4

Fonction logarithme népérien

Pour rendre compte de la perception humaine des sons, une échelle des décibels est utilisée : l'intensité allant de 0 dB, seuil de l'audition humaine, à environ 120 dB, limite supérieure des bruits usuels. Il s'agit d'une échelle logarithmique.

Pourquoi les voix de quatre chanteurs enrichissent-elles l'harmonie sans quadrupler l'intensité sonore ?

↪ Exercices 65 p. 107

VIDEO WEB
Intensité sonore
lienmini.fr/maths-c04-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis
lienmini.fr/maths-c04-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $e^{-4x} \times e^{2x}$ **b)** $\dfrac{e^{x}}{e^{-2x}}$

c) $\dfrac{(e^{2x})^3}{e^{x+1}}$ **d)** $\dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x}}$

2 Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Quel est le nombre de solutions de l'équation $e^x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$?

2. Résoudre chacune des équations suivantes.

a) $e^x = 0$ **b)** $e^x = 1$

c) $e^x = e$ **d)** $e^x = \dfrac{1}{e}$

3 Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. Résoudre les équations suivantes.

a) $e^{3x+1} \times e^x = 1$ **b)** $\dfrac{e^{-x}}{e^{4-x}} = e$ **c)** $e^{5x+1} = 0$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $e^{-x} \leqslant e$ **b)** $e^{x+1} > e^{3-2x}$ **c)** $\dfrac{1}{e^{2x}} < e^{x-3}$

4 Calculer des fonctions dérivées

Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I donné.

a) $f(x) = e^{-5x+3}$; $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3xe^{x}$; $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{e^{x} - 1}$; $I = \mathbb{R}_-^*$

5 Savoir déterminer une équation de tangente

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de la tangente à la courbe en a.

a) $f : x \mapsto (x - 1)e^{x} - 3$ en $a = 1$

b) $f : x \mapsto e^{5x} + 2x - 1$ en $a = 0$

6 Déterminer des réels vérifiant des conditions

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des réels vérifiant les conditions données.

a) $2x - 1 > 0$ et $-3x + 5 > 0$

b) $1 - x > 0$ et $x^2 + 3x - 4 < 0$

Activités

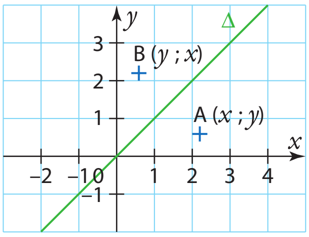
TICE 35 min

1 Approcher graphiquement une nouvelle fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

A ▶ Transformation du plan

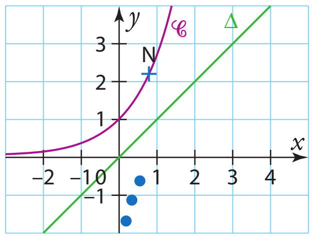
1. On considère le graphique ci-dessous.



Quelle conjecture peut-on faire quant aux points A et B de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(y\,;x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$?

2. Démontrer la conjecture.

B ▶ Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la courbe représentative de la fonction exponentielle et y placer un point N.

2. Construire le symétrique N′ de N par rapport à la droite Δ.
Activer la trace de N′ et déplacer le point N.

3. Afficher la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de la fonction ln, en saisissant $y = \ln(x)$.

L'ensemble des points N′ constitue la courbe représentative de la fonction logarithme népérien notée ln, fonction réciproque de la fonction exponentielle.

C ▶ Conséquences et conjectures

D'après le théorème des valeurs intermédiaires (↪ **chapitre 2**), on peut démontrer que l'équation $e^x = k$ admet une unique solution s dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On admet que $s = \ln(k)$.

1. En s'appuyant sur cette notion de fonction réciproque entre $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ et les caractéristiques des coordonnées des points appartenant à ces courbes (*cf.* partie **A**), en déduire les valeurs de $\ln(1)$ et $\ln(e)$.

2. Que peut-on en déduire quant à $e^{\ln(x)}$ et $\ln(e^x)$?

3. Quel est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien ?

4. Conjecturer pour la fonction logarithme népérien :

a) les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b) le sens de variation.

c) le signe de la fonction.

5. a) Reprendre la construction effectuée sur le logiciel de géométrie dynamique et y tracer la tangente au point N′ à la courbe $\mathscr{C}'$. Afficher la valeur de son coefficient directeur.

b) Après avoir déplacé plusieurs fois le point N, émettre une conjecture quant au lien qui semble exister entre l'abscisse du point N′ et le coefficient directeur.

6. Quelle conjecture peut-on émettre sur la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$?

↪ **Cours 1** p. 94

TICE Maths & Histoire 35 min **Thème 3**

2 Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVI^e^ siècle : les logarithmes

C'est avec John Napier, dit **Neper** (1550-1617), qu'apparaissent les logarithmes à la fin du XVI^e^ siècle. Ce mathématicien et astronome écossais a cherché à faciliter les calculs qui pouvaient devenir longs et pénibles liés à l'astronomie, la navigation… en mettant au point une correspondance entre les termes d'une suite géométrique (1 ; a ; a^2 ;… ; a^p ; … ; a^q ; …) et ceux d'une suite arithmétique (0 ; 1 ; 2 ; … ; p ; … ; q ; …) à l'aide de la formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$.
Il met alors au point une table numérique à deux colonnes, appelée **table des logarithmes**.

Principe : Tout produit de deux nombres m et n de la première colonne est associé à l'addition de deux autres nombres x et y de la deuxième colonne.

m	x
n	y
$m \times n$	$x+y$

Les questions suivantes utilisent l'extrait ci-contre d'une table de logarithmes (les nombres de la colonne de droite sont arrondis au dix-millième près).

1. a) En prenant $m = 2$ et $n = 3$, peut-on constater que cette table vérifie le principe mentionné ci-dessus ?

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 8 ? de 12 ?

c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

d) Sans effectuer la multiplication 27×91, comment obtenir le résultat à l'aide de cette table ?

2. a) En remarquant que $10 \div 5 = 2$, quel calcul doit-on effectuer avec les nombres de la colonne de droite respectivement associés aux nombres 10 et 5 afin de retrouver celui qui est associé au nombre 2 ?
Vérifier cette conjecture sur d'autres nombres.

b) En déduire le nombre à inscrire en face de 0,2, puis en face de 1,5.

3. a) Dans la colonne de gauche, 3 ; 9 ; 27 ; 81 représentent les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.
Quelle semble être la nature de la suite dont les premiers termes sont les nombres correspondants dans la colonne de droite ?

b) En déduire les nombres à écrire en face de 3^{-1} et 3^{10}.

4. Pour la suite des questions, on notera a les nombres de la colonne de gauche et $\ln(a)$ ceux de la colonne de droite (logarithme népérien de a).

a) En prenant $m = n = a$, en déduire $\ln(a^2)$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 3$.

b) En prenant $m = n = \sqrt{a}$, en déduire $\ln\left(\sqrt{a}\right)$, le vérifier à l'aide de la table avec $a = 16$.

3^{-1}	
0,2	
1	
1,5	
2	**0,6931**
3	**1,0986**
4	1,3863
5	**1,6094**
6	**1,7918**
7	1,9459
8	
9	2,1972
10	**2,3026**
11	2,3979
12	
16	2,7726
27	3,2958
81	4,3944
91	4,5109
2 455	7,8059
2 456	7,8063
2 457	7,8067
2 458	7,8071
3^{10}	

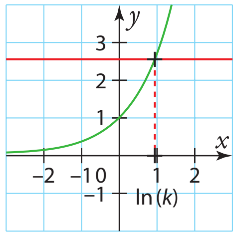
Remarque Cette table fait une correspondance entre les multiplications et les additions, entre les divisions et les soustractions, entre les extractions de racines carrées et les divisions par 2.

↪ Cours 2 p. 96

Cours

1 Fonction logarithme népérien, fonction inverse de la fonction exponentielle

Préambule **Fonction exponentielle**



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

L'équation $e^x = k$, avec $k \in \mathbb{R}_+^*$, admet alors une unique solution dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Définition **Fonction logarithme népérien**

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$ d'inconnue y. On définit ainsi $y = \ln(x)$.

Exemple

À l'aide de la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, on peut vérifier que $\ln(2) \approx 0{,}693$.

Remarque Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noter $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$.

Propriétés **Fonction logarithme népérien**

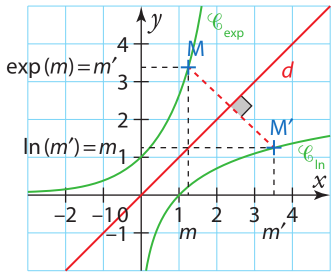
- Pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} = x$ $\quad \ln(e^x) = x$
- $\ln(1) = 0$ $\quad \ln(e) = 1$ $\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = 1$

Démonstration

↪ Activité 1 p. 92.

Exemple

$\ln(e^3) = 3$ et $e^{\ln(3)} = 3$



Propriété **Courbes des fonctions ln et exp**

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

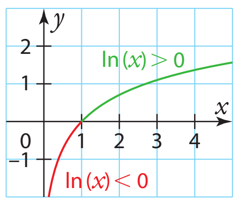
Propriété **Sens de variation de la fonction ln**

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

a et $b \in \mathbb{R}_+^*$; $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$

On en déduit $\ln(a) < \ln(b)$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété **Conséquences liées au sens de variation de ln**

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$: $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Démonstrations

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a = b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \Leftrightarrow a < b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Méthode 1 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = a$ ou $\ln(u(x)) < a$

Énoncé

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\ln(x) = 5$ **b)** $e^x = 3$ **c)** $\ln(1 - x) \leqslant -1$ **d)** $e^{2x-3} > 4$

Conseils & Méthodes

1 Commencer par déterminer les conditions d'existence, à savoir l'ensemble (E) des réels x tels que $u(x) > 0$ dans l'expression $\ln(u(x))$.

2 Simplifier un logarithme en appliquant la fonction exponentielle.

3 Simplifier en appliquant la fonction logarithme.

Solution

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ **1**, $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$, d'où $S = \{e^5\}$. **2**

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ **1**, $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, d'où $S = \{\ln(3)\}$. **3**

c) Pour tout $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;1[$ **1**

$\ln(1 - x) \leqslant -1 \Leftrightarrow 1 - x \leqslant e^{-1}$ c'est-à-dire $x \geqslant 1 - e^{-1}$

d'où $S = [1 - e^{-1}\,; +\infty[\cap]-\infty\,; 1[$ soit $S = [1 - e^{-1}\,; 1[$ **2**.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ **1**, $e^{2x-3} > 4 \Leftrightarrow 2x - 3 > \ln(4)$ **3** $\Leftrightarrow x > \dfrac{\ln(4)+3}{2}$ d'où $S = \left]\dfrac{\ln(4)+3}{2}\,;+\infty\right[$.

À vous de jouer !

1 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(x) = -1$ **b)** $e^{2x} = -1$

c) $\ln(4 - 2x) > 1$ **d)** $e^{x+1} \geqslant 2$

2 Résoudre les équations et inéquations.

a) $\ln(5x - 1) = 2$ **b)** $e^{-x} = 5$

c) $\ln(3x - 1) < 0$ **d)** $e^{5-x} \leqslant 2$

↪ Exercices 25 à 29 p. 104

Méthode 2 Résoudre une équation/inéquation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ ou $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$

Énoncé

1. **Résoudre l'équation $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x)$.**

2. **Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2)$.**

Conseils & Méthodes

1 Déterminer les conditions d'existence, soit l'ensemble (E) des réels x : $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

2 Puis résoudre dans I $u(x) = v(x)$.

3 Puis résoudre $u(x) < v(x)$.

4 S'assurer que les solutions trouvées appartiennent bien à l'ensemble correspondant aux conditions d'existence.

Solution

1. Conditions d'existence : $4x - 1 > 0$ et $2 - x > 0$, **1**

soit $x > \dfrac{1}{4}$ et $x < 2$ d'où $x \in I = \left]\dfrac{1}{4}\,;2\right[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(4x - 1) = \ln(2 - x) \Leftrightarrow 4x - 1 = 2 - x$ c'est-à-dire $x = \dfrac{3}{5}$.

Or $\dfrac{3}{5} \in I$, donc $S = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$. **2**

2. Conditions d'existence : $x^2 + 2x - 3 > 0$ **1**

$\Delta = 16\,; x_1 = 1$ et $x_2 = -3$, d'où $I =]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

Pour tout $x \in I$, $\ln(x^2 + 2x - 3) \geqslant \ln(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geqslant 2$ **3** $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 \geqslant 0\,;$

$\Delta = 24\,; x_1 = -1 - \sqrt{6} \approx -3{,}45$ et $x_2 = -1 + \sqrt{6} \approx 1{,}45$

x_1 et x_2 appartiennent à I, d'où $x \in]-\infty\,;-1-\sqrt{6}\,] \cup [-1+\sqrt{6}\,;+\infty[$ et $x \in I$, d'où $S =]-\infty\,;-1-\sqrt{6}\,] \cup [-1+\sqrt{6}\,;+\infty[$. **4**

À vous de jouer !

3 Résoudre.

a) $\ln(x + 1) = \ln(-x)$ **b)** $\ln(x^2 - 1) \leqslant \ln(5)$

4 Résoudre.

a) $\ln(x^2 - x + 1) = \ln(2)$ **b)** $\ln(2x) > \ln(x^2 - 2x + 1)$

↪ Exercices 30 à 33 p. 104

Cours

2 Propriétés algébriques de la fonction ln

Propriété **Relation fonctionnelle**

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$,
soit $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.
On a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

Remarques

- On retrouve la particularité de l'activité 2, à savoir que cette fonction transforme les produits en sommes.
- Cette formule se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

Exemples

- $\ln(10) = \ln(5 \times 2) = \ln(5) + \ln(2)$
- $\ln(30) = \ln(2 \times 3 \times 5) = \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)$

Propriété **Logarithme d'un inverse, d'un quotient**

Pour tous réels *a* et *b* strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Démonstrations

① Pour $a > 0$, $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$.

② Pour $b > 0$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

Propriété **Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée**

Pour tout réel *a* strictement positif, et pour tout entier relatif *n* :

$$\ln(a^n) = n\ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

Démonstrations

① $e^{\ln(a^n)} = a^n$ et $e^{n\ln(a)} = (e^{\ln(a)})^n = a^n$
On a alors $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln(a)}$, soit $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

② $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = \ln(a)$ et $\ln\left(\left(\sqrt{a}\right)^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln(a) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$, d'où $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Exemples

- $\ln(25) = \ln(5^2) = 2\ln(5)$
- $\ln(16) - 2\ln(2) + \ln(8) = \ln(2^4) - 2\ln(2) + \ln(2^3) = 4\ln(2) - 2\ln(2) + 3\ln(2) = 5\ln(2)$
- $\ln\left(\sqrt{6}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(6)$

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Utiliser les propriétés algébriques de ln

Énoncé

Exprimer en fonction de ln 2 chacun des nombres suivants.

a) $\ln\frac{1}{4}$ **b)** $\ln 8 + 5\ln 2$ **c)** $\ln\sqrt{32}$ **d)** $\ln 10 - \ln 20$

Solution

a) $\ln\frac{1}{4} = -\ln 4 = -\ln(2^2) + -2\ln 2$ 1

b) $\ln(2^3) + 5\ln 2 = 3\ln 2 + 5\ln 2 = 8\ln 2$ 2

c) $\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln 32 = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \frac{5}{2}\ln 2$ 3

d) $\ln 10 - \ln 20 = \ln\left(\frac{10}{20}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$ 2

Conseils & Méthodes

1 Utiliser les propriétés $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$ ainsi que $\ln a^n = n\ln a$.

2 Avec une somme/différence $\ln a + \ln b$ on peut penser à utiliser $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$;
$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

3 Chercher à écrire $\ln a$ sous la forme $\ln\left(c^n\right)$, soit $n\ln c$.

À vous de jouer !

5 Exprimer en fonction de ln 5.

a) $\ln 25 + \ln\sqrt{125}$ **b)** $\ln 35 - \ln 175$

c) $\ln\frac{e^4}{25}$ **d)** $e^{-\ln 5} - \ln(5e)$

6 Exprimer en fonction de ln 3.

a) $4\ln 12 - 4\ln 36$ **b)** $\ln\frac{1}{9} + \ln 81$

c) $\ln\frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27$ **d)** $e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2)$

↪ Exercices 34 à 37 p. 104

Méthode 4 Résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant

Énoncé

Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ **avec** $n \in \mathbb{N}$.

Solution

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

donc l'inéquation $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 10^{-3}$ est équivalente à $\ln\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) < \ln(10^{-3})$ 1

$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{2}{5}\right) < \ln(10^{-3})$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$ 2

Or $\dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \approx 7{,}5$; par conséquent, $n \geqslant 8$. 3

Conseils & Méthodes

1 Pour se « débarrasser » de l'inconnue en exposant, il faut penser à appliquer la fonction ln dans chaque membre de l'inéquation.

2 Lorsqu'il s'agit de diviser les membres d'une inéquation par $\ln a$, il faut être vigilant quant au signe de $\ln a$.
Pour $0 < a < 1$, $\ln a < 0$: le sens de l'inégalité change. En revanche, si $a > 1$, $\ln a > 0$ et le sens de l'inégalité reste alors le même.

3 Ne pas oublier de conclure en tenant compte du fait que n est un entier naturel.

À vous de jouer !

7 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\left(\frac{5}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$ avec $n \in \mathbb{N}$

b) $2^n - 7 \times 2^{n-1} > -3$

8 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $3^{2n} > 10^8$

b) $5^n \times 9^{-n-1} \leqslant 10^{-4}$

↪ Exercices 38 à 42 p. 104

Cours

3 Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété Dérivée de la fonction ln

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Démonstration

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=e^{\ln(x)}$.
La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.
Sachant que $(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u'$, en posant $v(x)=e^x$ et $u(x)=\ln(x)$, on a alors :
$f'(x)=e^{\ln(x)}\times\ln'(x)=x\times\ln'(x)$.
On a également $f(x)=x$ or $x'=1$.
Par conséquent, on a $x\times\ln'(x)=1\Leftrightarrow\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

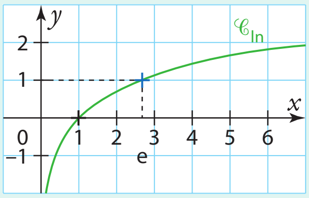
Propriétés Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$$

Remarque Comme $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)$ sous entend $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln(x)$.

Propriété Tableau de variations de ln et courbe représentative

x	0	$+\infty$
Variations de $x\mapsto\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$



4 Fonction ln(u)

Propriété Dérivée de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln u$ est alors dérivable sur I et $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$.

Démonstrations

① Soit u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I.
Sachant que $(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u'$, en posant $v(x)=\ln x$, on a alors :
$(\ln u(x))'=\dfrac{1}{u(x)}\times u'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ puisque $v'(X)=\dfrac{1}{X}$.
② Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sachant que $(v\circ u)'=(v'\circ u)\times u'$, en posant $v(x)=\ln x$, on a alors $(e^{u(x)})'=e^{u(x)}\times u'(x)$ puisque $(e^X)'=e^X$.

Propriété Sens de variation de ln u

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions u et $\ln u$ ont le même sens de variation sur I.

Démonstration

u étant strictement positive, le signe de $\dfrac{u'}{u}$ est le même que celui de u'. Or $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ ce qui signifie que le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u', c'est-à-dire que u et $\ln u$ ont même sens de variation.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c04-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Étudier une fonction avec ln

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \ln x + x$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de la fonction f et dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

Solution

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc, par somme des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 1

2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ or, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x} + 1 > 0$ 2 :

la fonction f est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x + x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x + x = +\infty$.

x	0	α	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Conseils & Méthodes

1 Penser à utiliser les opérations sur les limites.

2 Pour dresser le tableau de variations d'une fonction, déterminer au préalable le signe de la dérivée.

À vous de jouer !

9 1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{x} + \ln x$, déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Calculer la dérivée de f, en déduire son sens de variation sur $]0\,;+\infty[$ et son signe.

10 1. Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x - \ln x$. Vérifier que $f(x) = x\left(x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ et déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ en utilisant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

2. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe.

Exercices 43 à 47 p. 105

Méthode 6 Calculer la dérivée d'une fonction du type ln *u*

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 1)$. Calculer $f'(x)$.

Solution

$u(x) = 3x^2 + 1$, u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. 1 $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2 + 1}$ 2

Conseils & Méthodes

1 Vérifier que u est dérivable et strictement positive sur I.

2 Puis utiliser $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

À vous de jouer !

11 Soit $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x}{x^2}\right)$.

Calculer $f'(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$.

12 Soit $f(x) = (x^2 - 4)\ln\left(\dfrac{1}{2x}\right)$.

Calculer $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercices 48 et 49 p. 105

Exercices résolus

Méthode 7 Étudier une fonction contenant $\ln x$ à l'aide d'une fonction auxiliaire

Cours 3 p. 98

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}$.

1. Soit ϕ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\phi(x)=x^2-1+3\ln x$.

a) Calculer $\phi(1)$ et la limite de ϕ en 0.

b) Étudier les variations de ϕ sur $]0\,;+\infty[$. En déduire le signe de $\phi(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\phi(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variations de f.

On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.

Déterminer avec la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

D'après Bac S, Amérique du Sud, 2017.

Solution

1. a) $\phi(1)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0} 3\ln x=-\infty$, donc, par somme des limites, on a $\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=-\infty$.

b) $\phi'(x)=2x+\dfrac{3}{x}=\dfrac{2x^2+3}{x}$ donc, pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, $\phi'(x)>0$, donc ϕ est une fonction croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Or $\phi(1)=0$, par conséquent, pour tout $x\in\,]0\,;1[$, $\phi(x)<0$ et, pour tout $x\in\,]1\,;+\infty[$, $\phi(x)>0$. 1 2

2. a) $f'(x)=\dfrac{\left(2x-2-\dfrac{3}{x}\right)x-(x^2-2x-2-3\ln x)\times 1}{x^2}$

$$=\frac{2x^2-2x-3-x^2+2x+2+3\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+3\ln x}{x^2}=\frac{\phi(x)}{x^2}$$

Puisque $x^2>0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $\phi(x)$. 3

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

b) Pour tout $x\in\,]0\,;1]$, $f(x)\in[-3\,;+\infty[$; f est continue et strictement décroissante sur $]0\,;1]$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires 4, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.

Avec la calculatrice, on trouve $\alpha\approx 0{,}41$.

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier le signe d'une fonction à partir des variations de celle-ci, il faut utiliser des images en particulier.

2 Afin de mieux visualiser le signe de ϕ, dresser le tableau de variations de ϕ en y incluant la valeur de $\phi(1)$.

3 Il est usuel d'utiliser une fonction auxiliaire pour étudier le signe d'une dérivée.

4 Lorsqu'il s'agit de montrer qu'une équation admet une unique solution sur I, il faut penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

À vous de jouer !

13 1. Soit $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$ définie sur $]e\,;+\infty[$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ avec $u(x)=\ln(x)+x-3$.

b) Étudier les variations de u sur $]e\,;+\infty[$ et en déduire son signe.

c) En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

14 1. Soit $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ définie sur $[1\,;+\infty[$.

Montrer que $f(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x)=x^2-1+\ln(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1\,;+\infty[$.

Coup de pouce Penser à étudier les variations de g pour en déduire le signe de g.

2. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y=x$.

Exercices 50 et 51 p. 105

Exercices résolus

Méthode 8 Étudier une fonction avec ln u

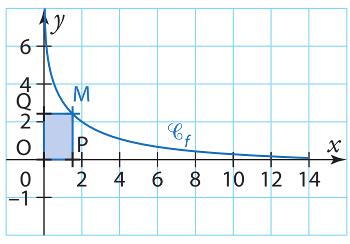
↪ Cours 3 et 4 p. 98

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;14[$ par $f(x)=2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-contre.

À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$ modélise l'aire du rectangle OPMQ.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;14[$.

En déduire les coordonnées du point M pour lesquelles l'aire du rectangle OPMQ est maximale.
On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

D'après Bac S, Pondichéry, 2016.

Solution

1. $\mathscr{A}_{\text{OPMQ}} = \text{OP}\times\text{MP} = x\times f(x)$ **1** $= x\left(2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

2. $g'(x) = 2-\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2}} = 2-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-1 = 1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0$ **2** $\Leftrightarrow \ln e \geqslant \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow e \geqslant \frac{x}{2}$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$. On a alors $g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 2e$.

x	0		2e		14
Signe de $g'(x)$	‖	+	0	–	
Variations de g	‖ 0	↗	2e	↘	$28-14\ln 7$

D'après le tableau de variations, on en déduit que l'aire de OPMQ est maximale pour M(2e ; 2e). **3**

Conseils & Méthodes

1 Un point M $\in\mathscr{C}_f$ équivaut à dire que ses coordonnées sont du type $(x\,;f(x))$.

2 Pour résoudre une inéquation avec ln, on peut notamment chercher à transformer l'inéquation sous la forme $\ln a\geqslant \ln b$.

3 Pour résoudre un problème d'optimisation, penser à étudier les variations de la fonction qui modélise le problème.

À vous de jouer !

15 Soit la fonction f définie par $f(x)=\ln(-2x^2+13{,}5)$ sur l'intervalle $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

1. Dériver f, puis dresser son tableau de variations sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

2. Calculer $f(-2{,}5)$ et $f(2{,}5)$.

3. En déduire le signe de f sur $[-2{,}5\,;2{,}5]$.

D'après Bac S, Pondichéry, 2017.

16 **1.** Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-1[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right)$. Déterminer la limite de f en -1.

2. Dresser le tableau de variations de f et en déduire son signe sur $]-\infty\,;-1[$.

17 Soit la fonction $g(x)=\ln[1+(e-1)x]-x$ définie sur $[0\,;1]$.

1. Montrer que $g'(x)=\dfrac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}$.

2. Déterminer les variations de g sur $[0\,;1]$ et en déduire que g admet un maximum en $\dfrac{e-2}{e-1}$ dont on donnera une valeur arrondie à 10^{-2} près.

3. Établir que l'équation $g(x)=0{,}05$ admet deux solutions sur $[0\,;1]$.

D'après Bac S, centres étrangers, 2014.

↪ Exercices 52 à 55 p. 105

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c04-04

ØLJEN
Les maths en finesse

La propriété à démontrer

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

Pour démontrer cette propriété il faudra utiliser le pré-requis suivant : pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Comprendre avant de rédiger

Quand un pré-requis est donné pour une démonstration, il faut chercher à relier la question posée à ce pré-requis.

Rédiger

Étape 1

Puisqu'il s'agit de faire le lien entre la propriété qui est à démontrer et le pré-requis donné, il faut chercher à mettre en relation a, $\frac{1}{a}$ et un éventuel produit.

Astuce

$a \times \frac{1}{a} = 1$

Étape 2

Il s'agit d'utiliser le pré-requis donné et $\ln 1 = 0$.

Étape 3

Puis on transforme l'égalité obtenue en l'égalité souhaitée.

La démonstration rédigée

Puisque $a \times \frac{1}{a} = 1$,

on a alors $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$

$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$

or $\ln 1 = 0$ on a alors :

$$\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

Pour s'entraîner

1. En utilisant le même pré-requis, montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2. En utilisant le pré-requis suivant :

$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$, avec u et v deux fonctions dérivables respectivement sur I et J.

montrer que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec u une fonction positive et dérivable sur un intervalle I.