaître la position relative des deux courbes.

2 Écrire une égalité entre intégrales et aire en décomposant l'intervalle initial suivant le signe de $f - g$.

3 Calculer les intégrales.

Thème 4

À vous de jouer !

13 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 1$$
$$\text{et } g(x) = x + 1.$$
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

14 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 0{,}25x^2 - x - 3$$
$$g(x) = -0{,}5x^2 - x + 9.$$
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$, en u.a., du domaine compris entre les courbes représentatives de f et g sur l'intervalle $[-4 ; 4]$.

Exercices 69 à 73 p. 155

Exercices résolus

Méthode 8 Interpréter une intégrale

Cours 3 p. 146

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $f(x) = 4\ln(3x+1) - x + 3$.

1. On note F la fonction définie sur l'intervalle [0,5 ; 18] par : $F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^8 f(x)\,dx$ et donner une valeur approchée de cette intégrale à 10^{-1} près.

2. On admet que le bénéfice réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est égal à $f(x)$, en milliers d'euros, pour une production comprise entre 50 pièces et 1800 pièces.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 100 et 800 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

D'après Bac ES 2012

Solution

1. a) $F(x) = \frac{4}{3}(3x+1)\ln(3x+1) - \frac{x^2}{2} - x$ est dérivable sur [0,5 ; 18] et

$$F'(x) = \frac{4}{3}(3x+1) \times \frac{3}{3x+1} + 4\ln(3x+1) - \frac{2x}{2} - 1$$ 1

$F'(x) = 4 + 4\ln(3x+1) - x - 1$

$F'(x) = f(x)$

F est une primitive de f sur [0,5 ; 18].

b) $\int_1^8 f(x)\,dx = F(8) - F(1) = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{64}{2} - 8 - \frac{16}{3}\ln(4) + \frac{1}{2} + 1 = \frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5.$

$\int_1^8 f(x)\,dx \approx 61{,}4$ à 10^{-1} près.

2. x est exprimé en centaines de pièces donc une production entre 100 et 800 pièces correspond à $1 \leqslant x \leqslant 8$. 2

La valeur moyenne de la fonction f est égale à $\mu = \frac{1}{8-1}\int_1^8 f(x)\,dx$ ou encore $\mu = \frac{1}{7}\left(\frac{100}{3}\ln(25) - \frac{16}{3}\ln(4) - 38{,}5\right)$

f s'exprime en milliers d'euros donc $\mu \approx 8{,}772\,755$ milliers d'euros ou $\mu \approx 8\,772{,}755$ euros. 2

Une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près est 8 700 euros.

Conseils & Méthodes

1 On calcule la dérivée de F

2 On étudie les unités du problème.

Thème 1

À vous de jouer !

15 L'entreprise NVIDIO, spécialisée dans la fabrication de cartes graphiques, contrôle la qualité des condensateurs. D'après le cahier des charges, un condensateur est supposé conforme si l'énergie consommée est inférieure à 20 J. Cette énergie (en Joules) correspond à l'aire de la surface sous la courbe de la puissance instantanée p (exprimée en Watts) entre 0 et 10 secondes. Expérimentalement, on établit que la puissance instantanée d'un condensateur est donnée par la fonction :

$$f(t) = 20te^{-t}.$$

1. Montrer que $F(t) = (-20x - 20)e^{-x}$ est une primitive de f.

2. Les condensateurs ainsi fabriqués correspondent-ils au cahier des charges ?

16 On note f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (x+8)e^{-0{,}5x}.$$

La fonction f modélise la demande d'un produit informatique. $f(x)$ représente la quantité, en milliers, d'objets lorsque le prix unitaire est de x centaines d'euros.

1. Étudier les variations de f

2. Montrer que F définie par :

$$F(x) = (-2x - 20)e^{-0{,}5x}$$

est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Calculer la demande pour un un prix unitaire de 200 euros à un produit près.

4. Déterminer la valeur moyenne de la demande, à 10 produits près, pour un prix compris entre 200 et 400 euros.

D'après bac ES Liban juin 2008

Exercices 74 à 78 p. 154

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c06-04

La propriété à démontrer

Soit f une fonction continue positive et croissante sur $[a\,;b]$.

Déterminer la dérivée de la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

▶ On souhaite démontrer la propriété.

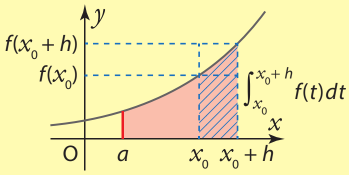
Comprendre avant de rédiger

On ne peut pas utiliser les théorèmes de dérivation classique. On revient donc à la définition de la fonction dérivée. On détermine $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h}$. Cette limite est obtenue en calculant la limite à gauche puis à droite. Cela signifie que la fonction F_a est une primitive de f.

Rédiger

Étape 1 On s'intéresse à la limite à droite.

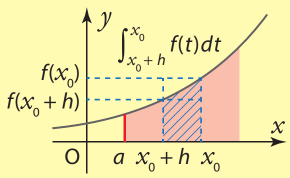
$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ correspond à l'aire de la surface hachurée en bleu.



Par croissance de f, l'aire de la surface sous la courbe de f entre x_0 et x_0+h est encadrée par l'aire du rectangle de dimensions h et $f(x_0)$ et celle du rectangle de dimensions h et $f(x_0+h)$.

Étape 2 On s'intéresse à la limite à gauche.

Cette fois $x_0+h < x_0$, on obtient un encadrement de $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$ par une aire de rectangle.



Étape 3 On conclut.

$F_a(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, F_a est la primitive de f qui s'annule en a.

La démonstration rédigée

Soit $x_0 \in [a\,;b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a\,;b]$.

Si $h > 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \int - \int^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$

f est croissante, on a l'encadrement suivant:

$hf(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leqslant hf(x_0+h)$

D'où : $f(x_0) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$.

f est continue, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Ainsi,

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Si $h < 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$F_a(x_0) - F_a(x_0+h) = -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$.

f est croissante, on a l'encadrement suivant :

$-hf(x_0+h) \leqslant -\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leqslant -hf(x_0)$

$f(x_0+h) \leqslant \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0$ et donc

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$.

La limite à gauche est égale à la limite à droite de 0 donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$. Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$. F_a est dérivable sur $[a\,;b]$ et $F_a' = f$.

Pour s'entraîner

Démontrer le théorème d'existence d'une primitive dans le cas où la fonction est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[a\,;b]$.