Exercices calculs et automatismes

18 Proprétés algébriques

Pour chaque question, choisir la bonne réponse.

1. $\ln\sqrt{2}+\ln 8-5\ln 4=$

a $-5\ln 2$ **b** $-9\ln 2$ **c** $-\frac{11}{2}\ln 2$ **d** $-\frac{13}{2}\ln 2$

2. Soit la fonction f définie sur D_f par :

$$f(x)=\ln(6x+2)+\ln(6x-2)-2\ln 2.$$

Alors $f(x)=$

a $2\ln(6x)-2\ln 2$ **b** $\ln(12x-4)$
c $\ln(9x^2-1)$ **d** $\ln(36x^2-1)$

3. Soit l'équation $\ln(4x)=\ln(x-1)$:

a $-\frac{1}{3}$ est la solution.
b $\ln\left(\frac{4x}{x-1}\right)=0$ est une équation équivalente
c L'équation n'a pas de solution.
d $4x=x-1$ est une équation équivalente.

4. L'inéquation $\ln(-x)\leqslant 1$ a pour ensemble de solutions :

a $[-e\,;+\infty[$ **b** $[-e\,;0[$
c $\varnothing$ **d** $[-1\,;0[$

19 Dérivées

1. Soit $f(x)=3\ln x-x^2$ définie sur $]0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit $g(x)=\ln(4-2x)$ définie sur $]-\infty\,;2[$. Calculer $g'(x)$.

20 Python

Algo

1. Que représente la valeur envoyée par la fonction **Python** suivante ?

```
from math import*
def f(x) :
    if 4-2*x<=0 :
        return "Ce nombre n'a pas
                d'image par f"
    else :
        return log(4-2*x)
```

Remarque Sur Python, une fois la bibliothèque `math` importée, `log(x)` donne $\ln(x)$.

2. Compléter la fonction **Python** qui :
– prend en entrée un nombre ;
– renvoie si le nombre est solution ou non de l'inéquation $\ln(x)+x-5<0$.

```
def solution_equa(x) :
    if x<=0 :
        return
    else... :
        if... :
            return "Ce nombre est
        solution de l'équation."
        else :
            return "Ce nombre
    n'est pas solution de l'équation."
```

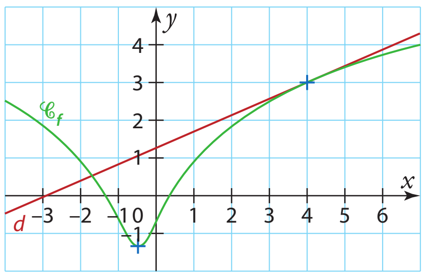
21 Fonction ln

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) L'expression $\ln(x^2)$ est positive pour tout $x\in\mathbb{R}$.
b) $\ln(12)=\ln(10)\times\ln(2)$
c) La fonction $x\mapsto\ln(-x)$ est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
d) La suite $u_n=\ln(3^n)$, avec $n\in\mathbb{N}$, est une suite géométrique de raison 3.
e) $\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)-e^{-\ln x}=0$
f) La fonction f définie par $f(x)=-x^2+2x+4\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ est toujours en dessous de sa tangente T_1 (tangente au point d'abscisse 1) sur $]0\,;+\infty[$.

22 Lectures graphiques

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction du type $f(x)=\ln(ax^2+bx+c)$ avec a, b et c trois réels et la tangente d à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) $f'(4)\approx 3$
b) Sur $[-4\,;6]$, il existe deux valeurs de x pour lesquelles la tangente à la courbe a un coefficient directeur nul.
c) Sur $[-4\,;6]$, $f'(x)>0$ pour $x>-\frac{1}{2}$.
d) Sur $[0\,;6]$, $f''(x)<0$.

23 Équations, inéquations

1. Soit l'équation $\ln(2x+1)-\ln(4-x)=\ln(2x)$, quelles sont les étapes nécessaires à la résolution d'une telle équation ?

2. Pour résoudre une équation contenant $(\ln x)^2$ et $\ln x$, comme par exemple l'équation $(\ln x)^2+\ln x-2=0$, quelles sont les étapes nécessaires ?

3. Soit $f(x)=2\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(4x+4)$.
Comment étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$?

24 Tangente

1. Soit la fonction $f : x\mapsto 2x\ln x-3$ définie sur $]0\,;+\infty[$.
Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

2. Soit la fonction $g : x\mapsto\ln(x^2-x+1)$.
a) Pourquoi g est-elle définie sur $\mathbb{R}$?
b) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Exercices d'application

Équations/inéquations du type $\ln u \leqslant a$ ou $e^u \leqslant a$

Méthode 1 p. 95

25 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=0$ **b)** $\ln(x-\mathrm{e})=1$

c) $2\ln(x)+1=-3$ **d)** $\mathrm{e}^{5-2x}=2$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(1-x)>0$ **b)** $\ln(3-2x)\leqslant 1$

c) $3\mathrm{e}^x-1<8$ **d)** $\mathrm{e}^{2x}-3\mathrm{e}^x\geqslant 0$

26 Résoudre les équations suivantes.

a) $5-\ln x=2$ **b)** $\mathrm{e}^{4x+1}=5$

c) $\ln(2x+\mathrm{e})=1$ **d)** $\ln(x^2+x-6)=0$

27 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln\left(\dfrac{5x+1}{x-2}\right)\leqslant 0$ **b)** $\ln(x^2+2x)-1>0$

c) $6\mathrm{e}^x-1\geqslant 3-4\mathrm{e}^x$ **d)** $3\mathrm{e}^{2x}-9\mathrm{e}^x<0$

28 On veut résoudre l'équation :

$$\ln(x)^2+4\ln\left(\frac{1}{x}\right)-5=0 \text{ (E)}.$$

1. On pose $X=\ln x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E′).

2. Résoudre (E′).

3. En déduire les solutions de (E).

29 On veut résoudre l'équation $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x=8$ (E).

1. On pose $X=\mathrm{e}^x$, montrer que l'équation revient alors à résoudre $X^2-4X-5=0$ (E′).

2. Résoudre (E′).

3. En déduire les solutions de (E).

Équations/inéquations avec $\ln u$

Méthode 2 p. 95

30 **1.** Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(3x-6)=\ln(4-x)$

b) $\ln(x)+\ln(8-x)=\ln(12)$

c) $\ln(2x)-\ln(x+1)=\ln(x-5)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(4x-2)+\ln(5)<1-\ln 2$

b) $\ln(5-x)\geqslant\ln(x-1)$

c) $\ln(x-2)+\ln(x+2)\geqslant 0$

31 Résoudre les équations suivantes.

a) $\ln(2x-1)=2\ln x$ **b)** $\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln(4-2x)$

32 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\ln(x^2-4x+4)-\ln(x-2)<\ln(8-x)$

b) $\ln(2x+4)+\ln(1-x)-\ln 2\geqslant\ln(\mathrm{e}^{-x})-1$

33 Soit les fonctions f et g définies sur $]2\,;\,4[$ par $f: x\mapsto\ln(3x-6)$ et $g: x\mapsto 2\ln(4-x)$.

1. Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent-elles ?

2. Quelle est la position relative de ces deux courbes ?

Propriétés algébriques de ln

Méthode 3 p. 97

34 **1.** Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif.

a) $2\ln 5-\ln 15$

b) $-\ln 3+4\ln 2-\ln 5$

2. Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 5$.

a) $4\ln 5+\ln 25-3\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

b) $\ln 125-\dfrac{1}{2}\ln 25+\ln\left(\dfrac{1}{25}\right)-4\ln\sqrt{5}$

35 **1.** Exprimer sous la forme $\ln a$, avec a un réel strictement positif, le nombre $3\ln 2-\ln 9+\ln 5$.

2. Exprimer en fonction de $\ln 2$ le nombre $\ln 8-3\ln 4+\ln\sqrt{2}$.

36 Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $\mathrm{e}^{2\ln 3+\ln 4}$ **b)** $\mathrm{e}^{3\ln 2-\ln 4}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\ln 6+1}}{\mathrm{e}^{\ln 9+2}}$ **d)** $\dfrac{\mathrm{e}^{2\ln 5+\ln 3}}{\mathrm{e}^{2\ln 3}}$

37 Justifier les égalités suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 3}+\mathrm{e}^{2\ln 7}=76$

b) $\mathrm{e}^{5\ln 3}\times\mathrm{e}^{4\ln 9}=3^{13}$

c) $\ln(1+\mathrm{e}^5)+\ln\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}}\right)=5$

Inéquations du type $q^n<a$

Méthode 4 p. 97

38 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<10^{-4}$ **b)** $\left(\dfrac{9}{7}\right)^n\geqslant 10^6$

c) $1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999$ **d)** $0{,}004>\left(\dfrac{8}{9}\right)^{2n}$

39 Dans chaque cas déterminer les entiers naturels n tels que :

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\leqslant 0{,}001$ **b)** $1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\geqslant 0{,}999999$

c) $1{,}2^{2n}>10^5$ **d)** $0{,}02>\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$

40 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=\dfrac{3}{2}$.

À partir de quel rang n les termes de la suite sont-ils strictement supérieurs à 1 million ?

41 On tire successivement, et avec remise, n boules d'une urne contenant 5 boules blanches et 25 boules noires. Combien faut-il effectuer de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999 ?

42 On place 2 500 € à intérêts composés à un taux annuel de 1,75 %. Combien d'années faudra-t-il pour doubler son capital ?

Étude de fonction avec ln

Méthode 5 p. 99

43 Calculer la dérivée des fonctions suivantes sans se soucier de l'ensemble de définition ou de dérivabilité.

a) $f(x) = (\ln x + 3)(x - 2)$ **b)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{3\ln x + 1}$

c) $f(x) = (\ln(x) - 2x + 1)^3$ **d)** $f(x) = \sqrt{3x - x\ln(x)}$

44 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + 1$.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
3. a) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ en 1.
b) Montrer que $f(x) - (2x - 1) = 2u(x)$ avec $u(x) = \ln x - x + 1$.
c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_1.

45 Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = -3\ln x + 2x - 4.$$
1. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. En $+\infty$, on vérifiera que $g(x) = x\left(-\dfrac{3\ln x}{x} + 2\right) - 4$ et on utilisera $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. Déterminer le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer l'équation de la tangente T_e à $\mathscr{C}_g$ en e, puis en déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_e.

46 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - \dfrac{4}{x}$.
1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

47 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x + e^{-1}$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
3. Justifier alors que pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$ $x\ln x \geqslant -\dfrac{1}{e}$.

Dérivées de fonctions du type ln *u*

Méthode 6 p. 99

48 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln(8x - 4)$ **b)** $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2x+4}\right)$ **d)** $f(x) = \ln(e^x - 1)$

49 Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \ln\sqrt{4 - x}$ **b)** $f(x) = \ln(\ln 2x)$

c) $f(x) = x^2\ln(e^x + 1)$ **d)** $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$

e) $f(x) = \ln\left((4x - 1)^2\right)$ **f)** $f(x) = \left(\ln(x^2 - 1)\right)^2$

ln *x* et fonctions auxiliaires

Méthode 7 p. 100

50 Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}.$$
1. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;+\infty[$.
b) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
b) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

51 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = (x + 1)\ln x.$$
1. Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x\ln x + x + 1$.
a) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $]0\,;+\infty[$.
b) En déduire le signe de h sur $]0\,;+\infty[$.
2. a) Montrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x}$.
b) En déduire le sens de variation de g sur $]0\,;+\infty[$.
c) Dresser le tableau de variations de g en y incluant les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que la valeur en laquelle la fonction g s'annule.

Étude de fonctions avec ln *u*

Méthode 8 p. 101

52 Pour chacune des fonctions ci-dessous :
1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Étudier le sens de variation de f.

a) $f(x) = \ln(3 - 4x)$; $\mathrm{I} = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{4}\right[$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 1}\right)$; $\mathrm{I} =]-1\,;2[$

53 Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(-x^2 + 2x + 15)$.
1. Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de g.
2. Étudier le sens de variation de g sur son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g au point d'abscisse 0.

54 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(2x + 1)$ et $g(x) = \ln(4 - x)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;4\right[$.

55 Soit f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ et $g(x) = \ln(-3x + 15)$.
1. Étudier le sens de variation des fonctions f et g.
2. Étudier la position relative des deux courbes sur $]-1\,;5[$.

Exercices d'entraînement

La fonction ln

56 Soit la fonction g définie sur $]0\,;\mathrm{e}[\,\cup\,]\mathrm{e}\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\ln(x)+1}{\ln(x)-1}.$$

1. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition de g.

2. a) Montrer que $g'(x)=-\dfrac{2}{x(\ln x-1)^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de g sur son ensemble de définition.

57 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2(\ln(x))^2-\ln x-1.$$

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

2. a) Résoudre l'équation $2X^2-X-1=0$.

b) En déduire que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions qui sont e et $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

3. a) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\,;\mathrm{e}\right]$.

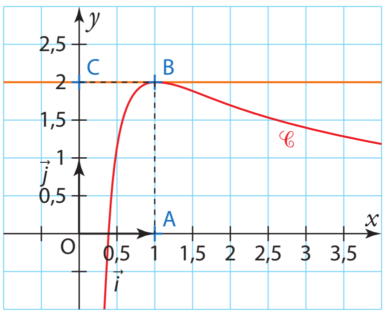
b) En déduire que l'équation $f(x)=-1$ admet exactement deux solutions α et β sur cet intervalle.

c) Déterminer les valeurs exactes de α et β en résolvant directement l'équation $f(x)=-1$.

4. Justifier que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, au point d'abscisse e est $T_\mathrm{e}:y=\dfrac{3}{\mathrm{e}}x-3$.

58 Algo

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

– les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;

– la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x)=\dfrac{a+b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire que $f(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}$.

2. a) Justifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

3. a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;1]$.

b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un réel β de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$.
Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

4. On donne l'algorithme ci-dessous écrit en langage **Python**.

```
from math import*
def f(x):
      image=2/x+2*math.log(x)/x
      return image
a=1
b=1
while b-a>0.1:
      m=1/2*(a+b)
      if f(m)<1 :
            a=m
      else :
            b=m
print(a,b)
```

a) Quel est le rôle de la fonction Python f ?

b) Quel est le rôle de ce programme ?

c) Quelle instruction Python faudrait-il modifier afin que ce programme affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} ?

D'après Bac S, 2013.

59 SES

On peut lire sur le site France-inflation.com un tableau de l'inflation des prix en France.

2011	2,1 %
2010	1,5 %
2009	0,1 %
2008	2,8 %
2007	1,5 %
2006	1,6 %
2005	1,9 %
2004	2,1 %
2003	2,1 %
2002	2 %

1. Le passage à l'Euro a eu lieu en 2002. À partir de 2002, quel est le pourcentage d'augmentation totale des prix sur 10 ans ?

2. On appelle t le pourcentage d'augmentation par année qui conduirait sur 10 ans à la même augmentation totale. Déterminer t à 10^{-2} près.

60 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2}.$$

On note Γ sa courbe représentative.

A ▶ Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = -2\ln x - xe + 1.$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g.

3. Montrer que dans $[0{,}5\,;1]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée α. Déterminer un encadrement de α à 0,1 près.

4. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

B ▶ Étude de la fonction f

1. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ puis étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$.

3. Donner le tableau de variations de f.

4. Tracer Γ.

Fonctions du type ln *u*

61 Soit la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1 - 2\ln(x+1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

2. Montrer qu'il existe un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente.

3. Étudier la position de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

62 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a, b, et c sont trois réels.

Son tableau de variations est :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$-$		0		$+$		
Variations de f	$+\infty$	↘	$\ln 2$	↘	$\ln\left(\frac{7}{8}\right)$	↗	0	↗	$+\infty$

1. En utilisant les données du tableau, montrer que $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. a) Calculer $f'(x)$.

b) Vérifier que les variations et les informations portées sur le tableau ci-dessus sont exactes.

Modélisations

63 SVT Dans un bouillon de culture, on observe, au temps $t = 0$, la présence de 10 000 bactéries.

Ce nombre est multiplié par 1,5 toutes les heures. On modélise la situation à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec u_n représentant le nombre de bactéries présentes dans le bouillon de culture n heures après la première observation.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le 1er terme u_0 et la raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. En déduire au bout de combien d'heures le nombre de bactéries aura dépassé le million.

64 Un capital de 1 200 € est placé à un taux annuel composé de 2 % au 1er janvier 2020.

On modélise la situation par une suite (u_n) telle que u_n représente le capital à l'année $2020 + n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le 1er terme et la raison.

2. Au bout de combien d'années le capital aura-t-il triplé ?

65 L'**intensité sonore** totale I de plusieurs ondes d'intensités I_1 et I_2 correspond à la somme de chacune des intensités sonores : $I = I_1 + I_2$. L'amplitude de l'intervalle de l'intensité sonore perceptible étant de l'ordre de 10^{13} (le seuil d'audibilité étant de $10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$), on utilise plutôt une échelle de grandeur plus simple et plus significative qui est le **niveau d'intensité sonore**.

Cette grandeur, notée L, s'exprime en décibels (dB) et est définie par $L = 10 \times \log\dfrac{I}{I_0}$ avec I l'intensité en $\mathrm{W\cdot m^{-2}}$ et $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

Remarque La notation log correspond au logarithme décimal. Cette fonction possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien (ln).

1. On veut chercher à montrer que si on quadruple l'intensité sonore, le niveau sonore quant à lui n'est pas quadruplé.

On pose $I = 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$; $L = 10 \times \log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right)$ dB le niveau sonore associé, k le coefficient par lequel on multiplie l'intensité sonore et L' le niveau sonore associé à l'intensité $k \times I$. On suppose que l'intensité sonore associée à chaque chanteur est la même et vaut I, que le niveau d'intensité sonore associé à chacun d'entre eux est L et on pose L' le niveau sonore associé à l'ensemble du groupe.

a) Vérifier que $L' = 10 \times \log\dfrac{4I}{I_0}$.

b) Montrer que $L' \approx 6 + L$.

Remarque Quadrupler l'intensité sonore revient à augmenter de 6 dB le niveau sonore et non à le multiplier par 4.

2. Démontrer de la même façon que si l'on divise par 5 l'intensité sonore, cela revient à baisser de 7 dB le niveau sonore.

Exercices bilan

66 Étude d'une fonction ln

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la limite de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire l'existence d'asymptotes pour la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

3. Résoudre l'équation $f(x)=0$.

4. Construire $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

67 Avec une fonction auxiliaire

A ▶ Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$u(x)=\ln(x)+x-3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

B ▶ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)[\ln(x)-2]+2.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel $x\in\,]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

C ▶ Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}'$ celle de la fonction g définie par $g(x)=\ln(x)$.

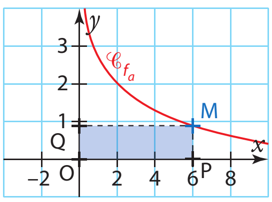
1. Montrer que, pour tout réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\dfrac{2-\ln(x)}{x}$.

2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.

D'après Bac S, Amérique du Nord, 2015.

68 Calcul d'aire et étude de ln

Soit f_a la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_a(x)=a-\ln\left(\dfrac{x}{a}\right)$ avec $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\mathscr{C}_{f_a}$ la courbe représentative de f_a, tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

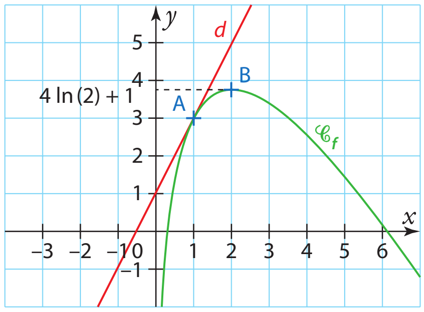


1. À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_{f_a}$ on associe le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q, projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Déterminer les coordonnées de M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.

2. Existe-t-il plusieurs valeurs de a pour lesquelles cette aire maximale soit atteinte en M ayant pour abscisse a ?

69 Paramètres et fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous et d la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.



L'expression de f est du type $f(x)=a\ln x+bx+c$ avec a, b, c trois réels.

A ▶ 1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$; $f'(1)$ et $f(2)$.

2. En déduire l'expression de f.

3. Résoudre graphiquement $f(x)\geqslant 3$.

B ▶ On admettra pour la suite de l'exercice que :

$$f(x)=4\ln x-2x+5.$$

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=2\ln x-x+1$.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.

2. En déduire le tableau de variations de g.

3. Vérifier que 1 est solution de l'équation $g(x)=0$.

4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

On donnera une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de g.

6. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant 3$.

70 ln u et tangente

f est une fonction définie sur $]-5\,;5[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{5-x}{5+x}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

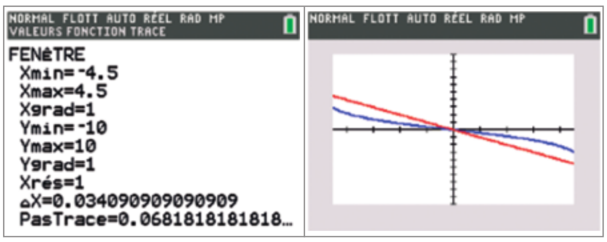
1. Pour tout réel $x\in\,]-5\,;5[$, montrer que $f(-x)=-f(x)$. Que peut-on en déduire quant aux éléments de symétrie de $\mathscr{C}$?

2. a) Déterminer la limite de f en -5. Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

b) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]-5\,;0]$.

c) Montrer que la droite d d'équation $y=-0{,}4x$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. La courbe $\mathscr{C}$ et la droite d ont été tracées à l'aide de la calculatrice.



a) Quelle conjecture peut-on faire quant à la position de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente d ?

b) Démontrer cette conjecture.

Préparer le BAC L'essentiel

Propriétés immédiates

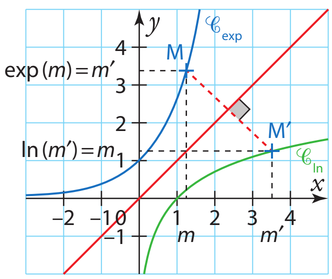
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
- $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

Propriétés algébriques

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ avec $a \neq 0$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ avec $b \neq 0$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$ avec $a \geqslant 0$
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$ avec $n \in \mathbb{N}$

Fonction logarithme népérien

$f(x) = \ln(x)$



Dérivées

- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ avec $x \neq 0$
- $(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) > 0$

Limites

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Variations

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Signes

- Pour tout $0 < x < 1$: $\ln x < 0$.
- Pour tout $x > 1$: $\ln x > 0$.

Équations

- $\ln x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^a$
- $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- $a^n = b$ avec a et b positifs différents de 1 $\Leftrightarrow n = \frac{\ln b}{\ln a}$

Inéquations

- $\ln x \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^a$
- $\ln x \geqslant \ln y \Leftrightarrow x \geqslant y$
- $a^n \geqslant b$ avec a et b positifs $\Leftrightarrow n\ln a \geqslant \ln b$

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u \leqslant a$ ou $e^u \leqslant a$	Méthode 1	1, 2, 25, 26
▶ Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u = \ln v$ et $\ln u \leqslant \ln v$	Méthode 2	3, 4, 30, 31
▶ Manipuler les propriétés algébriques de ln	Méthode 3	5, 6, 34, 35
▶ Résoudre des inéquations du type $q^n < a$	Méthode 4	7, 8, 38, 39
▶ Étudier des fonctions utilisant ln	Méthode 5	9, 10, 43, 44
▶ Dériver et étudier des fonctions avec $\ln u$	Méthode 6, Méthode 8	11, 12, 15, 16, 48, 49, 52, 53
▶ Étudier des fonctions contenant $\ln x$ à l'aide de fonctions auxiliaires	Méthode 7	13, 14, 50, 51

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c04-07

QCM

Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonnes réponse(s).

	A	B	C	D
71 L'écriture $\ln\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\ln\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ se simplifie sous la forme :	$\ln\left(2\sqrt{5}\right)$	$2\ln\left(\sqrt{5}\right)$	$\ln 3$	$\dfrac{\ln\left(\sqrt{5}\right)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}+\ln\left(\sqrt{5}\right) \square \ln\left(\sqrt{2}\right)$
72 L'équation $\ln(x-1)-\ln(2-x)=\ln 2+\ln x$:	est équivalente à l'équation $\dfrac{x-1}{2-x}=2x$	n'admet aucune solution	admet une seule solution	admet deux solutions
73 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x)=\ln((2x+4)^2)$. $f'(x)=$	$\dfrac{2}{x+4}$	$\dfrac{2}{x+2}$	$\ln(4(2x+4))$	$\dfrac{1}{(x+2)\ln(2x+4)}$
74 Soit la fonction g définie par $g(x)=\ln(\ln(1-x))$ et D_g son ensemble de définition.	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;1[$ et $g'(x)=\dfrac{-1}{(x-1)\ln(1-x)}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{1-x}$	$D_g=]-\infty\,;0[$ et $g'(x)=\dfrac{1}{(x-1)\ln(1-x)}$
75 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=5x\ln x-5x$ et T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=\dfrac{5}{x}-5$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1.	$f'(x)=5\ln x$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T_1 sur $]1\,;+\infty[$.
76 La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$ est :	toujours croissante sur $]0\,;+\infty[$	décroissante sur $]0\,;1[$ et croissante sur $]1\,;+\infty[$	croissante sur $\left]\dfrac{1}{\sqrt{e}}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$	toujours décroissante sur $]0\,;+\infty[$

77 Positions relatives de courbes

Soit les fonctions f, g et h définies sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln x + 3$; $g(x) = (\ln x)^2$ et $h(x)=2(\ln x)^2 - \ln x$.

1. Pour quelles valeurs de x les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ sont-ils au-dessus de l'axe des abscisses ?

2. Montrer que $g(x) - f(x) = (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 3)$ et en déduire les valeurs de x pour lesquelles les points de $\mathscr{C}_g$ sont au-dessus de $\mathscr{C}_f$.

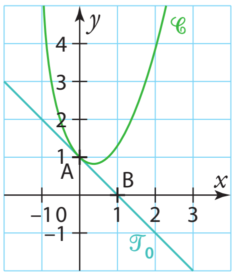
3. a) Étudier le sens de variation de h.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses.

Méthode 3 p. 97 Méthode 5 p. 99

78 Retrouver l'expression de la fonction

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = ax^2 + bx + c - \ln(x+1)$ avec a, b et c des réels. La droite $\mathscr{T}_0$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A(0 ; 1) et passe par B(1 ; 0).



1. À partir des informations données, et sachant que $f'(1) = \dfrac{3}{2}$, montrer que $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1)$.

2. Déterminer le sens de variation de f et la limite en -1. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui soient perpendiculaires à $\mathscr{T}_0$? Justifier la réponse par un calcul.

4. Soit la fonction h définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $h(x) = x^2 + 1 - \ln(x^2 + 6x + 5)$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

Méthode 2 p. 95 Méthode 6 p. 99 Méthode 8 p. 101

79 Pourcentages, ln et suites

La responsable d'un aquarium public constate qu'en absence d'action particulière la population d'une espèce de poissons augmente de 20 % par an. Pour démarrer un nouveau bassin, elle décide de prélever 28 poissons à la fin de chaque année. La situation est modélisée par une suite (u_n) de terme initial $u_0 = 150$, le terme u_n donnant une estimation du nombre de poissons le 1er janvier de l'année 2018 + n.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 28$.

2. On définit la suite (w_n) par $w_n = u_n - 140$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Après avoir montré que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 1,2, en déduire que $u_n = 10 \times 1{,}2^n + 140$.

b) Sachant que l'aquarium ne peut contenir plus de 200 poissons, la responsable doit-elle prévoir l'achat d'un autre aquarium dans les années à venir ? Si oui, en quelle année ?

Méthode 4 p. 97

80 Probabilités et ln

Algo

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits en verre, qu'il demande de rapporter une fois vide. On suppose que le nombre de clients reste constant. Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

– à l'issue de la 1re semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;

– si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,95 ;

– si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille de son panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier n on nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ». On note $r_n = P(R_n)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0{,}75r_n + 0{,}2$.

Coup de pouce Penser à utiliser un arbre pondéré.

2. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0{,}1 \times 0{,}75^{n-1} + 0{,}8$.

a) Écrire un algorithme qui permet de déterminer le plus petit rang n à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à 0,80001.

b) Retrouver ce résultat par le calcul et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

Méthode 4 p. 97

81 Avec une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2\ln x}{2x}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{5x^2 - 2 + 2\ln x}{2x^2}.$$

a) Calculer la limite de g aux bornes de son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur $]0\ ;+\infty[$.

c) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$ et que $\alpha \in]0{,}5\ ;1[$.

d) En déduire le signe de g selon les valeurs de x.

2. a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. On utilisera $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

b) Montrer que, sur $]0\ ;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$ et en déduire les variations de f.

c) Montrer que f admet un minimum en α et que ce minimum vaut $\dfrac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

d) En déduire le signe de f sur $]0\ ;+\infty[$.

Méthode 7 p. 100