DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c05-06

# Exercices calculs et automatismes

## 17 Existence de primitives

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**a)** La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$ admet des primitives sur $]2\,;+\infty[$.

**b)** Toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.

## 18 Primitives de $x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive sur $I = ]0\,;+\infty[$.

**a)** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^7$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **d)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ **e)** $x \mapsto x^{-5}$

## 19 Logique

Compléter les phrases ci-dessous.

**a)** Si $F$ est une primitive d'une fonction $f$ sur I, alors toute fonction de la forme **…** est aussi primitive de $f$ sur I.

**b)** Considérant deux fonctions $F$ et $G$ dérivables sur I, on a : $(F-G)'=0$ équivaut à **…** .

**c)** Si deux fonctions $f$ et $g$ continues sur I sont égales, alors leurs primitives **…**

## 20 Primitives de fonctions usuelles

Choisir la bonne réponse.

**1.** Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $I = ]0\,;+\infty[$ est :

**a** $x \mapsto \sqrt{x}$ **b** $x \mapsto 2\sqrt{x}$ **c** $x \mapsto -\sqrt{x}$ **c** $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

**2.** Une primitive de $x \mapsto 3x^2+x+1$ sur $\mathbb{R}$ est :

**a** $x \mapsto x^3+x^2+x$ **b** $x \mapsto x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x$

**c** $x \mapsto 3x^3+x^2+x$ **d** $x \mapsto 3x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x$

**3.** Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

**a** $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ **b** $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ **c** $x \mapsto \ln(x)$ **d** $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

## 21 Primitives et opérations

Recopier et compléter le tableau en proposant une fonction $f$ et une primitive $F$.

| Forme ($u$ fonction dérivable) | $f(x)$ | Primitive $F(x)$ |
|---|---|---|
| $2u'u$ | | |
| $\dfrac{u'}{u}$ | | |
| $u'e^u$ | | |

## 22 Équations différentielles

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**a)** La fonction $x \mapsto e^{3x}$ est solution de l'équation $y'+3y=0$.

**b)** La fonction $x \mapsto 2-e^x$ est solution de l'équation $y'-y=2$.

**c)** La fonction $x \mapsto 2+e^{-x}$ est solution de l'équation $y'+y=2$.

## 23 Équations différentielles du type $y' = ay$

Choisir la bonne réponse.

**1.** La fonction $x \mapsto 3e^x$ est solution de l'équation différentielle :

**a** $y'=3y$ **b** $y'=-3y$ **c** $y'=-y$ **d** $y'=y$

**2.** La fonction $x \mapsto 5e^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle :

**a** $y'=2y$ **b** $y'=-2y$ **c** $y'=5y$ **d** $y'=-5y$

## 24 Équations différentielles $y' = ay + b$

Choisir la bonne réponse.

**1.** Une solution particulière de l'équation différentielle $y'+\dfrac{1}{2}y=10$ est la fonction constante égale à :

**a** 20 **b** −20 **c** 10 **d** −10

**2.** Une solution de l'équation différentielle $y'=2y+2$ est :

**a** $x \mapsto e^{-2x}+1$ **b** $x \mapsto e^{-2x}-1$

**c** $x \mapsto e^{2x}+1$ **d** $x \mapsto e^{2x}-1$

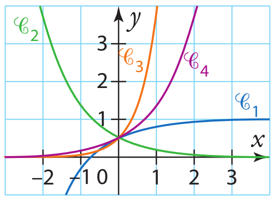
**3.** La fonction $x \mapsto 2-e^{-4x}$ est solution de l'équation différentielle :

**a** $y'-4y=8$ **b** $y'-2y=8$

**c** $y'-8y=4$ **d** $y'+4y=8$

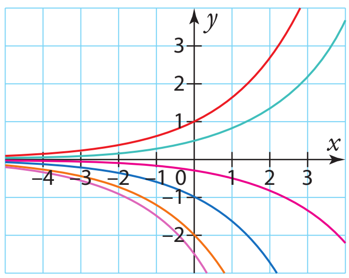
## 25 Lecture graphique (1)

Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y'+y=0$ et qui prend en 0 la valeur $\dfrac{1}{2}$.




## 26 Lecture graphique (2)

On a représenté ci-dessous certaines solutions de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{2}y$.




On considère dans les questions ci-dessous toutes les solutions de l'équation.

**1.** Soit un point $M_0$ donné de coordonnées $M_0(x_0\,;\,y_0)$. Combien de courbes passent par $M_0$ ?

**2.** Montrer que les tangentes à toutes les courbes au point d'ordonnée 2 sont parallèles à la droite $y=x$.

# Exercices d'application

## Montrer qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Méthode 1 p. 117

**27** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = 3x + 1$ et $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 3$

**b)** $f(x) = -x^2 + e^x$ et $F(x) = \frac{-1}{3}x^3 + e^x + 1$

**c)** $f(x) = x^4 + x^3 + x$ et $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$

**28** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle I à préciser.

**a)** $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$ et $F(x) = -x^2 + x - 8\ln(x-4)$

**b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ et $F(x) = 2\sqrt{x} + x - 1$

**29** **1.** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = (x+1)e^x$ et $F(x) = x e^x$

**b)** $f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2+1)^2}$ et $F(x) = \frac{e^x}{(x^2+1)}$

**2.** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur $]0\,;+\infty[$.

**a)** $f(x) = e^x\left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)$ et $F(x) = \sqrt{x}e^x$

**b)** $f(x) = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x}$ et $F(x) = (x+1)\ln(x) - 1$

**30** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = (x+1)^2$ et $F(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3$

**b)** $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ et $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1}$

**c)** $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3}$ et $F(x) = \frac{-1}{2(x^2+3x+1)^2}$

**d)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

**31** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = (3{,}6x + 2{,}4)e^{-0{,}6x} - 1{,}4$ et $F(x) = (-6x - 14)e^{-0{,}6x} - 1{,}4x$

**b)** $f(x) = (-x^2 + 20x - 2)e^{-0{,}1x}$ et $F(x) = 10(x^2+2)e^{-0{,}1x}$

**c)** $f(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ et $F(x) = \frac{e^x}{x}$

**d)** $f(x) = \frac{-x}{e^x}$ et $F(x) = \frac{1+x}{e^x}$

**32** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ et $F(x) = \frac{x}{\ln x}$

**b)** $f(x) = \frac{-3 + \ln x}{x^2}$ et $F(x) = \frac{x + 2 - \ln x}{x}$

**c)** $f(x) = x(2\ln x + 1)$ et $F(x) = x^2\ln x - 1$

**d)** $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$ et $F(x) = (\ln x)^2 + 5$

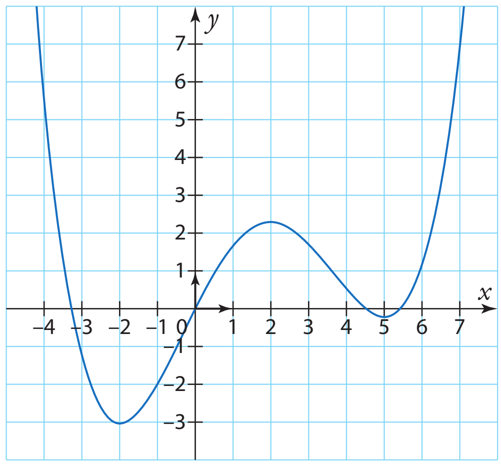
**33** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = -4xe^{-2x}$ et $F(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3$

**b)** $f(x) = \ln x$ et $F(x) = x\ln x - x$

**c)** $f(x) = 2\,000e^{-0{,}2x} + 15x^2 + 50x$ et
$F(x) = -10\,000e^{-0{,}2x} + 5x^3 + 25x^2$

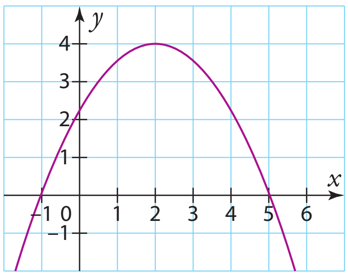
**34** La courbe ci-dessous représente une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $f'$ la dérivée de $f$ et $F$ une primitive de $f$.




Choisir la bonne réponse.

**a** $f'$ est positive sur $[2\,;4]$.
**b** $f'$ est négative sur $[-3\,;-1]$.
**c** $F$ est décroissante sur $[2\,;4]$.
**d** $F$ est décroissante sur $[-3\,;-1]$.

**35** La courbe ci-dessous représente une fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$.




Choisir la bonne réponse.
La fonction $G$ est :

**a** convexe sur l'intervalle $[-1\,;5]$
**b** concave sur l'intervalle $[-1\,;5]$
**c** croissante sur $[2\,;5]$ **d** décroissante sur $[2\,;5]$

## Primitive d'une fonction usuelle

Méthode 2 p. 117

**36** Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I.

**a)** $f(x) = e^x$ ; $I = \mathbb{R}$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

**d)** $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

**37** Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I.

**a)** $f(x) = \dfrac{5}{3}x^3$ ; $I = \mathbb{R}$

**b)** $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2$ ; $I = \mathbb{R}$

**c)** $f(x) = \dfrac{-1}{x^4}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

**d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$

## Ensemble des primitives d'une fonction usuelle, primitive avec conditions initiales

Méthode 3 p. 119

**38** Déterminer un intervalle sur lequel la fonction $f$ admet des primitives, puis donner l'ensemble des primitives $F$ de $f$.

**a)** $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **d)** $f(x) = x^7$

**39** Déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

**a)** $f(x) = e^x$ ; $x_0 = 0$ et $y_0 = -e$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ; $x_0 = 4$ et $y_0 = 0$

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ; $x_0 = 1$ et $y_0 = -5$

**d)** $f(x) = x^2$ ; $x_0 = -1$ et $y_0 = 2$

**40** Déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$ données.

**a)** $f(x) = x^3$ ; $x_0 = -2$ et $y_0 = 0$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ ; $x_0 = 1$ et $y_0 = \dfrac{5}{6}$

**c)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ; $x_0 = \dfrac{1}{2}$ et $y_0 = 1$

**d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ ; $x_0 = -1$ et $y_0 = 0$

**41** La pente de la tangente en tout point $(x\,;y)$ d'une courbe est égale à $\dfrac{2}{x^2}$. Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point $P(-1\,;-2)$.

## Déterminer une primitive

Méthode 4 p. 119

**42** Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1$

**b)** $f(x) = x^4 + x^2 + 5$

**c)** $f(x) = e^x + x^3$

**d)** $f(x) = 2e^x + 3x^2 + 5$

**43** Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions $f$ sur $I = ]0\,;+\infty[$.

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x + 2$

**c)** $f(x) = \dfrac{3}{x} + 5x$

**d)** $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + 1$

**44** Choisir la bonne réponse.

**1.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -3e^{-3x}$ est :

**a** $x \mapsto -3e^{-3x}$ **b** $x \mapsto e^{-3x} + e^2$

**c** $x \mapsto -e^{-3x} + 2e$ **d** $x \mapsto 3e^{-3x}$

**2.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2xe^{x^2-1}$ est :

**a** $x \mapsto e^{x^2-1} + e^2$ **b** $x \mapsto 2e^{x^2-1} + e^2$

**c** $x \mapsto 2xe^{x^2-1} + e^2$ **d** $x \mapsto -e^{x^2-1} + e^2$

**3.** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (x+5)e^{-0,2x}$ est :

**a** $x \mapsto -5(x+5)e^{-0,2x}$ **b** $x \mapsto 5(x+5)e^{-0,2x}$

**c** $x \mapsto 5(x+10)e^{-0,2x}$ **d** $x \mapsto -5(x+10)e^{-0,2x}$

**45** Déterminer une primitive de chacune des fonctions $f$ sur $I = \mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = e^{-2x}$

**b)** $f(x) = -2xe^{-x^2}$

**c)** $f(x) = (3x^2 + 1)e^{x^3+x}$

**d)** $f(x) = x^4\,e^{x^5+1}$

**46** Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

**c)** $f(x) = 2(x+1)(x^2+2x)$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x)$

**47** Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions $f$ sur un intervalle I à déterminer.

**a)** $f(x) = 3x\,e^{x^2+1}$ **b)** $f(x) = (5x+1)^3$

**c)** $f(x) = \dfrac{x}{3x^2+1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x}{(3x^2+1)^2}$

# Exercices d'application

## Déterminer une primitive avec conditions initiales

Méthode 3 et Méthode 4 p. 119

**48** Déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

**a)** $f(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x-2}$ ; $x_0 = \sqrt{2}$ et $y_0 = 1$

**b)** $f(x) = (2x+1)(x^2+x-1)$ ; $x_0 = -1$ et $y_0 = 1$

**c)** $f(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x) + x$ ; $x_0 = 1$ et $y_0 = 3$

**49** Déterminer la primitive $F$ de $f$ vérifiant les conditions initiales $F(x_0) = y_0$.

**a)** $f(x) = \dfrac{6x+1}{3x^2+x+1}$ ; $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ ; $x_0 = \mathrm{e}$ et $y_0 = 2$

**c)** $f(x) = 2e^{2x+1}$ ; $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$

**50** TICE **1.** Justifier pourquoi la fonction $\ln(x) \times e^x + \dfrac{e^x}{x}$ admet des primitives sur $]0\,;+\infty[$.

**2.** À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, déterminer la primitive qui s'annule en 1.

```
deriver(exp(x)*ln(x))
```

$$\ln(x)*\exp(x)+\frac{\exp(x)}{x}$$

**51** On considère la primitive $F$ de la fonction $f(x) = 2 - \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $F(0) = 1$.

**1.** Montrer que $F$ est croissante sur $[-2\ln 4\,;+\infty[$.

**2.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $F(x) = ax + b + e^{\frac{-1}{2}x}$.

**52** Choisir la bonne réponse.
La primitive de la fonction $f : x \mapsto -7xe^x$ qui prend en 0 la valeur 7 est :

**a** $F(x) = (-7-7x)e^x + 14$
**b** $F(x) = 14 - 7e^x$
**c** $F(x) = 14 - 7xe^x$
**d** $F(x) = (7-7x)e^x$

**53** On considère la fonction $f$ telle que :

$$f : x \mapsto (14x+42)e^{\frac{-x}{5}}.$$

**1.** Déterminer les réels $a$ et $b$ de sorte que la fonction $F(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{5}}$ soit une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**2.** Déterminer l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**3.** Déterminer la primitive qui s'annule en 0.

**54** On considère la fonction $f : x \mapsto 2x - 1 + e^{\frac{-x}{2}}$.
Déterminer la primitive $F$ de $f$ telle que $F(-1) = 3$.

## Équation différentielle $y' = ay$

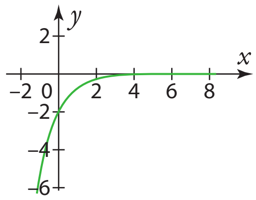
Méthode 5 p. 121

**55** Choisir la bonne réponse.

**1.** Une solution de l'équation différentielle $y' - 3y = 0$ est :
**a** $x \mapsto e^{-3x}$ **b** $x \mapsto e^{3x}$ **c** $x \mapsto e^{-x}$ **d** $x \mapsto e^{x}$

**2.** La solution de l'équation différentielle $y' = -5y$ qui prend la valeur 1 en 0 est :
**a** $x \mapsto e^{5x}$ **b** $x \mapsto 1 - e^{-5x}$ **c** $x \mapsto e^{x}$ **d** $x \mapsto e^{-5x}$

**3.** La courbe ci-dessous représente :
**a** une fonction solution de l'équation $y' = -y$
**b** une fonction solution de l'équation $y' = y$
**c** une fonction solution de l'équation $y'' = 0$
**d** une fonction solution de l'équation $y'' = x$




**56** **1.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

**a)** $y' = 4y$ **b)** $y' = \dfrac{3}{2}y$

**c)** $y' + 2y = 0$ **d)** $3y' - y = 0$

**57** **1.** Résoudre l'équation $y' - 10y = 0$.

**2.** Déterminer la solution qui prend en $-0{,}1$ la valeur $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

**58** **1. a)** Résoudre $2y' + 5y = 0$.
**b)** Déterminer la solution qui prend en 2 la valeur 1.

**2.** On considère la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{-5}{2}x+5}$.
**a)** Vérifier que $f$ est la solution trouvée à la question **1. b)**.
**b)** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**c)** Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**59** Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telles que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids $P$ du moment. Pour certaines espèces de coton, $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}21P$.

**1.** Déterminer la forme de la fonction $P$.
**2.** Évaluer le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

**60** On considère l'équation différentielle **Algo**
$100y' + 12y = 0$ avec pour condition initiale $y(0) = 100$.
**1.** Résoudre cette équation différentielle.
**2.** On considère l'algorithme suivant, en langage Python. Indiquer à quoi correspondent les valeurs de a et de b obtenues en sortie de cet algorithme ?

```
from math import*
def f(x):
      return(100*exp(-0.12*x))
a=0
b=5
while(abs(b-a)>0.01):
      m=(a+b)/2
      if f(m)>80:
            a=m
      else:
            b=m
print(a,b)
```

**61** **SES** **Thème 1** Ce tableau donne l'évolution des ventes d'un produit commercialisé depuis 2000.

| Rang de l'année à partir de 2000 | 0 | 5 | 10 | 15 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|
| Montant des ventes en milliers d'euros | 0,8 | 1,3 | 2,17 | 3,59 | 5,34 |

**1.** Ces résultats incitent à ajuster ces ventes par une fonction $f : x \mapsto ae^{bx}$, avec $a$ et $b$ réels. Déterminer les valeurs de $a$ et de $b$ telles que $f(0) = 0{,}8$ et $f(10) = 2{,}17$.
On donnera une valeur arrondie de $b$ au millième.
**2.** Écrire l'équation différentielle dont $f$ est solution.
**3.** Estimer, en milliers d'euros, le montant des ventes en 2023.

## Équation différentielle $y' = ay + b$

Méthode 6 p. 121

**62** Résoudre les équations différentielles suivantes.

**a)** $y' = 2y - 1$ **b)** $y' = \frac{-1}{4}y + 1$

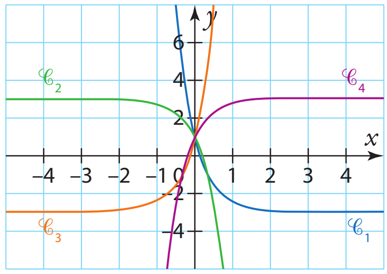
**c)** $y' + 2y = 3$ **d)** $2y' - 5y = 1$

**63** Choisir la bonne réponse.
**1.** Une solution de l'équation différentielle $y' + 7y = 21$ est :
**a** $x \mapsto e^{-7x} + 3$ **b** $x \mapsto e^{7x} - 3$
**c** $x \mapsto e^{-7x} - 3$ **d** $x \mapsto e^{7x} + 3$

**2.** La solution de l'équation différentielle $y' = -y + 5$ qui prend la valeur 1 en 0 est :
**a** $x \mapsto 5 - 4e^{-x}$ **b** $x \mapsto 1 - e^{-5x}$
**c** $x \mapsto e^{x}$ **d** $x \mapsto 5 - 4e^{-5x}$

**64** **1.** Résoudre $y' - 2y = 5$.
**2.** Déterminer la solution qui prend en 0 la valeur 0.

**65** Parmi les courbes suivantes, retrouver celle qui correspond à la solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ et qui prend en 0 la valeur 1.




**66** **1. a)** Résoudre l'équation $5y' - y = 4$.
**b)** Déterminer la solution qui prend en 5 la valeur $-5$.
**2.** On considère la fonction $f : x \mapsto -4 - e^{\frac{1}{5}x - 1}$.
**a)** Vérifier que $f$ est la solution trouvée à la question **1. b)**.
**b)** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$.
**c)** Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

## Modélisation par une équation différentielle

Méthode 8 p. 123

**67** **Thème 2** Une personne est placée sous perfusion de pénicilline, à raison de 0,1 milligramme de substance par minute. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps $t$ (en minutes).
On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $Q'(t) = 0{,}1 - kQ(t)$.
**1.** Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et $t$.
**2.** La limite de $Q(t)$ en $+\infty$ dépend-elle de k ?
Interpréter dans le contexte.
**3.** Calculer k sachant qu'au bout de 3 heures $Q$ est égale à la moitié de la valeur limite.

**68** Dans un environnement où la température est maintenue à zéro degré Celsius, la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la température de cet objet. Dans une pièce où la température est maintenue à 0 °C, un objet chauffé à 100 °C voit sa température chuter à 45 °C en dix minutes.
On note $T(t)$ la température (en °C) de l'objet après $t$ minutes.
**1.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $T$.
Déterminer la fonction $T$ solution.
**2.** En combien de temps la température de cet objet atteindra-t-elle 25 °C ? On arrondira à la minute.

## Déterminer des primitives

**69** On considère la fonction $x \mapsto f(x) = (x-5)e^{\frac{x}{5}} + 5$.
**1.** Déterminer les réels $a$ et $b$ de sorte que la fonction $x \mapsto F(x) = (ax+b)e^{\frac{x}{5}}$ soit une primitive de $x \mapsto (x-5)e^{\frac{x}{5}}$ sur $\mathbb{R}$.
**2.** En déduire l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.

**70** Les propositions ci-dessous sont-elles vraies ou fausses ?
Pour les questions **1.** et **2.**, on admet que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.
**1.** On considère la fonction $x \mapsto u(x) = 3\ln x - 2x + 1$.
**Proposition 1 :** la fonction $x \mapsto 3x\ln x - x^2 + x$ est une primitive de $u$ sur $]0\,;+\infty[$.
**2.** On considère la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{e^2}\ln x$.
**Proposition 2 :** Toute primitive $F$ de $f$ est telle que $F(e^2) - F(e) = 1$.
**3.** On considère la fonction $x \mapsto g(x) = 6e^{-2x+1}$.
**Proposition 3 :** La fonction $x \mapsto G(x) = 3(1 - e^{-2x+1})$ est la primitive de $g$ qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$.

**71** En remarquant que $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$, déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui prend la valeur 1 en e.

**72** À l'aide de l'extrait Xcas ci-dessous, **TICE**
déterminer la primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ qui s'annule en 1.

```
deriver(ln(sqrt(x^2+1)))
```

$$\frac{x}{x^2+1}$$

**73** On considère une fonction $F$ de la forme $F(x) = axe^{1-x}$.
**1.** Déterminer le réel $a$ de sorte que $F$ soit une primitive de la fonction $f(x) = (2-2x)e^{1-x}$.
**2.** Déterminer l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, donner la primitive qui prend en 0 la valeur 2,75.

## Étude complète d'une fonction primitive

**74** On considère la fonction $F$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$F(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $F$ dans le repère (O, I, J).
**1.** Montrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $F$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln(x+1) - 2$.
**2.** En déduire les variations de $F$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
**3.** Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Bac S, France métropolitaine, 2015.

**75** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(t) = te^{t-1} + 1.$$
**1.** Montrer que, pour tout réel $t$, $f$ est une primitive de $(t+1)e^{t-1}$.
**2.** Étudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
**3.** Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**76** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x + \ln(4) + \frac{2}{e^x+1}.$$
**1.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
**2.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.
**3. a)** Montrer que, pour tout réel $x$, $f(x) = x + 2 + \ln(4) - \dfrac{2e^x}{e^x+1}$.
**b)** En déduire l'ensemble des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$.

D'après Bac S, France métropolitaine, 2015.

**77** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (-x^2 + x + 2)e^x.$$
Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$. $F'$ désigne la dérivée de $F$ sur $\mathbb{R}$.
**1. a)** Déterminer $F'(-1)$ et $F'(2)$.
**b)** Étudier les variations de $F$ sur $\mathbb{R}$.
**2.** On admet qu'il est possible de trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout réel $x$, $F(x) = (ax^2 + bx - 1)e^x$.
**a)** Exprimer $F'(x)$ en fonction de $x$ et de $a$ et $b$.
**b)** En utilisant les résultats trouvés à la question **1. a)**, démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x$.
**c)** Étudier les limites de $F$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**78** Une entreprise vend des voitures télécommandées. La vente mensuelle varie entre 1 000 et 5 000 voitures. Une étude montre que la recette mensuelle totale de l'entreprise est de 70 000 euros lorsqu'elle vend 1 000 voitures. On note $r(x)$ la recette mensuelle réalisée par l'entreprise, exprimée en dizaines de milliers d'euros, pour la vente de $x$ milliers de voitures. **SES**
**1.** Donner $r(1)$.
**2.** On admet que, pour tout $x \in [1\,;5]$, la recette mensuelle est modélisée par $r(x) = 6 + x + 2\ln(x)$.
**a)** Montrer que, pour tout $x \in [1\,;5]$, $r'(x) = \dfrac{x+2}{x}$.
**b)** Étudier les variations de $r$ sur l'intervalle $[1\,;5]$.
**3. a)** Justifier que l'équation $r(x) = 10$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1\,;5]$, puis donner une valeur approchée de $\alpha$ au millième.
**b)** Déterminer le nombre minimal de voitures télécommandées vendues à partir duquel l'entreprise réalise une recette supérieure à 100 000 euros.
**4. a)** Soit $g$ la fonction définie pour tout $x \in [1\,;5]$ par $g(x) = 2\ln(x)$. Montrer que la fonction $G$ définie pour tout $x \in [1\,;5]$ par $G(x) = 2x[\ln(x) - 1]$ est une primitive de la fonction $g$.
**b)** En déduire une primitive $R$ de la fonction $r$ sur l'intervalle $[1\,;5]$.

D'après Bac ES, France métropolitaine, septembre 2018.

## Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$

Méthode 7 p. 122

**79** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**1.** Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 10$.

**Proposition 1 :** Les fonctions $x \mapsto e^{2x} + 5$ et $x \mapsto 5$ sont les seules fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de (E).

**Proposition 2 :** Les solutions sont de la forme $x \mapsto e^{2x} + 5k$, avec $k$ réel.

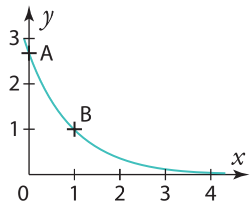
**2.** Considérons l'équation (F) : $y = y' + x^2$.

**Proposition 3 :** La fonction $x \mapsto e^{x} - x^2$ est solution.

**Proposition 4 :** Si un polynôme $P$ est solution alors il est du second degré.

**80** On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 0$ et telle que $f(0) = e$.

Algo




**1.** Déterminer $f(x)$ pour tout $x$ réel.

**2.** Soit $c$ un réel donné de l'intervalle $[1 ; e]$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = c$ d'inconnue $x$.

**3.** Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto e^{1-x}$.

**4.** On considère l'algorithme suivant écrit en langage Python.

```
from math import*
def fonction_solution(x):
      return(e**(1-x))
p=int(input( "p=", ))
x=0
while fonction_solution(x)>10**(-p):
      x=x+1
print(x)
```

Pourquoi est-on certain que, pour n'importe quel entier naturel $p$ rentré, l'algorithme va s'arrêter ?

**81** Choisir la bonne réponse.

**1.** Soit $G$ la fonction définie pour tout réel $x$ strictement positif par $G(x) = x\ln x - x + 2$.
$G$ est une primitive de la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par :

**a** $g(x) = x\ln x - 1$ **b** $g(x) = \ln x + 2x$

**c** $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ **d** $g(x) = \ln x$

**2.** On considère la fonction $H$, définie pour tout réel $x$, par
$H(x) = \dfrac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1)$.

$H$ est une primitive de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

**a** $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$ **b** $h(x) = \dfrac{-e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

**c** $h(x) = \dfrac{1}{e^{2x} + 1}$ **c** $h(x) = 1 - \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$

**3.** On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 3$, où $y$ désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution $f$ de cette équation telle que $f(0) = 0$ est la fonction de la variable $x$ vérifiant pour tout réel $x$ :

**a** $f(x) = 0{,}6e^{5x} + 0{,}6$ **b** $f(x) = -0{,}6e^{-5x} + 0{,}6$

**c** $f(x) = 0$ **d** $f(x) = -3e^{-5x} + 3$

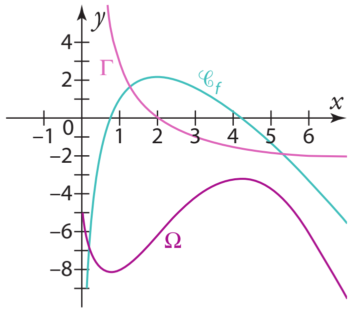
**4.** On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction $f$ dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ ainsi que les courbes $\Gamma$ et $\Omega$. L'une de ces deux courbes est la représentation graphique de la fonction dérivée $f'$ de $f$ et l'autre représente une primitive $F$ de $f$.

**a** Les courbes représentant respectivement $f'$ et $F$ sont $\Gamma$ et $\Omega$.

**c** Les courbes représentant respectivement $f'$ et $F$ sont $\Omega$ et $\Gamma$.

**b** On ne peut pas savoir quelles sont les bonnes courbes.

**d** La courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente horizontale au point d'abscisse 2.




## Équations différentielles dans un contexte

**82** SES Thème 9

**1.** On considère l'équation différentielle $y' = -0{,}7y$. La solution $f$ de cette équation telle que $f(0) = e^{2,1}$ représente la fonction de demande d'un produit ; elle met en correspondance le prix $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité $x$, exprimée en tonnes, que sont prêts à acheter les consommateurs à ce prix. Donner l'expression de $f(x)$.

**2.** La fonction $g$ définie par $g(x) = 0{,}5x + 0{,}7$ est la fonction d'offre de ce produit ; elle met en correspondance le prix $g(x)$, exprimé en milliers d'euros, et la quantité $x$, exprimée en tonnes, que sont prêts à vendre à ce prix les producteurs.
On appelle $h$ la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

**a)** Calculer $h'(x)$ où $h'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

**b)** Étudier le signe de $h'(x)$ pour $x$ appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$. En déduire que la fonction $h$ est strictement monotone sur cet intervalle.

**c)** Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$ et donner à l'aide d'une calculatrice une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

**3.** On appelle prix d'équilibre du marché le prix pour lequel la quantité demandée par les consommateurs est égale à celle offerte par les producteurs. On note $p_0$ le prix d'équilibre et $q_0$ la quantité échangée sur le marché à ce prix. Dans la situation étudiée, on a donc $f(q_0) = g(q_0)$.
Déduire des questions précédentes la valeur de $q_0$, puis calculer $p_0$.

# Exercices d'entraînement

**83** En biologie, un modèle proposé pour la croissance d'êtres vivants est le suivant : tout individu de taille maximale M admet une vitesse de croissance proportionnelle à la taille manquante. Autrement dit, si on note $C(t)$ la taille à l'instant $t$, cette fonction est solution de l'équation différentielle $C'(t) = k(M - C(t))$. SVT Thème 2

**1.** Résoudre cette équation différentielle en supposant que $C(0) = 0$.

**2.** Vérifier que $C$ est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.

**3.** Une espèce de maïs a une taille maximum de 180 cm et met 15 jours pour atteindre la moitié de celle-ci. Au bout de combien de jours sera-t-elle à moins de 10 cm de sa taille maximale ?

**84** Dans une économie keynésienne simple, la consommation $C$ s'exprime par l'égalité $C = 360 + 0{,}8Y$ et $I = 120$, où $Y$ est le revenu et $I$ l'investissement. SES Thème 2

Lorsque le marché est hors de l'équilibre on peut supposer que le taux d'ajustement du revenu $Y$ vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0{,}25(C + I - Y).$$

À la période initiale, le revenu $Y_0$ est égal à 2 000.

**1.** Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $Y$.

**2.** Déterminer la fonction $Y$.

**3.** Étudier la limite de la fonction $Y$ en $+\infty$ et en déduire une conclusion sur la stabilité de l'équilibre de cette économie.

**85** On considère une fonction $f$ qui modélise sur l'intervalle $[0 ; 14]$ la fonction coût total de production, en euros, d'un produit. Les lois de la logistique ont permis d'établir que la fonction $P = \frac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle SES Thème 1

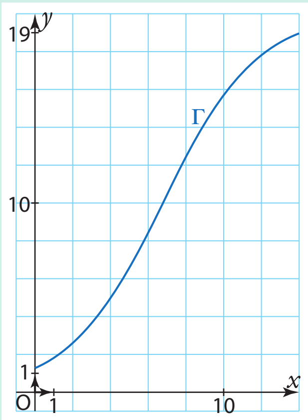
$$P' = -0{,}4P + 0{,}02 \text{ avec } P(0) = \frac{4}{5}.$$

**1.** Déterminer la fonction $P$ puis vérifier que la fonction $f$ s'écrit $f(q) = \dfrac{20}{1 + 15\mathrm{e}^{-0{,}4q}}$.

Préciser la valeur de $f(0)$.

**2.** Étudier les variations de $f$ sur $[0 ; 14]$.

On donne ci-contre la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $f$.




**3.** Pour tout $q$ dans l'intervalle $[0 ; 14]$, le quotient $\dfrac{f(q)}{q}$ est appelé coût moyen de production de $q$ tonnes de produit.

**a)** Pour $q$ dans l'intervalle $[0 ; 14]$, soit Q le point d'abscisse $q$ de la représentation graphique $\Gamma$ de la fonction $f$. Montrer que le coefficient directeur de la droite (OQ) est égal au coût moyen $\dfrac{f(q)}{q}$.

**b)** L'entreprise cherche à minimiser le coût moyen de production. Par lecture graphique, indiquer la valeur de $q$ qui réalise ce minimum et la valeur de ce minimum.

**86** Soit l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Algo

Grâce à l'équation de la tangente à une courbe en un point, on sait que, pour une fonction $f$ dérivable en $x_0$ et pour un réel $h$ assez petit $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

La méthode d'Euler utilise cette approximation et l'égalité $f'(x) = 3f(x) + 5$, pour tout $x$ réel, pour reproduire des couples $(x_n ; y_n)$ représentant des points tels que $y_n \approx f(x_n)$.

On choisit un pas $h$ fixe et petit, les abscisses $x_1, x_2, ..., x_n$ se calculent pour tout $i$ compris entre 0 et $n - 1$ par $x_{i+1} = x_i + h$.

Pour obtenir les valeurs successives $y_1, y_2, ..., y_n$, les calculs s'enchaînent de la manière suivante :

> Conditions initiales $y(0) = 1$.
> - On calcule $y'(0)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(0) = 3y(0) + 5$.
> - On calcule $y(1)$ en utilisant l'approximation affine $y(1) = y(0) + y'(0) \times h$.
> - On calcule $y'(1)$ en utilisant l'équation différentielle $y'(1) = 3y(1) + 5$.
> - On calcule $y(2)$ en utilisant l'approximation affine $y(2) = y(1) + y'(1) \times h$.
> - Et ainsi de suite …

**1.** Justifier que, pour $i$ compris entre 0 et $n - 1$, on a $y(i + 1) = (3h + 1)y(i) + 5h$.

L'ensemble des points $A_i(x_i ; y_i)$ donne une courbe représentant la fonction $y(t)$, avec une bonne approximation lorsque $h$ est petit.

**2.** Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en **Python**

PYTHON Lien mini lienmini.fr/maths-c05-07

```
from lycee import*
from math import*
from pylab import*
def methode_euler(x,y,h,n) :
      X_liste=[x]
      Y_liste=[y]
      xlim(-1,1)
      ylim(0,10)
      for i in range :
            x=x+...
            y=...
            X_liste.append(x)
            Y_liste.append(y)
      return X_liste , Y_liste

method_euler(0,1,0.1,100)
X,Y=methode_euler(0,1,0.1,100)
plot(X,Y,"r+")
show( )
```

## 87 Temps de refroidissement Algo

La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C. Théo lui rétorque que quand il sera à 37 °C il pourra le toucher sans risque et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela. La température du plat est donnée par une fonction $g$ dépendant du temps $t$, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}04y = 0{,}8.$$

**1. a)** Trouver une fonction constante solution de (E).
**b)** En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
**c)** Donner sa solution $g$ définie par la condition initiale $g(0) = 100$.
**2.** En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, répondre aux questions suivantes.
**a)** La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37 °C ?
**b)** Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ? En donner une valeur arrondie à la seconde près.
**c)** Écrire un algorithme qui permet de trouver la minute à partir de laquelle le plat est à une température de 30 °C. Programmer cet algorithme sur la calculatrice.

Bac STI2D, Polynésie, 2013.

## 88 Croissance de bactéries Algo SVT

Le nombre de bactéries $B$ d'une culture passe de 600 (à l'instant 0) à 1 800 en 2 heures. On suppose que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes.
**1.** Trouver :
**a)** une équation avec des conditions qui traduisent le problème.
**b)** une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries $B(t)$ au temps $t$.
**c)** le nombre de bactéries après 4 heures.
**d)** le temps $t$ nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.
**2.** Compléter cet algorithme afin qu'il donne le résultat attendu à la question **1. d)** (à la demi-heure près).

```
t ← 0
B ← 600
Tant que …
   12 000
t ← …
Fin tant que
```

## 89 Un modèle de bénéfice SES

Une entreprise étudie la progression de ses bénéfices ou pertes, évalués au premier janvier de chaque année, depuis le 1er janvier 2009. Chaque année est identifiée par son rang. À l'année 2009, est attribué le rang 0 et à l'année 2009 + $n$ le rang $n$. Ainsi, 2011 a le rang 2. Le tableau suivant indique pour chaque rang d'année $x_i$ le bénéfice ou la perte réalisé(e), exprimé(e) en milliers d'euros et noté(e) $y_i$.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | – 25,000 | – 3,111 | 9,892 | 17,788 | 22,598 | 25,566 |

On cherche à approcher ces bénéfices par une fonction.
On fait l'hypothèse que la fonction $f$ solution de l'équation $2y' + y = 30$ permettra une bonne modélisation.
**1.** Déterminer la fonction $f$.
**2.** On considère que l'approximation des bénéfices par $f$ est satisfaisante si la somme des carrés des écarts entre les valeurs observées $y_i$ et les valeurs approchées $x_i$ est inférieure à 0,5. L'approximation par $f$ est-elle satisfaisante ? (Le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice constituera une justification acceptable pour cette question.)
**3.** En considérant toujours ce modèle :
**a)** En quelle année le bénéfice évalué au 1er janvier dépassera-t-il 29 800 euros ?
**b)** Ce bénéfice atteindra-t-il 30 000 euros ? Justifier.

## 90 Carbone 14

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 (élément radioactif) provenant des rayons cosmiques, qui est constamment renouvelé et qui se maintient à la valeur de 15,3 unités. À leur mort, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre. On note $f(t)$ la concentration en carbone 14 présent dans un organisme à l'instant $t$ après sa mort ($t$ exprimé en milliers d'années).

**A ▸** On admet que $f$ est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}124y$ (E).
**1.** Résoudre l'équation différentielle (E).
**2.** Déterminer la solution $f$ de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 15{,}3$.

**B ▸** On admet que la fonction $f$ est définie par $f(t) = 15{,}3\mathrm{e}^{-0{,}124t}$ sur $[0\,;+\infty[$.
**1.** Déterminer les variations de $f$ sur $[0\,;+\infty[$.
**2.** Déterminer la limite de $f$ au voisinage de l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

**C ▸** On rappelle que la fonction $f$ donnée dans la partie **B** donne la concentration en carbone 14 dans un organisme après sa mort en fonction de $t$ (en milliers d'années).
**1.** Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration en carbone 14 égale à 7,27 unités. Justifier que l'on peut estimer l'âge de ces fragments d'os à 6 000 ans.
**2.** Lorsque la concentration en carbone 14 d'un organisme devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale on ne peut pas dater raisonnablement à l'aide du carbone 14.
Déterminer l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté à l'aide du carbone 14.

# Exercices bilan

## 91 Décharge d'un condensateur physique

Un condensateur de capacité $C$ farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance $R$ ohms.
En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de $t$ secondes aux bornes du condensateur, $u$ est alors une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{RC}y = 0$.

**1.** Résoudre l'équation et en déduire la fonction $u$.
**2.** Dans cette question $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$. Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-t-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

## 92 Loi de refroidissement de Newton Chimie

Un corps est placé dans une enceinte dont on maintient la température constante égale à 20 °C. À l'instant initial $t = 0$ sa température est égale à 70 °C et, après 5 minutes, elle n'est plus que de 60 °C. La température du corps (exprimée en degré Celsius) est une fonction $T$ du temps (exprimé en minutes) définie sur $[0\,;+\infty[$ ; la loi de refroidissement de Newton énonce que $T'$ est proportionnelle à $T - 20$.

**1.** Justifier que la fonction $t \mapsto T(t) - 20$ est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ky$, puis déterminer la fonction $T$.
**2.** Au degré près, à quelle température sera le corps après une demi-heure ? À la minute près, au bout de combien de temps aura-t-il une température de 40 °C ?

## 93 Écran plat

On cherche à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.
Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année $x$. On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et $g$ est une solution qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$.

**1.** On considère une fonction $y$ qui ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.
**a)** Montrer que $y$ est solution de (E) si et seulement si $z$ est solution de l'équation différentielle $(E_1)$ : $z' = \frac{-1}{2}z + \frac{1}{20}$.
**b)** Résoudre l'équation $(E_1)$ et en déduire les solutions de l'équation $(E)$.
**2.** Montrer que $g$ est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9e^{\frac{-1}{2}x} + 1}$.
**3.** Étudier les variations de $g$ sur $[0\,;+\infty[$.
**4.** Calculer la limite de $g$ en $+\infty$ et interpréter le résultat.
**5.** En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Bac S, Pondichery, novembre 2008.

## 94 Épidémie Algo

On étudie la progression d'une épidémie de grippe dans une population pendant 30 jours. Au début, on constate que 0,01 % de la population est contaminé. Pour $t$ appartenant à $[0\,;30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après $t$ jours. On a donc $y(0) = 0{,}01$. On admet que la fonction $y$ ainsi définie sur $[0\,;30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie (E) : $y' = 0{,}05y(10 - y)$.

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;30]$ par $f = \frac{1}{y}$.
Démontrer que $y$ est solution de (E) si et seulement si $f$ satisfait aux conditions $f(0) = 100$ et $f' = -0{,}5f + 0{,}05$.
**2. a)** Déterminer une expression de $f$, puis en déduire celle de la fonction $y$.
**b)** À quoi sert l'algorithme suivant dans le contexte de cette étude ?

```
from math import*
def epi(x) :
    return(1/(99.9*exp(-0.5*x)+0.1))
x=0
while epi(x)<5 :
    x=x+1
print(x)
```

**3. a)** Calculer le pourcentage (arrondi à l'unité) de la population infectée après 30 jours.
**b)** Étudier la limite de $y$ en $+\infty$ et l'interpréter.

## 95 Équation $y' = ay + \varphi$ où $\varphi$ est une fonction

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

**A ▸** Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.
**1.** Résoudre l'équation différentielle (E′) : $y' + 2y = 0$.
**2.** En déduire que la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E′).
**3.** Vérifier que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
**4.** En remarquant que $f = g + h$, montrer que $f$ est une solution de (E).

**B ▸** On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.
**1.** Montrer que pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ on a $(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.
**2.** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ puis en $-\infty$.
**3.** Étudier les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.
**4.** Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.

## Déterminer la primitive d'une fonction

### Fonctions usuelles

| Fonction $f$ | Primitive $F$ avec $k$ réel |
|---|---|
| $f(x) = a$ | $F(x) = ax + k$ |
| $f(x) = x^n$, $n$ entier négatif non nul sauf $-1$ | $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x + k$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = \ln\lvert x\rvert + k$ |

### Fonctions composées

| Forme de la fonction | Primitive à une constante près |
|---|---|
| $u'u$ | $\frac{u^2}{2}$ |
| $\frac{u'}{u}$ avec $u \neq 0$ | $\ln\lvert u\rvert$ |
| $u'e^u$ | $e^u$ |

## Résoudre une équation différentielle

### $y' = f$

Trouver une solution revient à trouver une primitive de $f$.

### $y' = ay$

Les solutions sont de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$, avec $K$ réel.

### $y' = ay + b$

- Une solution particulière constante est de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a}$.
- Les solutions générales sont de la forme $x \mapsto \frac{-b}{a} + Ke^{ax}$, avec $K$ réel.

# Préparer le BAC Je me teste

## Je dois être capable de... — Parcours d'exercices

| Je dois être capable de... | Méthode | Parcours d'exercices |
|---|---|---|
| ▶ Montrer qu'une fonction $y$ est solution d'une équation différentielle | Méthode 1 | 1, 2, 27, 28 |
| ▶ Déterminer une primitive | Méthode 2, Méthode 3, Méthode 4 | 3, 5, 7, 36, 38, 42, 48 |
| ▶ Résoudre les équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$ | Méthode 5, Méthode 6 | 9 à 12, 55, 62 |
| ▶ Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$ | Méthode 7 | 13, 14, 79, 80 |
| ▶ Modéliser des phénomènes | Méthode 8 | 15, 16, 67, 68 |

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c05-08

## QCM

**Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| **96** La fonction $h$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln(x)$ est une primitive de : | $x(1 + 2\ln(x))$ | $x(1 + \ln(x))$ | $x - 2x\ln(x)$ | $2x\ln(x)$ |
| **97** La solution $f$ de l'équation différentielle $y' = 2y - 6$ et qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est : | $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ | $f(x) = -2e^{2x} + 3$ | $f(x) = -2e^{-2x} - 3$ | $f(x) = -2e^{2x} - 3$ |
| **98** La fonction $x \mapsto -3e^{-x}$ est solution de l'équation différentielle : | $y' = y$ | $y' + y = 0$ | $y' = 3y$ | $y' + 3y = 0$ |
| **99** On considère l'équation (E1) : $y' = 2 - 2y$. On appelle $u$ la fonction solution de (E1) telle que $u(0) = 0$. On a alors $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ égal à : | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $1$ | $-1$ |
| Pour les exercices **100** et **101**, on considère l'équation (E2) : $y' = -y + 2$. On appelle $f$ la fonction solution de (E2) telle que $f(\ln 2) = 1$. | | | | |
| **100** La limite de $f$ en $+\infty$ est égale à : | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $2$ |
| **101** La courbe représentative de $f$ admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur : | $2$ | $-2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |
| Pour les exercices **102** et **103**, on considère l'équation (E3) : $2y' + y = 10$. On appelle $g$ la fonction solution de (E3) telle que $g(2) = 11$. | | | | |
| **102** La limite de $g$ en $-\infty$ est égale à : | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ | $10$ |
| **103** La courbe représentative de $g$ admet au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation : | $y = -x$ | $y = x$ | $y = \frac{1}{2}x$ | $y = \frac{-1}{2}x$ |

CONTRÔLE CONTINU

# Préparer le BAC — Je révise

## 104 Culture de microbes — SVT

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant $t$, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction $y$ à valeurs réelles de la variable $t$. La vitesse de prolifération à l'instant $t$ du nombre des microbes est la dérivée $y'$ de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où $k$ est un coefficient réel strictement positif. On désigne par $N$ le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

**1.** Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.

**2.** Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer, en fonction de $N$, le nombre de microbes au bout de trois heures.

**3.** Quelle est la valeur de $N$ sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

Méthode 5 p. 121

## 105 Primitives et équation $y' = ay + b$

Choisir la bonne réponse.

**1.** On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ où $y$ désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $f$ l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 5$.
La valeur de $f(2)$ est :

- **a** $2e^{-4} + 3$
- **b** $2e^{4} + 3$
- **c** $5e^{-4} + 3$
- **d** $5e^{4} + 3$

**2.** On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$. La primitive $F$ de $f$ sur $]0\,;+\infty[$ telle que $F(1) = 3$ est donnée par :

- **a** $F(x) = x\ln(x) - 2x + 5$
- **b** $F(x) = \dfrac{3}{x}$
- **c** $F(x) = x\ln(x) + 3$
- **d** $F(x) = x\ln(x) - x + 4$

**3.** On considère l'équation différentielle $y' + 7y = 0$, où $y$ désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution $f$ de cette équation telle que $f(0) = 9$ est la fonction de la variable $x$ vérifiant pour tout réel $x$ :

- **a** $f(x) = 9e^{7x}$
- **b** $f(x) = 9e^{-7x}$
- **c** $f(x) = -9e^{7x}$
- **d** $f(x) = -9e^{-7x}$

**4.** On considère la fonction $f(x) = 80 - 20e^{0,025x}$.
La primitive de $f$ qui s'annule en 0 est :

- **a** $F(x) = 800(1 + x - e^{0,025x})$
- **b** $F(x) = 800(1 - x - e^{0,025x})$
- **c** $F(x) = 800\left(1 + \dfrac{x}{10} - e^{0,025x}\right)$
- **d** $F(x) = 800\left(1 - \dfrac{x}{10} - e^{0,025x}\right)$

Méthode 6 p. 121

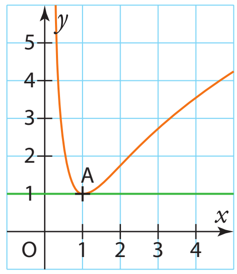
D'après Bac STI2D, France métropolitaine, 2018.

## 106 Lecture graphique

On considère une fonction $f$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{a}{x} + b + 4\ln x$ où $a$ et $b$ sont des réels à déterminer.

On donne ci-contre sa courbe représentative dans un repère orthonormé ainsi que la tangente au point d'abscisse 1.




**1.** Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.

**2.** Vérifier que le choix de $a = 4$ et $b = -3$ répond au problème posé.

**3.** Soit la fonction $F$ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$F(x) = (4x + 4)\ln(x) - 7x$.
Montrer que $F$ est une primitive de $f$.

Méthode 6 p. 121

## 107 Loi de Newton

La loi de Newton dit que la vitesse de refroidissement d'un objet est proportionnelle à la différence entre sa température $T$ et la température ambiante $T_0$ (supposée constante), ce qui se traduit par l'équation $T' = \alpha(T - T_0)$, où $\alpha$ est appelé constante de proportionnalité et est déterminée par des expériences en laboratoire. Les températures sont exprimées en dégrés Celsius. Si la température initiale est 100 °C, alors on établit que $\alpha = -0,1$.
La pièce est supposée maintenue à une température de 20 °C.

**1.** Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $T$ dans cette situation.

**2. a)** Vérifier que la fonction constante égale à 20 est solution de l'équation.
**b)** En déduire la solution $T$.

Méthode 6 p. 121

## 108 Équation logistique

Un biologiste observe la croissante d'une population de bactéries en milieu fermé. La population initiale est de 100 bactéries. La capacité maximale du milieu est de 1 000 bactéries.
Soit $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant $t$ (exprimé en heures).
Les observations faites conduisent à modéliser la situation par l'équation différentielle :

$$N'(t) = 0,07N(t)(1 - 10^{-3}\,N(t)).$$

On suppose que, pour tout $t$, $N(t)$ est non nul.

On pose $P(t) = \dfrac{1}{N(t)}$.

**1.** Montrer que $P$ est solution de l'équation différentielle $y' = -0,07y + 7 \times 10^{-5}$.

**2.** En déduire l'expression de $P(t)$ puis celle de $N(t)$.

Méthode 8 p. 123