3

Convexité

Les montagnes russes sont impressionnantes. Le Thunderhead Roller Coaster est une des plus populaires aux États-Unis, qui présente 22 virages et une pente maximale de 60°.

Comment déterminer les endroits où la vitesse du train sera la plus grande ?

↪ Exercice 72 p. 85

VIDÉO WEB

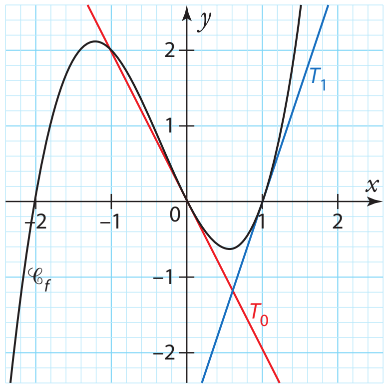
Courbes et vitesse
lienmini.fr/maths-c03-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c03-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Déterminer un nombre dérivé



1. On considère une fonction dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.

a) Graphiquement, déterminer $f'(0)$, $f(0)$, $f'(1)$ et $f(1)$.

b) Graphiquement, déterminer la ou les abscisses pour lesquelles la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$.

a) Calculer $g'(3)$ et $g'(-3)$.
Que remarquez-vous ? Justifier.

b) Déterminer l'abscisse positive a pour laquelle $g'(a) = 12$.

2 Déterminer une équation de tangente

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $f'(2)$ et $f(2)$.

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2, notée T_2.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0, notée T_0.

3 Calculer des dérivées

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3\sqrt{x}$

b) $g(x) = 4x - \dfrac{7}{x}$

c) $h(x) = xe^x$

d) $i(x) = \dfrac{x^2e^x + 3}{x + 5}$

4 Étudier des tableaux de signes

1. On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ dont on donne les tableaux de signe.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f(x)$		−	0	+	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $g(x)$		−	0	+	

Dresser le tableau de signes de $f \times g$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - 9)(3x + 4)$.
Dresser le tableau de signes de la fonction h.

5 Calculer la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{3x+1}$. Calculer $f'(x)$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{-2x+1+1}$. Calculer $g'(x)$.

Activités

TICE 15 min

1 Différencier courbes, sécantes et tangentes

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

2. Placer deux points A et B d'abscisses négatives et tracer le segment [AB] (aussi appelé sécante). Comment est situé ce segment par rapport à la courbe $\mathscr{C}_f$?

3. Même question que précédemment avec deux points C et D d'abscisses positives puis avec le point E d'abscisse –2 et le point F d'abscisse 2.

4. Pour tout point M de $\mathscr{C}_f$, on note T_M la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point M. Tracer T_A, T_B, T_C, T_D, T_E et T_F.
Donner la position de chaque tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$.

5. On dit que M est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si T_M traverse $\mathscr{C}_f$ en ce point. Existe-t-il un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ ici ? Si oui lequel ?

6. Faire une synthèse des résultats obtenus.

Coup de pouce
- Pour chaque question, bien distinguer les intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$.
- Pour la dernière question, s'aider d'un tableau à deux colonnes présentant les résultats pour chaque intervalle.

↪ Cours 1 p. 72 et 3 p. 76

20 min Thème 1

2 Étudier une fonction de production

Jeff est couturier. Il crée sa propre entreprise et, après avoir fait faire des études de marché, il décide de produire au maximum 100 pièces par an. L'entreprise en étant à ses débuts, il projette d'augmenter sa production au fur et à mesure, mais se fixe un objectif d'au moins 50 pièces pour la 1e année. On modélise la production semestrielle de cet artisan par une fonction f de la variable t où t est le temps hebdomadaire en heures qu'il consacre à produire des pièces, f est donc définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. On considère que f est définie par la relation $f(t) = 20\sqrt{t}$.

a) Au 1er semestre, Jeff se consacre entièrement aux papiers administratifs et ne produit rien. Au 2nd semestre il décide de rattraper ce retard en consacrant 20 heures hebdomadaires à la production. Calculer la production obtenue en fin d'année. Cette stratégie semble-t-elle efficace ?

b) Même question que précédemment en considérant 10 heures de travail consacrées à la production pour le 1er semestre et 10 heures de travail consacrées à la production pour le 2nd semestre.

c) Soit t un réel de [0 ; 1]. Établir une inégalité entre $tf(4)$, $(1 - t)f(16)$ et $f(t \times 4 + (1 - t) \times 16)$.

d) Tracer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en différents points. Quelle est leur position par rapport à $\mathscr{C}_f$?

Coup de pouce
- Calculer $f(0)$ puis $f(20)$ et faire la moyenne des deux résultats obtenus.
- La stratégie est efficace si la production moyenne obtenue est supérieure à 50.

2. Reprendre la question **1.** en considérant que f est définie par la relation $f(t) = \dfrac{4}{25}t^2$.

3. D'après **1.** et **2.** quelle stratégie devrait adopter Jeff ? Quelle(s) différence(s) existe-t-il entre les fonctions des questions **1.** et **2.** ?

↪ Cours 1 p. 72

TICE 10 min

3 Manipuler dérivées première et seconde

1. On considère la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

2. a) Déterminer l'expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

b) Dresser les tableaux de variations et de signe de la fonction f' en utilisant vos connaissances sur $x \mapsto x^2$.

3. On note f'' (et on lit « f seconde ») la fonction dérivée de la fonction f'.

Déterminer le signe de f''.

4. Recopier et compléter le tableau ci-contre.

5. On dit que M est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si $f''(x)$ change de signe en ce point.
Existe-t-il un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ ici ? Si oui lequel ?

x appartient à l'intervalle	$]-\infty\,;0]$	$[0\,;+\infty[$
Sécantes	en dessous de $\mathscr{C}$	au-dessus de $\mathscr{C}$
Tangentes	au-dessus de $\mathscr{C}$	en dessous de $\mathscr{C}$
Variations de f'		
Signe de $f''(x)$		
Fonction f…	concave	convexe

↪ Cours 2 p. 74 et 3 p. 76

25 min Thème 5

4 Reconnaître une courbe de Lorenz

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie et croissante sur $[0\,;1]$,
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$,
- pour tout x de $[0\,;1]$, $L(x) \leqslant x$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1.$$

a) Déterminer la dérivée de f notée f'.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;1]$.

c) Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0\,;1]$. Démontrer que $f(x) \leqslant x$ sur $[0\,;1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e} - 2)x + 1.$$

a) Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;1]$.

b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

c) On pose $h(x) = x - g(x)$. On donne ci-dessous le tableau de signe de $h'(x)$.

x	0		$\ln(\mathrm{e}-1)$		1
Signe de $h'(x)$		+	0	−	

En déduire le tableau de variations de h (on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(\mathrm{e}-1))$) puis que pour tout x de $[0\,;1]$, $g(x) \leqslant x$.

3. En déduire que les courbes représentatives de f et de g sont toutes deux des courbes de Lorenz.

D'après Bac ES Métropole 2003

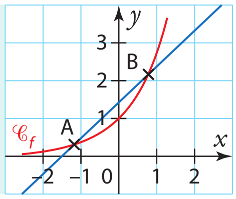
↪ Cours 2 p. 74

Cours

1 Convexité d'une fonction

Définition Sécante

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Soit A et B deux points de $\mathscr{C}_f$ alors la droite (AB) est appelée sécante de $\mathscr{C}_f$.



Définitions Convexité et concavité

Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. On dit que :

① f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.

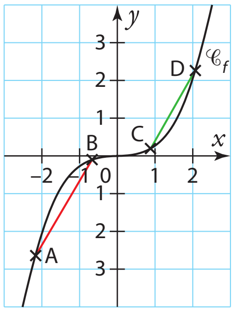
② f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.

Propriété Fonctions usuelles

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.
La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-contre.
Alors le segment [CD] est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x positif donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et le segment [AB] est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x négatif donc f est concave sur $\mathbb{R}_-$.



Propriété Position par rapport aux sécantes

- **Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a :**

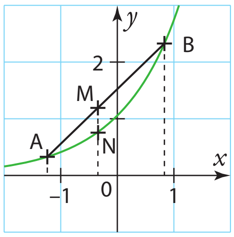
$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

- **Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0\,;1]$ on a :**

$$f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Démonstration

Soit deux réels x et y et soit t un réel de $[0\,;1]$. Soit $A(x\,;f(x))$ et $B(y\,;f(y))$. Alors le point $M(tx + (1-t)y\,;tf(x) + (1-t)f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de $\mathscr{C}_f$.
f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$.
M est donc situé au-dessus du point $N(tx + (1-t)y\,;f(tx + (1-t)y))$.
D'où $f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$.



Remarque Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est une fonction strictement convexe ou strictement concave sur I.

Propriété Concavité

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^x$. La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc $f = x \mapsto -e^x$ est concave.

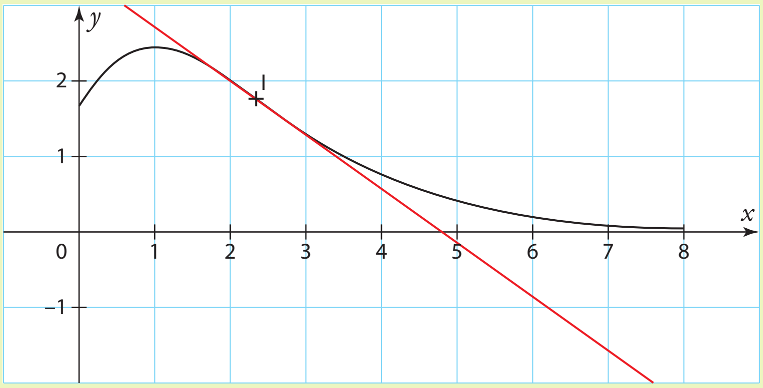
EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Lire les intervalles où f est convexe ou concave sur sa représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur [0 ; 8] dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.



Solution

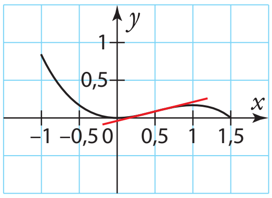
Sur [0 ; 2,4], la courbe de f est au-dessus de ses sécantes donc f est concave sur cet intervalle.
De même sur [2,4 ; 8], la courbe de f est en dessous de ses sécantes donc f est convexe sur cet intervalle. 1

Conseils & Méthodes

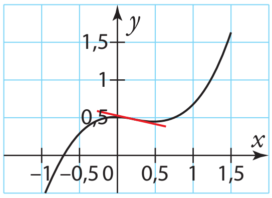
1 Repérer la position des sécantes par rapport à la courbe. Si elles ne sont pas apparentes, se servir d'une règle et la déplacer le long de la courbe.

À vous de jouer !

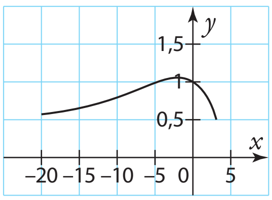
1 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



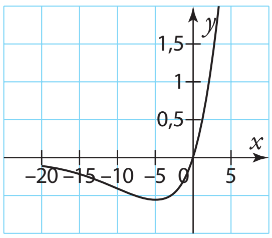
2 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



3 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



4 À l'aide du graphique ci-dessous, déterminer les intervalles où f est convexe, où f est concave.



↪ Exercices 31 à 34 p. 82

2 Fonction convexe et dérivées première et seconde

Théorème Fonction convexe, fonction concave

Soit I un intervalle réel.

Soit *f* une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- ***f* est convexe** sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, **f' est croissante.**
- ***f* est concave** sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, **f' est décroissante.**

Exemple

Soit *f* la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a dressé le tableau de variations de la fonction f'.

Alors *f* est concave sur $]-\infty\,;3]$ et convexe sur $[3\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Variations de f'	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Propriété Dérivée première de fonctions usuelles

Soit u la fonction dérivable sur I, alors u^2 et e^u sont deux fonctions dérivables sur I, et :

$$[u^2]' = 2u'u$$

$$\text{et } e^u = u'e^u.$$

Exemples

① $(2x^3 - x^3 + 3x - 2)^2)' = 2(6x^2 - 2x + 3)(2x^3 - x^2 + 3x - 2)$

② $(e^{5x^4})' = 20x^3e^{5x^4}$ ③ $(e^{5x^7})' = e^{5x-7}$

Définition Dérivée seconde

Soit *f* une fonction supposée deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.
On appelle dérivée seconde de la fonction *f*, notée f'', la dérivée de f'.

Exemple

Soit *f* la fonction définie (et dérivable deux fois) sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 1$.

Alors $f'(x) = 3x^2 + 4 \times (2x) + 5 = 3x^2 + 8x + 5$ et $f''(x) = 6x + 8$.

Remarques

① La dérivée seconde d'une fonction affine est toujours nulle.

② La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, donc à sa dérivée seconde également.

Théorème Convexité et dérivée seconde

Soit *f* une fonction supposée deux fois dérivable et f' sa fonction dérivée.

- ***f* est convexe** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, **f'' est positive.**
- ***f* est concave** sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, **f'' est négative.**

Démonstration

f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Donc *f* est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

Exercices résolus

Méthode 2 Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

Énoncé

Soit f une fonction deux fois dérivables et f' sa dérivée dont on donne le tableau de variations ci-contre.

1. Déterminer les intervalles pour lesquels f est convexe puis ceux pour lesquels f est concave.

2. En déduire le signe de la fonction f'', dérivée seconde de f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Variations de f'		↗	88	↘	-162	↗	

Solution

1. f' est décroissante sur $[-2\,;3]$ donc f est concave sur cet intervalle. De même f' est croissante sur $]-\infty\,;-2]\cup[3\,;+\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle. 1

2. $f''(x) \leqslant 0$ sur $[-2\,;3]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;-2]\cup[3\,;+\infty[$. 2

Conseils & Méthodes

1 Identifier si le tableau concerne f, f' ou f'' pour adopter la bonne stratégie.

2 f' est croissante ssi f'' est positive.

À vous de jouer !

5 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f'		↘	0	↗	$\frac{1}{6}$	↘	

6 Étudier la convexité de f à l'aide du tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		↘	$-\frac{1}{8}$	↗	

↪ Exercices 35 à 41 p. 82

Méthode 3 Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+1$.

Déterminer le (ou les) intervalle(s) où f est convexe, puis celui (ou ceux) où f est concave.

Solution

1. Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x)=x^2-3x+2$ et $f''(x)=2x-3$. 1

2. 2

- $f''(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 2x-3\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant\frac{3}{2}$ donc f est convexe sur $\left[\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$. 3
- $f''(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow 2x-3\leqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant\frac{3}{2}$ donc f est concave sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right]$. 3

Conseils & Méthodes

1 Calculer $f''(x)$.

2 Déterminer son signe.

3 En déduire la convexité de f.

À vous de jouer !

7 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=xe^{-x}$.

8 Étudier algébriquement la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\sqrt{x}-3e^{x+2}$.

↪ Exercices 42 à 46 p. 82

Cours

3 Tangente et point d'inflexion

Propriété Dérivée seconde et tangente

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f''.
Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c03-04

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.

$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0)$

Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :

si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.

si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.

De plus, $\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 + f'(x_0)\,x_0 - f(x_0) = 0$.

On obtient le tableau de variations.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	↘	0	↗

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ autrement dit, la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Conclusion : si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Remarques

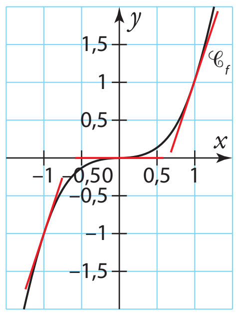
1. Si f'' est négative sur I, alors la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes.
2. Attention à la réciproque, une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivables.

Définition Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur cet intervalle dans un repère orthonormé.
Soit A un point de $\mathscr{C}_f$ et T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
On dit que A est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ si, au point A, la courbe $\mathscr{C}_f$ traverse T_A.

Exemple

Soit f la fonction cube et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère. Alors l'origine du repère O(0 ; 0) est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$. En revanche les tangentes en –1 et en 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées (–1 ; f(–1)) et (1 ; f(1)) ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriété Point d'inflexion

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut que f'' change de signe donc que f' change de variation.

Exemple

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

Donc $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$ et $f''(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \leqslant 0$.

Il y a changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité, il y a donc en O(0 ; 0) un point d'inflexion.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

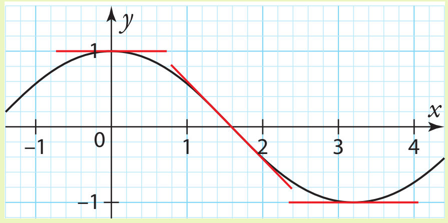
Méthode 4 Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

Énoncé

On considère une fonction f définie sur $[-1{,}4 ; 4{,}45]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1. Déterminer graphiquement le (ou les) intervalle(s) où f est convexe puis celui (ou ceux) où f est concave.

2. En déduire le (ou les) point(s) d'inflexion éventuel(s).



Solution

1. Sur $[-1{,}4 ; 1{,}6]$, la courbe est en dessous de ses tangentes : f est concave.
Sur $[1{,}6 ; 4{,}45]$, la courbe est au-dessus de ses tangentes : f est convexe. 1

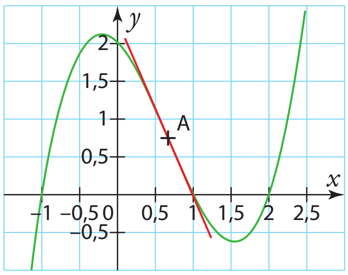
2. La courbe change de convexité pour $x = 1{,}6$ (la tangente traverse la courbe en ce point) et $f(1{,}6) = 0$. Donc le point d'inflexion de la courbe a pour coordonnées $(1{,}6 ; 0)$.

Conseils & Méthodes

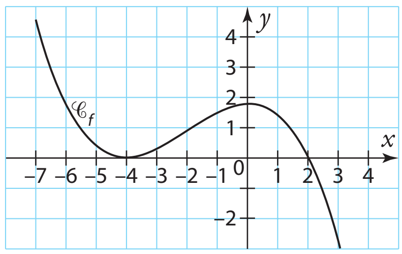
1 Repérer la position des tangentes par rapport à la courbe. Si elles ne sont pas apparentes, se servir d'une règle et la déplacer le long de la courbe.

À vous de jouer !

9 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



10 Lire les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de la courbe représentée.



↪ Exercices 47 à 49 p. 83

Méthode 5 Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 8x + 17)e^x$. Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) éventuel(s) de la courbe représentative de la fonction f notée $\mathscr{C}_f$.

Solution

Par calcul, on trouve $f'(x) = (x^2 - 6x + 9)e^x$
et $f''(x) = (x^2 - 4x + 3)e^x = (x - 1)(x - 3)e^x$. 1

En étudiant le signe de $f''(x)$, on trouve que les points d'inflexion sont atteints pour $x = 1$ et $x = 3$. 2

Comme $f(1) = 10e$ et $f(3) = 2e^3$, les coordonnées des points d'inflexion sont $(1 ; 10e)$ et $(3 ; 2e^3)$.

Conseils & Méthodes

1 Dériver deux fois la fonction puis étudier le signe de la dérivée seconde.

2 Le point d'inflexion se trouve au moment d'un changement de signe pour f''.

À vous de jouer !

11 Soit f la fonction définie par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.
Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
Déterminer algébriquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s) de $\mathscr{C}_f$.

↪ Exercices 50 à 54 p. 83

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 6 Reconnaître une fonction convexe, concave, un point d'inflexion, sur une représentation graphique

Cours 1 p. 72 et 3 p. 76

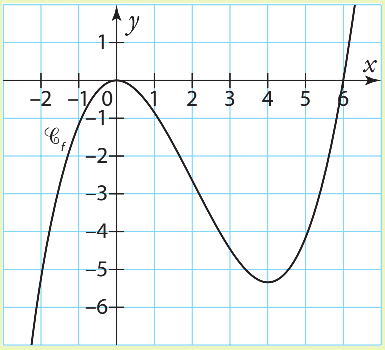
Énoncé

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ dont on donne la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ ci-contre.
Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels f est convexe,

b) les intervalles sur lesquels f est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_f$.



Solution

Méthode par les sécantes :

• Placer un point A sur la courbe puis un point B « proche de A » sur la courbe.

• Faire varier la position de B jusqu'à ce que le segment [AB] traverse la courbe.

• Faire varier le point A jusqu'à trouver une position pour laquelle, quelle que soit la sécante [AB] partant de A, la corde [AB] ne traverse plus $\mathscr{C}_f$. **1**

Méthode par les tangentes :

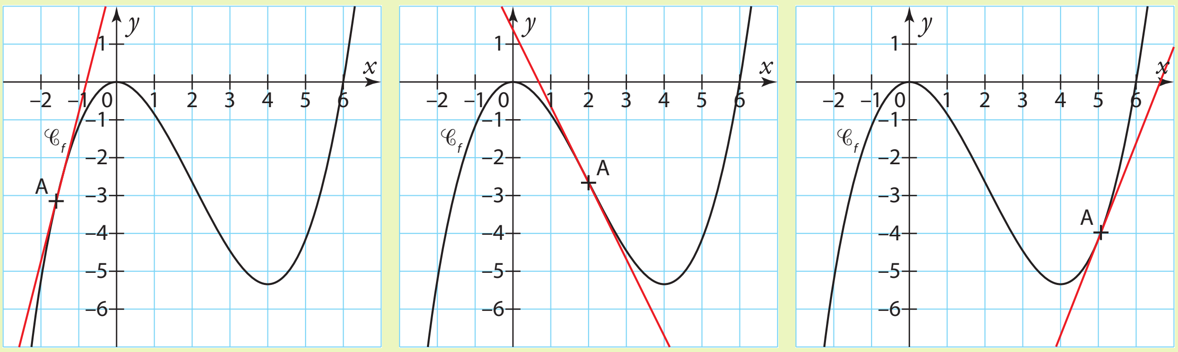
• Placer un point A sur la courbe et à l'aide d'une règle, tracer la tangente T_A à $\mathscr{C}_f$ au point A.

• Faire varier la position de A jusqu'à ce que la tangente T_A traverse la courbe. **2**

Conseils & Méthodes

1 La méthode par les sécantes est beaucoup plus longue que celle par les tangentes et demande de faire varier deux paramètres : les positions de A et de B.

2 Placer la règle « le long de la courbe » pour obtenir une bonne approximation de la tangente.



Graphiquement, on observe que $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes sur $]-\infty\,;2]$ puis au-dessus de ses tangentes sur $[2\,;+\infty[$.
Donc : **a)** f est convexe sur $[2\,;+\infty[$, **b)** f est concave sur $]-\infty\,;2]$, **c)** $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion pour $x = 2$.

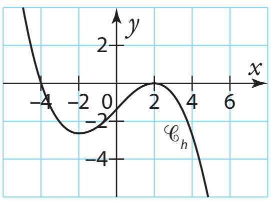
À vous de jouer !

13 Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels h est convexe,

b) les intervalles sur lesquels h est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_h$.

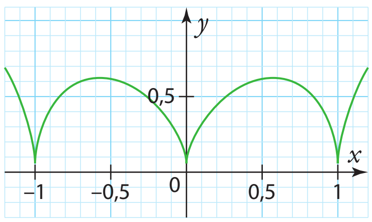


14 Graphiquement, déterminer :

a) les intervalles sur lesquels g est convexe,

b) les intervalles sur lesquels g est concave,

c) les éventuels points d'inflexion de $\mathscr{C}_g$.



Exercices 55 à 56 p. 84

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c03-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Étudier la convexité d'une fonction

↪ Cours 2 p. 74 et 3 p. 76

Énoncé

Dans une usine, on modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, d'un objet par la fonction convexe C_T définie sur [0 ; 18[par $C_T(x) = 5x\mathrm{e}^{-0,2x}$ où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines.

On admet que C_T est dérivable sur [0 ; 18[et on note C_T' sa dérivée.

1. Quel est le coût total de production pour 500 objets ?

2. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C_M dérivée de la fonction C_T autrement dit $C_M(x) = C_T'(x)$.

a) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.

b) Calculer le coût marginal pour une production de 500 objets puis de 1500 objets. On arrondira les résultats à l'euro.

3. Soit C_M' la fonction dérivée de C_M. On a donc $C_M' = C_T''$.

a) Exprimer $C_M'(x)$ en fonction de x puis étudier son signe sur [0 ; 18[.

b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle [0 ; 10] » ?

c) Que pensez-vous de l'affirmation : « il y a accélération du coût total de production sur [0 ; 10] » ?

D'après Bac ES Polynésie 2014 et ES Liban 2015.

Solution

1. $f(5) = 25\mathrm{e}^{-1} \approx 9{,}20$ milliers d'euros. 1

2. a) $C_M(x) = C_T'(x) = 5\mathrm{e}^{-0,2x} + 5x(-0{,}2)\mathrm{e}^{-0,2x} = \mathrm{e}^{-0,2x}(5 - x)$

b) $C_M(5) = \mathrm{e}^{-0,2\times 5}(5 - 5) = 0$
et $C_M(15) = \mathrm{e}^{-0,2\times 15}(5 - 15) = -10^{\mathrm{e}-3} \approx 0{,}498 \approx 498$ euros. 1

3. a) $C_M'(x) = -0{,}2\mathrm{e}^{-0,2x}(5 - x) + \mathrm{e}^{-0,2x}(-1) = -\mathrm{e}^{-0,2x}(1 - 0{,}2x + 1)$
$= -\mathrm{e}^{-0,2x}(2 - 0{,}2x) = \mathrm{e}^{-0,2x}(0{,}2x - 2)$. 2

Pour tout $x \in [0 ; 18[$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$. De plus $0{,}2x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{2}{0{,}2} = 10$.

Donc $C_M'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 10$ et $C'_M(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 10$.

b) La dérivée du coût marginal étant négative sur [0 ; 10] alors le coût marginal est décroissant sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 3

c) La dérivée du coût marginal est négative sur [0 ; 10] et correspond à la dérivée seconde du coût total de production. Donc il y a décélération du coût total de production sur [0 ; 10] donc l'affirmation est fausse. 4

Conseils & Méthodes

1 Faire attention aux unités de x et de $f(x)$.

2 Pour factoriser, souligner les facteurs communs.

3 Faire le lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction.

4 Faire le lien entre fonction, dérivée et dérivée seconde et leurs interprétations.

À vous de jouer !

15 On modélise le rythme de croissance d'un PIB (en milliard) par la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020.
Déterminer le moment où la croissance commence à ralentir.

16 On modélise la vitesse de production d'un objet par la dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$ où x représente le mois à partir du 1er janvier 2020.
Déterminer le moment où la vitesse diminue.

↪ Exercices 57 à 72 p. 84

Exercices apprendre à démontrer

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c03-04

La propriété à démontrer

Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

On souhaite démontrer cette propriété en utilisant une fonction ϕ qui représenterait l'écart entre la courbe et la tangente en x_0.

Comprendre avant de rédiger

Que peut-on conclure du fait que f'' soit positive ? → f'' est positive si et seulement si f est croissante.
Quelle est l'équation d'une tangente au point x_0 ? → $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Comment traduire mathématiquement l'expression « la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes » ?
→ Cela revient à dire que $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Pour montrer une inégalité telle que $A \geqslant B$, il faut montrer que le signe de la différence $A - B$ est positif.

Rédiger

La démonstration rédigée

Étape 1 Noter les éléments de l'énoncé et les hypothèses faites au départ.
→ Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde. On admet que f'' est positive sur un intervalle I.

Étape 2 Étudier le signe de la différence entre l'équation de la courbe et celle de la tangente en x_0 : $f(x) - y$.
→ Soit ϕ la fonction définie sur I par :
$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$
$\quad = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$.

Étape 3 Repérer les éléments constants et ceux qui dépendent de x.
→ Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :
$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Étape 4 Rappeler le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction. En déduire le signe de $\phi'(x)$.
→ Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :
si $x \geqslant x_0$ alors $f'(x) \geqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geqslant 0$.
si $x \leqslant x_0$ alors $f'(x) \leqslant f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leqslant 0$.

Étape 5 Évaluer ϕ en son minimum x_0.
→ De plus, $\phi(x_0) = f(x0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$.

Étape 6 Créer un tableau de variations de ϕ pour avoir le valeur de son minimum.
→

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $\Phi'(x)$	$-$		$+$
Variations de Φ	↘	0	↗

Étape 7 Avec le signe de $\phi(x)$ on déduit l'inégalité.
→ Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Étape 8 Rédiger une conclusion.
→ Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Pour s'entraîner

Montrer que si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.