DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c03-05

Exercices calculs et automatismes

17 Dérivée seconde

1. Dériver deux fois la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-3x+2}.$$

2. Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1).$$

18 Dérivée seconde d'une racine

1. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{7}\,;+\infty\right[$ par :

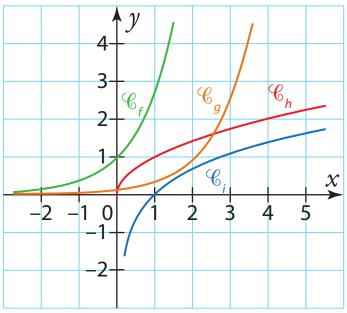
$$(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-1}}.$$

2. Même question que précédemment avec la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

19 Convexité (1)

Parmi les courbes suivantes, lesquelles sont représentatives de fonctions convexes ?



20 Somme de deux fonctions convexes

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
La somme de deux fonctions convexes est convexe.	☐	☐

21 Convexité (2)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Si f est convexe alors $-f$ est concave.	☐	☐

22 Fonctions

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?	**V**	**F**
Les fonctions affines sont des fonctions convexes et concaves.	☐	☐

23 Exemples de fonctions convexes et concaves

Donner un exemple de fonction convexe et un exemple de fonction concave.

24 Exemple de point d'inflexion

Donner un exemple de courbe présentant un point d'inflexion.

25 Cube

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto x^3 + 2$ est :

a croissante sur $]-\infty\,;0]$.
b décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
c convexe sur $]-\infty\,;0]$.
d concave sur $]-\infty\,;0]$.

26 Racine carrée

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est :

a croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
c convexe sur $[0\,;+\infty[$.
d concave sur $[0\,;+\infty[$.

27 Puissance

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La fonction $x \mapsto -2x^5$ est :

a croissante sur $]0\,;+\infty[$.
b décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
c convexe sur $]0\,;+\infty[$.
d concave sur $]0\,;+\infty[$.

28 Point d'inflexion

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto (x-2)^3$ admet un point d'inflexion pour :

a $x = 2$.
b $x = -2$.
c $x = 0$.
d $x = 1$.

29 Graphiquement

Méthode Comment faire pour déterminer graphiquement la convexité d'une fonction ? ses points d'inflexion ?

30 Algébriquement

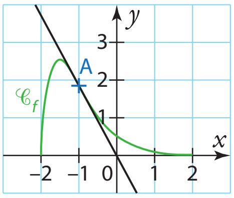
Méthode Comment faire pour déterminer algébriquement la convexité d'une fonction ? ses points d'inflexion ?

Exercices d'application

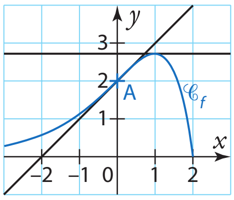
Lire les intervalles où f est convexe ou concave

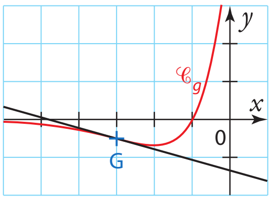
Méthode 1 p. 73

31 Déterminer graphiquement l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

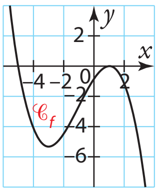


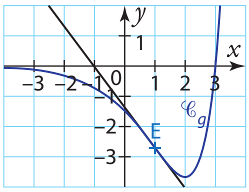
32 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.



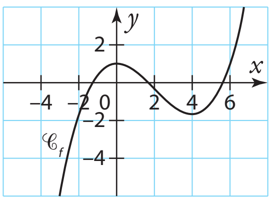


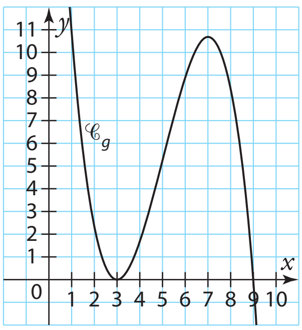
33 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.





34 Déterminer graphiquement les intervalles où les fonctions f et g sont convexes et où elles sont concaves.





Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Méthode 2 p. 75

35 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne le tableau de variations de f' ci-dessous.

x	$-\infty$	6	$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$ ↗	-2	↘ $-\infty$

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

36 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f'	↘	-1	↗

1. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
2. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

37 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

x	$-\infty$	$2-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ↘	$-\infty$

38 On assimile le rythme de croissance d'une production, où x est le nombre d'objets produits par heure, à la dérivée de f définie par $f(x) = -8x^3 + 240x^2 - 2\,400x + 8\,000$
1. Montrer que $f'(x) = -24(x-10)^2$.
2. Sur quel intervalle f' est-elle croissante ? Décroissante ?
3. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.

39 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = (3x-7)^2$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \sqrt{-2x+7}$ sur $\mathbb{R}_-$
c) $f(x) = e^{7x-2}$ sur $\mathbb{R}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{(-x+2)^2}$ sur $]-\infty\,;2]$

40 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = (5x^2-4x+2)^2$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{3x-2}\right)^2$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$
c) $f(x) = (4-x^2)^2$ sur $\mathbb{R}$ **d)** $f(x) = e^{5x^2-4x+2}$ sur $\mathbb{R}$
e) $f(x) = e^{\frac{1}{3x-2}}$ sur $\left]\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$ **f)** $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$

41 Dériver les fonctions suivantes.
a) $f(x) = 4x+5+e^{-2x+3}$ sur $\mathbb{R}$ **b)** $f(x) = \dfrac{(x^3+1)^2}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
c) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ **d)** $f(x) = \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Méthode 3 p. 75

42 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 6x^2$. Montrer que $f''(x) = 6x + 12$. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

43 Soit la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ définie par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$. Montrer que $f''(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

44 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par :

$$f(x) = 5x + 3 + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

2. En déduire la convexité de f.

45 Soit f une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Le tableau ci-dessous présente le signe de f''.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		+	0	−	0	+	

1. Sur quel(s) intervalle(s) f'' est-elle positive ? Négative ?

2. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

46 Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x\sqrt{x}.$$

1. On admet que f est deux fois dérivables et on note f'' sa dérivée seconde. Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de $f''(x)$.

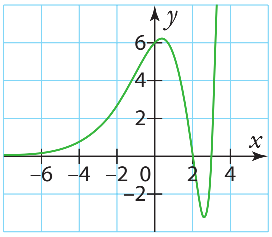
2. a) Déduire de la question précédente que f est concave.

b) Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

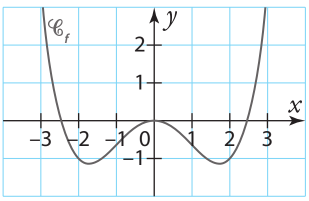
Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

Méthode 4 p. 77

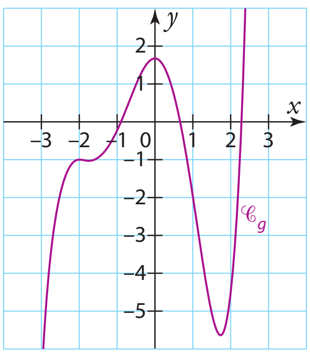
47 On considère la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



48 On considère la représentation graphique d'une fonction f. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



49 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer les points d'inflexion de cette courbe.



Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Méthode 5 p. 77

50 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=6+(6-x)*exp(x-5) ;`
	`x ->6+(6-x)*exp(x-5)`
2	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`(-x+4)*exp(x-5)`

À l'aide de cet affichage :

1. Dresser le tableau de signes de $f''(x)$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

51 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. Calculer $f''(x)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

52 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)\mathrm{e}^{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

2. Calculer $f''(x)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

53 On considère les fonctions f et g définies et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 7x + 8)\mathrm{e}^{-x},\ \text{et}\ g(x) = \sqrt{x^3 + 2}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ et en déduire les variations de f et de g.

2. a) Calculer $f''(x)$ et $g''(x)$.

b) Étudier le signe de $f''(x)$ et de $g''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion des courbes représentatives des fonctions f et g.

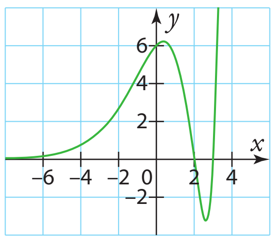
54 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^5 + \frac{25}{3}x^4 + \frac{20}{3}x^3 - 80x^2 + 8x + 1.$$

1. Calculer $f''(x)$.

2. Montrer que :
$f''(x) = 20(x - 1)(x + 2)(x + 4)$.

3. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

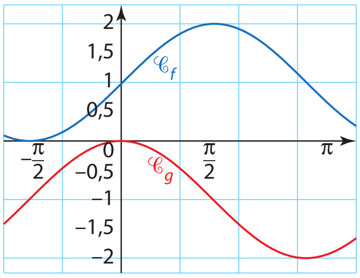


Exercices d'entraînement

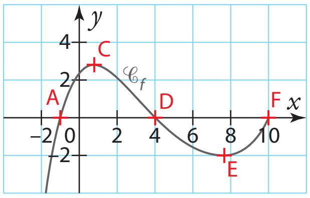
Reconnaître une fonction convexe, concave, un point d'inflexion sur une représentation graphique

Méthode 6 p. 78

55 Pour chacune des courbes suivantes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, déterminer les intervalles où la fonction est convexe et ceux où elle est concave.



56 Soit f une fonction définie sur $[-1{,}8\ ;\ 10]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1. Sur quel intervalle la fonction semble convexe ? Concave ?

2. En déduire le point d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

Étudier la convexité de f à partir de f''

Méthode 7 p. 79

57 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $[-5\ ;\ 7]$ définie par :

$$f(x) = (x - 2{,}5)e^{0{,}4x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = 0{,}4xe^{0{,}4x}$.

2. En déduire que $f''(x) = \dfrac{2}{25}(2x+5)e^{0{,}4x}$.

3. Étudier la convexité de f sur $[-5\ ;\ 7]$.

58 On considère la fonction g deux fois dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ définie par :

$$g(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

1. Calculer $g''(x)$.

2. En déduire la concavité de g sur $]0\ ;+\infty[$.

59 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{3}{e^x - 3}.$$

1. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\ln(3)\}$.

2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion, s'il existe, de $\mathscr{C}_f$.

60 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 5xe^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = 5(x-2)e^{-x}$.

2. En déduire le plus grand intervalle sur lequel f est concave.

61 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ par :

$$f(x) = x + (8x^2 + 52x + 88)e^{(-0{,}5x)}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

1	f(x) :=x+(8*x^2+52*x+88)*exp$\left(-\frac{1}{2}*x\right)$

	// Interprète f
	// Succès
	// lors de la compilation f

	x ->x+(8*x²+52*x+88)*exp$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)*x\right)$
2	simplifier(deriver(f(x),x))
	$-4*x^2*\exp\left(-\frac{1}{2}*x\right)-10*x*\exp\left(-\frac{1}{2}*x\right)$ $+8*\exp\left(-\frac{1}{2}*x\right)+1$
3	factoriser(deriver(deriver(f(x),x),x))
	$(x+2)*(2*x-7)*\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$

1. Retrouver par le calcul les résultats affichés par le logiciel.

2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$.

62 On considère la fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = -2(x+2)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f''(x) = -2xe^{-x}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

63 On considère la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = xe^x.$$

1. Montrer que $g''(x) = (x+2)e^x$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$.

64 On considère la fonction h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

1. Montrer que $h''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(x^2-1)}\,(x^2-1)}$.

2. En déduire les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_h$, s'ils existent.

65 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^3 - 11x^2 + 24x - 26)e^x.$$

Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$. S'ils existent, en déduire les coordonnées des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

66 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = 4\sqrt{x} + 3x.$$

1. Étudier le signe de $g''(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que g n'admet pas de point d'inflexion.

67 On donne le tableau de variations de f', fonction dérivée d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

x	-3	-2	0	1
Variations de f'	-5 ↗	0 ↘	-2 ↗	3

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

68 On donne ci-dessous le tableau de signes de f'', fonction dérivée seconde d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-7		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

69 Étudier, selon les valeurs de m, la convexité de la fonction f définie par $f(x) = e^{mx}$.

70 On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`f(x) :=x+exp(-x+1)`
	`x ->x+*exp(-x+1)`
2	`deriver(f(x),x)`
	`-exp(-x+1)+1`
3	`(deriver(deriver(f(x),x),x))`
	`exp(-x+1)`

1. En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

71 On considère la fonction g définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne l'affichage obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel ci-dessous.

1	`g(x) :=sqrt(x)-1/x ;`
	$x \to \sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$
2	`factoriser(deriver(deriver(g(x),x),x))`
	$\dfrac{-8*\sqrt{x}-x^2}{4*x^3*(\sqrt{x})}$

1. En déduire que g est concave sur $\mathbb{R}$.
2. Interpréter graphiquement le résultat de la question précédente en utilisant les mots « sécantes » et « tangentes ».

72

Pour déterminer le lieu de vitesse maximale de la montagne russe, on modélise la portion du trajet la plus inclinée des montagnes russes. Soit x l'abscisse d'un wagon, alors la portion du trajet la plus inclinée est la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ 27]$ dont la dérivée est égale à :

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\left(x-\frac{27}{2}\right)\right)^2+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne l'affichage ci-dessous.

1	`f(x):=156/10+15*atan(-sqrt(3)/15*(x-135/10))`

	`// Interprète f`
	`// Succès`
	`// lors de la compilation f`

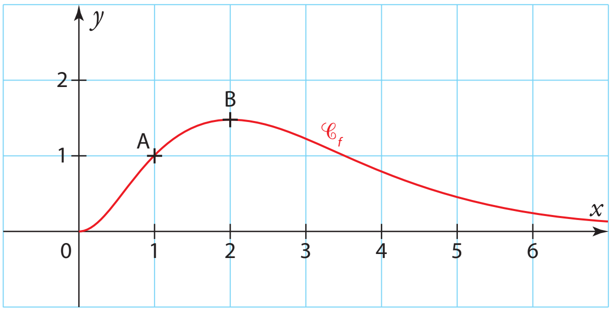
	$x \to \dfrac{156}{10}+15*\operatorname{atan}\left(\dfrac{-(\sqrt{3})}{15}*\left(x-\dfrac{135}{10}\right)\right)$
2	`(deriver(f(x),x))`
	$-\dfrac{\sqrt{3}}{\left((\sqrt{3})*\dfrac{1}{15}*\left(x-\dfrac{27}{2}\right)\right)^2+1}$
3	`factoriser(deriver(deriver(f(x),x)))`
	$\dfrac{1200*(\sqrt{3})*(2*x-27)}{(4*x^2-108*x+1029)^2}$

1. À l'aide de cet affichage, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.
3. Quelle est la valeur de la pente en ce point d'inflexion ? Montrer que cette valeur correspond à un angle de 60 °.
4. Conclure quant à l'endroit où la vitesse est maximale au niveau de ce trajet.

Exercices bilan

73 Composition de fonctions et limites

La courbe $\mathscr{C}_f$ donnée ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On admet que $\mathscr{C}_f$ passe par les points O(0 ; 0), A(1 ; 1) et $B\left(2\,;\frac{4}{e}\right)$ et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



A ▶ Analyse de f

1. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.

2. On admet que $f(x) = x^2 e^{-x+1}$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) En déduire les variations de la fonction f.

c) Dresser le tableau de variations de f.

d) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

3. a) Calculer $f''(x)$.

b) En déduire l'étude de la convexité de f.
c) Déterminer les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

B ▶ En utilisant la fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{-f(x)}$.
1. Calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. Montrer que :

$$g''(x) = -2e^{-f(x)-x+1}(x^2 - x + 1).$$

4. En déduire la concavité de g et ses éventuels points d'inflexion.

C ▶ Avec la racine carrée

On considère la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{f(x)}\,.$$

1. Calculer $h'(x)$.

2. En déduire le tableau de variations de h.

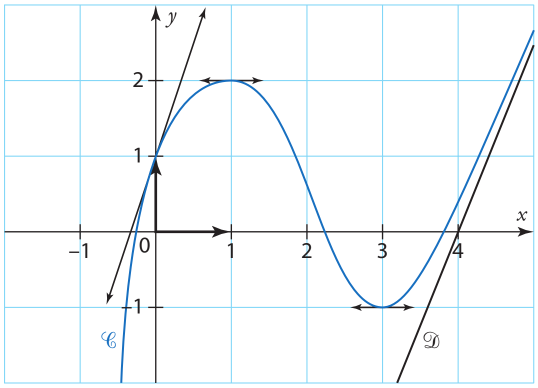
3. Calculer $h''(x)$.

4. En déduire les éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

D'après Bac ES Métropole-La Réunion sept 2006

74 Exponentielle de fonctions

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ dont la courbe est donnée dans le graphe ci-dessous.



1. a) Donner $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.
b) Donner les intervalles où f semble concave et ceux où f semble convexe.
c) Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de f.
2. On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ puis $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

b) Étudier les variations de g sur $]-1\,;+\infty[$ et en dresser le tableau de variations.
c) Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.

D'après Bac ES Liban 2006

75 Convexité d'une fonction

Thème 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1. a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x^2+1)e^{x^2-1}.$$

b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a) Montrer que, pour tout réel x,

$$f''(x) = 2x(2x^2+3)e^{x^2-1}.$$

b) Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. a) Soit T_a tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a avec $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation de T_a en fonction de a.
b) Retrouver le résultat de la question **2**.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x - f(x).$$

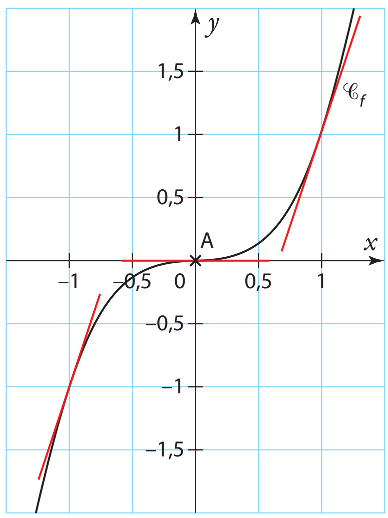
a) Montrer que $h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$.

b) On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\,;1]$.
Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1\,;1]$ et en déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur $[-1\,;1]$.
c) Conclure que $\mathscr{C}_h$ est une courbe de Lorentz.

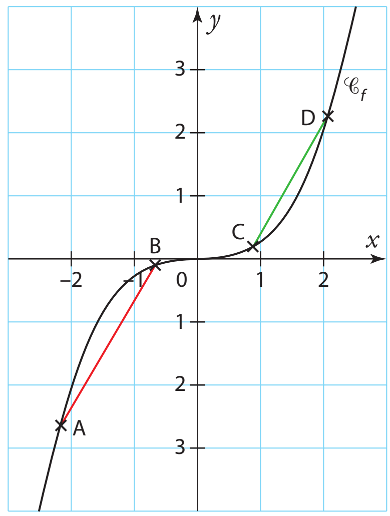
D'après Bac Centres Étrangers 2014

Convexité et concavité

- f est **convexe** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' **est positive**.
- f est **concave** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' **est négative**.



- f est **convexe** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de ses sécantes et au-dessus de ses tangentes.
- f est **concave** sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.



Preuve de la convexité d'une fonction

La preuve peut être faite par :

- les sécantes,
- les tangentes,
- la croissance de la dérivée,
- la positivité de la dérivée seconde.

Point d'inflexion

On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.

Préparer le BAC Je me teste

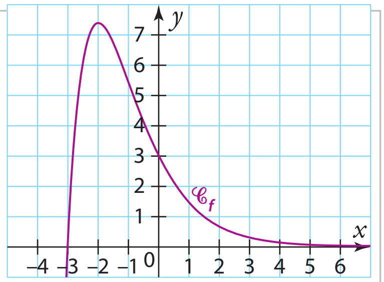
Je dois être capable de...

- Reconnaître sur une représentation graphique une fonction convexe, concave, un point d'inflexion (Méthode 1, Méthode 4, Méthode 6) → **Parcours d'exercices** : 1, 2, 57, 58, 31, 32, 9, 10, 47, 48, 13, 14, 55, 56
- Étudier la convexité, la concavité, d'une fonction deux fois dérivables sur un intervalle (Méthode 2, Méthode 3, Méthode 5, Méthode 7) → 5, 6, 35, 36, 7, 8, 42, 43, 11, 12, 50, 51, 15, 16

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c03-06

QCM Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 76 à 80, on considère la fonction f définie sur $[-4\,;+\infty[$ dont voici la courbe représentative dans un repère.



	A	B	C	D
76 Sur $[-4\,;-1]$, $\mathscr{C}_f$ est :	au-dessus de ses tangentes.	au-dessus de ses sécantes.	en-dessous de ses tangentes.	en-dessous de ses sécantes.
77 $f'(-1)$ est :	égal à 5,5.	positif.	égal à 0.	négatif.
78 $f''(-1)$ est égal à :	1.	e^3.	$3e^3$.	0.
79 On pose $h(x)=\sqrt{-f(x)+10}$. Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, h est :	convexe.	concave.	ni convexe ni concave.	convexe et concave.
80 Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $g(x)=e^{f(x)}$ est :	convexe.	concave.	ni convexe ni concave.	convexe et concave.

Pour les exercices 81 à 85, on considère la fonction f deux fois dérivables sur $[-10\,;10]$ par : $f(x)=1+(x-5)e^{0,2x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

	A	B	C	D
81 La dérivée f'' est définie par :	$\frac{(x+5)e^{0,2x}}{25}$.	$\frac{xe^{0,2x}}{5}$.	$(x-5)e^{0,2x}$.	0.
82 Alors f' est :	décroissante sur $[-5\,;0]$.	décroissante sur $[-10\,;0]$.	croissante sur $[-10\,;5]$.	croissante sur $[-5\,;5]$.
83 Alors f est :	concave sur $[-5\,;0]$.	concave sur $[-10\,;0]$.	convexe sur $[-10\,;5]$.	convexe sur $[-5\,;5]$.
84 Sur $[0\,;5]$, on peut affirmer que $\mathscr{C}_f$ est située :	au-dessus de ses tangents.	au-dessus de ses sécantes.	en dessous de ses tangentes.	en dessous de ses sécantes.
85 $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour x égal à :	5.	0.	10.	–5.

86 Concavité

On considère la fonction g dont la dérivée g' est telle que $g'(x) = \frac{1}{x} + 3$. On admet que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est deux fois dérivable de dérivée seconde g''.

1. Déterminer l'ensemble I des valeurs de x pour lesquelles g' est définie.

2. Exprimer $g''(x)$ en fonction de x. Donner le signe de $g''(x)$.

3. En déduire la concavité de g sur I.

Méthode 3 p. 75

87 Convexité

On considère la fonction f définie par $f(x) = (-x+1)e^{\frac{1}{-x+1}}$.
On appellera $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On admet que f est deux fois dérivable de dérivée seconde f''.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f noté D_f.

2. Montrer que $f''(x) = \frac{1}{(-x+1)^3}e^{\frac{1}{-x+1}}$ et étudier son signe.

3. Étudier la convexité de f sur D_f.

Méthode 3 p. 75

88 Étudier une fonction

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil.
On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction f définie sur $[0\,;60]$ par $f(x) = 70 + (14x+42)e^{-\frac{x}{5}}$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;60]$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x de $[0\,;60]$,

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x+28)e^{-\frac{x}{5}}.$$

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;60]$.

3. Un logiciel de calcul formel affiche la ligne suivante.

```
1  factoriser(deriver(deriver(70+(14x+42)*exp(-x/5))))
```

$$\frac{14*(x-7)*\exp\left(-\frac{x}{5}\right)}{25}$$

a) Déterminer $f''(7)$. Que représente le point A de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 7 pour $\mathscr{C}_f$?

b) Etudier la convexité de f.

c) En déduire l'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extrema.

Coup de pouce Étudier le signe de la dérivée seconde.

Méthode 2, Méthode 3 p. 75 Méthode 5 p. 77 et Méthode 7 p. 79

D'après BAC ES Métropole La Réunion juin 2019

89 Déterminer les coordonnées des points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (-5x^2+5)e^x$$

1. Montrer que $f''(x) = -(5x^2+20x+5)e^x$.

2. Étudier le signe du polynôme $5x^2+20x+5$ puis celui de $f''(x)$.

3. En déduire les abscisses des points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.

4. Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question précédente.

Méthode 3 p. 75 Méthode 5 p. 77

D'après Bac ES Nouvelle-Calédonie novembre 2019

90 Étudier la convexité de deux fonctions

On considère la fonction g définie par :

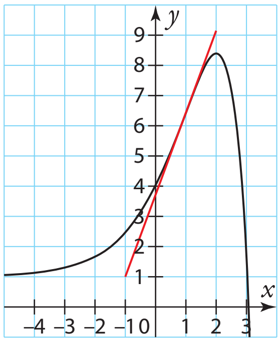
$$g(x) = (3-x)e^x + 1.$$

On appellera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormé. On admet que g est deux fois dérivable de dérivée seconde g''.

A ▶ Lecture graphique

1. À l'aide du graphique ci-contre, déterminer les intervalles où g est convexe, et ceux où g est concave.

2. Conjecturer les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



B ▶ Analyse

1. Montrer que
$g'(x) = (2-x)e^x$ et $g''(x) = (1-x)e^x$.

2. a) Étudier le signe de $g''(x)$ et en déduire la convexité ou la concavité de g sur cet intervalle.

b) Déterminer algébriquement les coordonnées du point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3. Donner l'équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a = 1$.

4. Soit h la fonction définie par $h(x) = (ex + e + 1) - g(x)$.

a) Montrer que $h'(x) = e - (2-x)e^x = (x-2)e^x + e$ puis que $h''(x) = -g''(x)$.

b) En déduire que h' est décroissante sur $]-\infty\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

c) Calculer $h'(1)$, en déduire que $h'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire que h est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) Calculer $h(1)$. En déduire le tableau de signe de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

f) Retrouver le résultat de la question **B 2.**.

Méthode 6 p. 78 Méthode 7 p. 79

D'après BAC ES Nouvelle-Calédonie mars 2014