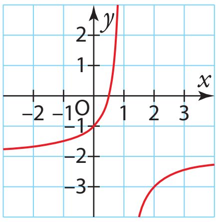
Exercices calculs et automatismes

18 Limites et asymptotes

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ suivante représentant une fonction f.



Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation :

a $x=-2$ b $y=-2$ c $x=1$ d $y=1$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale :

a $x=-2$ b $y=-2$ c $x=1$ d $y=1$

3. D'après la courbe $\mathscr{C}_f$, peut-on dire que :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=-2$ b $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=1$

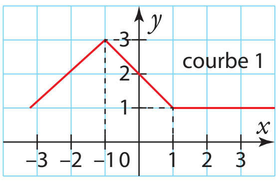
c $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)=+\infty$ d $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f=+\infty$

19 Continuité en un point

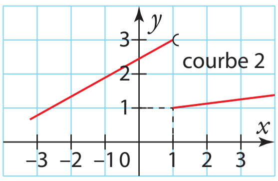
Méthode Comment reconnaître la continuité sur une courbe ?

On donne les courbes suivantes.

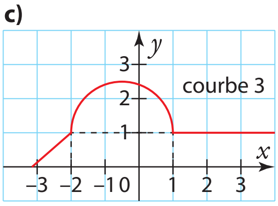
a)



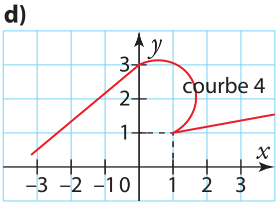
b)



c)



d)



Parmi ces courbes quelles sont celles qui représentent une fonction continue en 1 ?

20 Opération sur les limites (1)

On donne les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x)=-\infty$$

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

On peut conclure que :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)+g(x)=0$ b $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x)=-\infty$

c $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)-g=+\infty$ d $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$

21 Opération sur les limites (2)

On donne les limites suivantes.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g(x)=0^-$$

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

On peut conclure que :

a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)+g(x)=+\infty$

b $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x)=-\infty$

c $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

d $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)}=0$

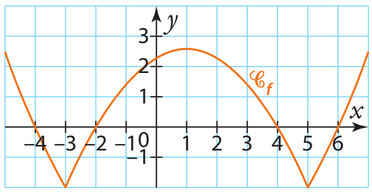
22 Continuité

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

	V	F
a) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \dfrac{x-5}{2-x}=+\infty$	☐	☐
b) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{2x^2+1}{1-x}=-\infty$	☐	☐
c) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \dfrac{2x+1}{(x+1)^2}=+\infty$	☐	☐

23 Théorème des valeurs intermédiaires

On donne la représentation d'une fonction f sur $I=[-5\,;7]$.



1. Justifier que la fonction f est continue sur I.

2. Donner et justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$:

a) dans $[1\,;5]$.

b) dans $[-1\,;1]$.

c) dans I.

24 Tableau de variations et équation

Méthode Comment montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$?

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Exercices d'application

Conjecturer une limite

Méthode 1 p. 45

25 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

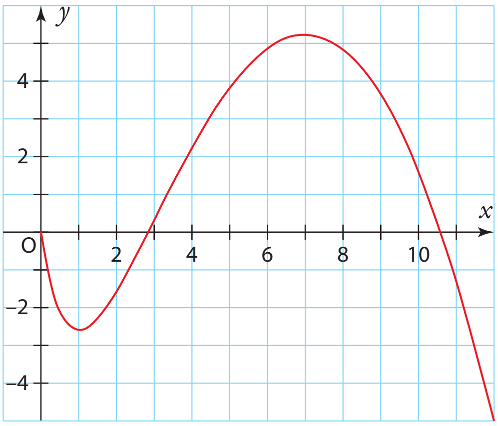
$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-2 ; 2]$.

2. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$?

3. Comment peut-on le vérifier ?

26 On donne la représentation d'une fonction f suivante définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.



1. Que conjecturer pour la limite de la fonction f en $+\infty$?

2. Si l'on continue la courbe, est-possible d'avoir $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=-6$? Justifier.

27 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

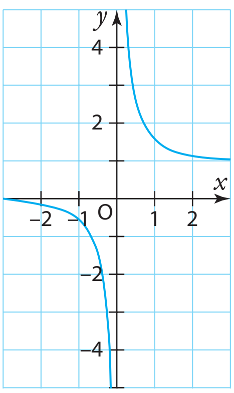
$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice.

2. a) Que peut-on conjecturer sur la limite de f en 1 ?

b) Interpréter graphiquement cette limite ?

28 On donne la représentation d'une fonction f suivante définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.



1. Conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Que peut-on déduire géométriquement ?

2. a) Conjecturer les limites de la fonction f en 1 en valeurs supérieures et en valeurs inférieures.

b) Que peut-on déduire géométriquement ?

c) La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Pourquoi ?

29 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x\,e^x}{e^x-1}.$$

1. Tracer la fonction f sur votre calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-1 ; 6]$.

2. a) Conjecturer la limite en 0.

b) La fonction f est-elle définie en 0 ?

30 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\cos(x)-1}{x}.$$

1. Tracer la fonction f sur votre calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [-5 ; 5]$ et $y \in [-2 ; 2]$.

2. a) Conjecturer la limite en 0.

b) La fonction f est-elle définie en 0 ?

Déterminer une limite en un point

Méthode 2 Méthode 3 p. 47

31 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x-1}{2-x} \text{ et } a=2.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

32 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{1-2x}{(x+3)^2} \text{ et } a=-3.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

33 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1} \text{ et } a=0.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

34 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x^3+1}{x+1} \text{ et } a=-1.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

35 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-1} \text{ et } a=0.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

36 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{3x^3+1}{x+1} \text{ et } a=-1.$$

Déterminer la limite à gauche et à droite de la valeur a donnée, en justifiant le signe du dénominateur.

Déterminer une limite en l'infini

Méthode 4 p. 49

37 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 2$

2. $f(x) = 1 - x + \dfrac{2}{x+1}$

3. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 5}$

4. $f(x) = e^x - 2$

38 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

2. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{2x+1}$

39 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 1$

2. $f(x) = \dfrac{-2}{1-\sqrt{x}}$

3. $f(x) = e^x + x - 4$

4. $f(x) = (2x-1)e^x$

40 Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes en expliquant la méthode utilisée.

1. $f(x) = \dfrac{-x^3+x}{x-1}$

2. $f(x) = \dfrac{3x+5}{x^2+x}$

3. $f(x) = \dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+x+2}$

Utiliser un théorème d'encadrement

Méthode 5 p. 51

41 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{4}}\cos(x).$$

1. a) Tracer la fonction f et les fonctions $x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ et $x \mapsto -e^{-\frac{x}{4}}$ sur une calculatrice. On prendra comme fenêtre $x \in [0\,;10]$ et $y \in [-1\,;2]$

b) Conjecturer la limite de f en $+\infty$.

2. a) Encadrer la fonction sur $[0\,;+\infty[$

b) Confirmer la conjecture de la question **1. b)**

42 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - \sin x$$

À l'aide d'une inégalité déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

Méthode 6 p. 53

43 Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

1. Montrer que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Dénombrer le nombre de solution $f(x) = 0$

44 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$$

dont les variations sont données par le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.

b) Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

45 Une fonction f définie et dérivable sur $[1\,;13]$ a pour tableau de variations le tableau suivant.

x	1		4		10		13
f	2	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	4

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $[1\,;13]$.

2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x)=5$. Justifier.

3. Justifier que l'équation $f(x) = \dfrac{5}{2}$ admet une unique solution α.

46 Une fonction f définie et dérivable sur $[-5\,;5[$ a pour tableau de variations le tableau suivant.

x	-5		-2		0		3		5
f	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1. Justifier la continuité de la fonction f sur $I = [-5\,;5[$.

2. Discuter, en vous justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ selon les valeurs de k.

Exercices d'entraînement

Fonction définie par un tableau de variations

47 On donne le tableau de variations d'une fonction *f*.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ -1	↗ 2

1. À partir du tableau de variations, donner les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2. La fonction *f* admet-elle une limite en –1 ? Pourquoi ?
3. Que peut-on déduire géométriquement de ces limites ?
4. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f*. On fera figurer les éléments caractéristiques du tableau de variations sur la courbe.

48 On donne le tableau de variations d'une fonction *f*.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f	0 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	1

1. Déterminer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Combien de solutions, l'équation *f*(*x*) = 0, possède-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles se trouvent-elles ?
3. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction *f*. On fera figurer les asymtotes à la courbe.

49 Soit *f* une fonction définie et dérivable sur ℝ. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de *f*. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction *f* sur ℝ.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f	1 ↘	-1	↗ $+\infty$

On donne *f*(–2) = *f*(5) = 0 et *f*(10) = 3.
1. Dresser sans justification le tableau donnant le signe de *f*(*x*) suivant les valeurs du nombre réel *x*.
2. a) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.
b) Justifier que l'équation *f*(*x*) = 2 admet une unique solution sur ℝ.

Limite d'une fonction rationnelle

Méthode 7 p. 54

50 Soit la fonction *f* définie sur I = ℝ\{–2} par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition I.
2. Interpréter géométriquement les limites obtenues.

51 Soit la fonction *f* définie sur *I* = ℝ\{1}par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{1-x}.$$

1. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition I.
2. Interpréter géométriquement les limites obtenues.
3. Vérifier sur une calculatrice la véracité des résultats obtenus. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-4\,;6]$ et $y \in [-5\,;5]$.

52 Soit la fonction *f* par :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x^2+2x+1}.$$

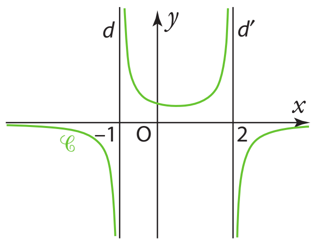
1. a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*.
b) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition *I*.
c). La fonction *f* admet-elle une limite en –1 ? Pourquoi ?
2. Vérifier sur une calculatrice la véracité des résultats obtenus. On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-6\,;6]$ et $y \in [-3\,;8]$.

53 On donne trois fonctions et une représentation graphique $\mathscr{C}$ de l'une d'elle. Retrouver la fonction qui est représentée en expliquant ce qui permet d'éliminer les deux autres.

$$f_1(x) = \frac{-1}{(x-1)(x+2)}$$

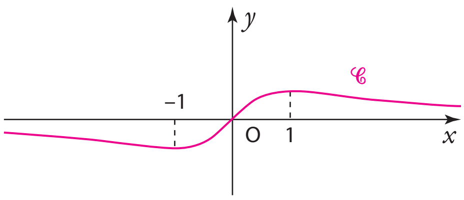
$$f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

$$f_3(x) = \frac{-1}{(x+1)(x-2)}$$



54 On donne trois fonctions et une représentation graphique $\mathscr{C}$ de l'une d'elle. Retrouver la fonction qui est représentée en expliquant ce qui permet d'éléminer les deux autres.

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad f_2(x) = xe^{-x} \qquad f_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$$



Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Méthode 8 p. 55

55 On considère la fonction f définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

A ▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction g

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$.

3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B ▶ On admet que sur I :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 1.

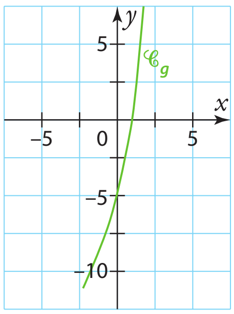
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur I puis dresser le tableau de variations de f.

56 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x}).$$

A ▶ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7.$$



1. Déterminer les limites de g en $\pm\infty$.

2. Montrer que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\alpha \in [0\,;1]$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide d'une calculatrice.

4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

B ▶ 1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

2. On admet que $f'(x) = g(x)e^{-x}$

Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer la fonction f sur une calculatrice.

On pourra prendre comme fenêtre $x \in [-2\,;5]$ et $y \in [-3\,:\,5]$.

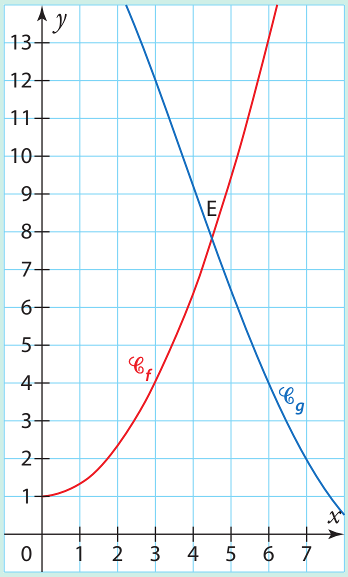
4. Résoudre graphiquement sur la calculatrice l'inéquation $f(x) > 2$ sur $\mathbb{R}$.

On donnera la solution avec une précision à 10^{-2} près.

57 On considère les fonctions f et g définies et dérivables sur l'intervalle $[0\,;8]$ par : Thème 2

$$f(x) = \frac{x^2}{3} + 1 \text{ et } g(x) = \frac{x^3}{27} - \frac{4x^2}{9} - x + 18.$$

A ▶ 1. On donne les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Lire avec la précision du graphique une valeur approchée des coordonnées du point E.

2. Pour déterminer de façon plus précise les coordonnées du point E, on pose la fonction h définie sur $[0\,;8]$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a) Montrer que le problème consiste à résoudre $h(x) = 0$.

b) On admet que la fonction h est croissante sur $[0\,,8]$.

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;8]$.

c) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur de α au centième.

B ▶ Les fonctions f et g modélisent respectivement l'offre et la demande d'un produit :

• $f(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles que les producteurs sont prêts à ventdre au prix unitaire de x centaines d'euros ;

• $g(x)$ est la quantité, exprimée en milliers d'articles, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x centaines d'euros.

On appelle prix unitaire d'équilibre du marché la valeur de x pour laquelle l'offre est égale à la demande.

1. Quel est, exprimé à l'euro près, arrondi à la centaine d'articles près, le prix unitaire d'équilibre du marché ?

2. Quel est le nombre d'articles correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercices d'entraînement

58 Économie Thème 1

La fonction de demande d'un produit électronique de type oreillette bluetooth est modélisée sur $[0\,;+\infty[$ par la fonction f définie par : $f(x) = 1\,000(x+5)\,\mathrm{e}^{-0{,}2x}$,
où $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est de x €.
En dessous de quel prix unitaire, arrondi au au centième, la demande est-elle supérieure à 3 000 objets ? Exposer la réponse à cette question à l'oral.

Méthode de dichotomie

59 Algo Thème 1

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;3]$.

3. On veut obtenir un encadrement de α. On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[1,3]$ en deux intervalles $I_1 = [1\,;2]$ et $I_2 = [2\,;3]$.

a) Calculer $f(2)$. Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.

b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $I_3 = \left[2\,;\frac{5}{2}\right]$ et $I_4 = \left[\frac{5}{2}\,;3\right]$. Calculer $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

4. On décide d'automatiser ce procédé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieur à 10^{-3}.

On donne le programme en **Python** incomplet suivant.

```
def f(x):
    return ...
def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=...
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=...
        else:
            ...=c
        n=n+1
    return a,b,n
```

a) Compléter l'algorithme pour qu'il calcule la valeur de $f(x)$ et qu'il réitère le procédé.

b) Que représente la variable `n` ?

c) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α. En combien d'itérations est-il obtenu ?

60 Algo Thème 1

Il s'agit de déterminer une valeur approchée de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ par une méthode de dichotomie.

1. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [0\,;1]$.

2. On veut obtenir un encadrement de α.

On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[0\,;1]$ en deux intervalles $I_1 = \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

a) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.

b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $I_3 = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right]$ et $I_4 = \left[\frac{3}{4}\,;1\right]$.

Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

3. On décide d'automatiser ce procédé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

On donne le programme en **Python** suivant.

```
1   def f(x):
2       return x**3+x-1
3   def dicho(a,b):
4       n=0
5       while b-a>=10**(-3):
6           c=(a+b)/2
7           if f(a)*f(c)<0:
8               b=c
9           else:
10              a=c
11          n=n+1
12      return a,b,n
```

a) Que représentent les paramètres `a` et `b` de la fonction dicho ?

b) Quelles valeurs doit-on utiliser pour `a` et pour `b` lorsqu'on demande à exécuter la fonction dicho pour résoudre $f(x) = 0$.

c) Que représente la variable `n` ?

d) Expliquer les lignes 7, 8, 9, 10 du programme.

e) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α.

En combien d'itérations est-il obtenu ?

f) Que faut-il modifier pour avoir un encadrement à 10^{-6} ?
Donner alors cet encadrement ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

61 Production

Économie

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par les fonctions f, pour le produit A, et g, pour le produit B, définies sur $I = [0\ ;\ 14]$

$$f(x) = 2000e^{-0,2x} \text{ et } g(x) = 15x^2 + 50x$$

où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont données ci-dessous.

1. Sur le graphe, qu'a-t-on représenté en abscisses ? En ordonnées ?

Par lecture graphique et avec la précision permise par le graphique, déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle I on pose :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

On admet que la fonction h est dérivable sur I.

a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

b) Montrer que, pour $x \in I$:

$$h'(x) = -400e^{-0,2x} - 30x - 50.$$

c) En déduire que la fonction h est décroissante sur I.

d) On donne $h(0) = 2\,000$ et $h(14) \approx -3\,518$.

Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α.

e) Résoudre alors $g(x) > f(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.

62 Taux d'alcoolémie

Thème 1

A ▶ Soit la fonction f définie sur $I = [0\ ;\ 12]$ par :

$$f(x) = 2xe^{-x}.$$

1. Déterminer $f'(x)$ sur l'intervalle .

2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions dans I. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.

B ▶ Le taux d'alcoolémie d'une personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'une certaine quantité d'alcool est modélisé par la fonction f :

- x représente le temps (exprimé en heure) écoulé depuis la consommation d'alcool ;
- $f(x)$représente le taux d'alcoolémie (exprimé en $g \cdot L^{-1}$) de cette personne.

1. a. Décrire les variations du taux d'alcoolémie de cette personne pendant les 12 heures suivant la consommation d'alcool.

b. À quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.

2. Le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à $0,5\ g \cdot L^{-1}$.

Une fois l'alcool consommé, au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie de l'automobiliste reprend-il une valeur conforme à la législation ?

63 Chute libre

Thème 1

La vitesse d'une parachutiste en chute libre, avant qu'il (elle) actionne son parachute est modélisée par :

$$v(t) = 50(1 - e^{-0,2t}),$$

où $v(t)$ est la vitesse, en $m \cdot s^{-1}$, du (de la) parachutiste en fonction du temps en seconde.

1. Quelle est la vitesse du (de la) parachutiste à $t = 0$?

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)$.

3. Calculer $v'(t)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction v sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Interpréter ce tableau de variations du point de vue du (de la) parachutiste.

5. Dans un article consacré à la découverte du saut en parachute, on peut lire : « Dès la sortie de l'avion et au début du saut, la vitesse de chute augmente très rapidement. puis la vitesse se stabilise aux alentours de 200 km/h. »

Justifier le propos de cet article.

Exercices bilan

64 Bénéfice

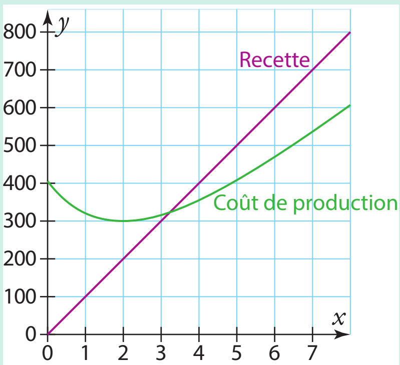
Économie · Thème 1

Une entreprise est spécialisée dans la production et la vente de peinture éco-responsable.
La production quotidienne varie entre 0 et 800 litres.
Toute la production est vendue. Les montants de la recette et du coût sont exprimés en dizaine d'euros.

1. Le graphique ci-dessous modélise les recettes et les coûts de production de l'entreprise.

a) Que représentent les abscisses sur le graphe ?

b) Que représentent les ordonnées ?



2. À l'aide du graphique, déterminer à partir de combien de litres de peinture vendus l'entreprise réalise un bénéfice.

3. Le bénéfice en dizaine d'euros correspondant à la vente de x centaines de litres de peinture est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par :

$$f(x)=25x-150\mathrm{e}^{-0,5x+1}$$

a) Donner les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f(8)$, puis en donner les valeurs arrondies au centième.

b) Montrer que la dérivée f' de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ est :

$$f'(x)=25+75\mathrm{e}^{-0,5x+1}.$$

c) Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[0\,;8]$.

d) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;8]$ puis en donner la valeur arrondie au centième.

e) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur de α à 10^{-3} près. On expliquera la méthode utilisée.

f) En déduire la quantité de peinture produite et vendue à partir de laquelle l'entreprise réalisera un bénéfice. Donner le résultat au litre près.

65 Plant de maïs

Algo · Thème 2

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps.
On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t)=\frac{a}{1+b\mathrm{e}^{-0,04t}}$$

où $h(t)$, en mètres, représente la hauteur du plant en fonction du temps t, en jours.
Les constantes a et b sont des réels positifs.
On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

1. Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

2. On suppose que la fonction h est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

a) Montrer que l'équation $h(t)=1,5$ admet une unique solution t_0.

b) À l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

D'après Bac Pondichéry 2013

66 Population de grenouilles

Thème 2

Un groupe de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.
Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ où t est le temps écoulé en années depuis 2018 :

$$P(t)=\frac{1\,000}{0,4+3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}.$$

1. Étudier les variations de la fonction P sur $[0\,;+\infty[$.

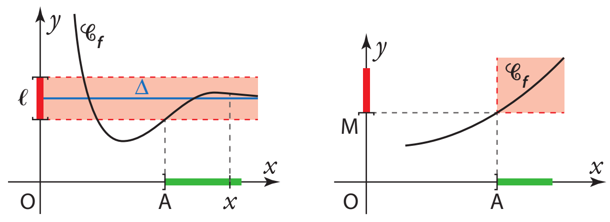
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0\in[0\,;+\infty[$ telle que $P(t_0)=2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2 000 grenouilles.

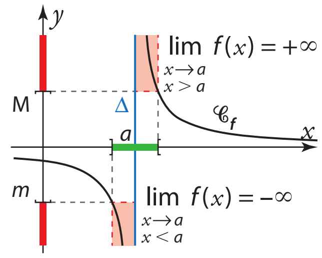
Préparer le BAC L'essentiel

Limite en l'infini



- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Limite en un point



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$

Limites des fonctions élémentaires

- **Limites en l'infini**

$f(x)$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^{ax}
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ $a > 0$ 0 $a < 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	**Non définie**	0 $a > 0$ $-\infty$ $a < 0$

- **Limites en zéro**

$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	**Non définie**

Calculs avec les limites

Par somme, produit et quotient sauf dans les cas de forme indéterminée :

Cas n° 1 « $+\infty - \infty$ », alors mettre la fonction sous la forme d'un produit.

Cas n° 2 « $0 \times \infty$ », alors mettre la fonction sous la forme d'une somme.

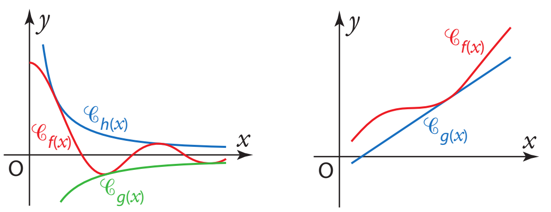
Cas n° 3 « $\frac{0}{0}$ », alors simplifier la fonction ou passer par le nombre dérivé.

Cas n° 4 « $\frac{\infty}{\infty}$ », alors mettre en facteur le terme prépondérant.

Théorème des valeurs intermediaires

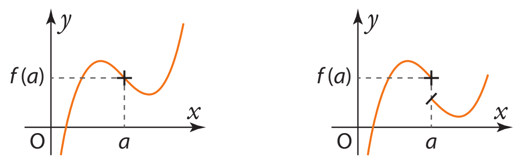
f continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

Limites par comparaison



- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Continuité



- *f* continue en *a*
- *f* discontinue en *a*
- *f* dérivable sur I $\Rightarrow$ *f* est continue sur I.

Préparer le BAC **Je me teste**

Je dois être capable de...

Je dois être capable de...	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Conjecturer et vérifier une limite	Méthode 1, 2, 3	1, 2, 25, 26, 3, 4, 31, 32, 5, 6
▶ Déterminer une limite	Méthode 4, 5, 7	7, 8, 37, 38, 9, 10, 41, 42, 14, 15, 50, 51
▶ Résoudre une équation à l'aide d'une fonction	Méthode 6	12, 13, 43, 44
▶ Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire	Méthode 8	16, 17, 55, 56

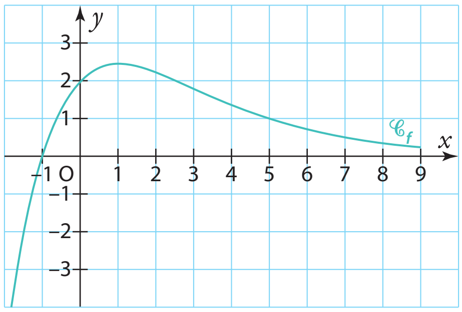
▶ EXOS **QCM interactifs** lienmini.fr/maths-c02-05

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).**

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th></tr>
<tr><td>67 Si la fonction f admet comme limite 2 en $-\infty$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation :</td><td>$x=2$</td><td>$y=2x$</td><td>$y=2$</td><td>$y=-2$</td></tr>
<tr><td>68 Soit $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$ alors la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation</td><td>$x=0$</td><td>$y=2$</td><td>$y=0$</td><td>$x=2$</td></tr>
<tr><td>69 $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+3x+5=$</td><td>$+\infty$</td><td>5</td><td>$\dfrac{3}{2}$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>70 $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1-2x}{x-1}=$</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$-2$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>71 $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-0,2x}=$</td><td>0</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$\mathrm{e}^{0,2}$</td></tr>
<tr><td>72 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-x}{1-x^2}=$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-2$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>73 Soit f définie par le tableau suivant.
L'équation $f(x)=1$:
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f & 0 & \searrow & -1 & \nearrow & +\infty \end{array}$$</td><td>n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>74 Soit f définie par le tableau suivant.
L'équation $f(x)=0$:
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & 1 & & 3 & & +\infty \\ \hline f & +\infty & \searrow & -1 & \nearrow & 3 & \searrow & 1 \end{array}$$</td><td>n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet une solution unique sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet 2 solutions sur $\mathbb{R}$.</td><td>admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>75 Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution de l'équation $x^3+2x-1=0$.</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,6</td></tr>
</table>

76 Asymptote

On donne la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



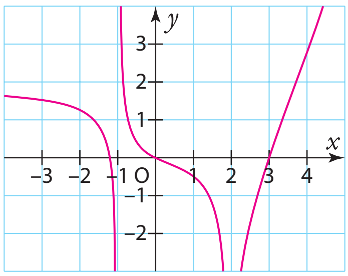
1. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2. $\mathscr{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui où et quelle est son équation ?

Méthode 1 p. 45

77 Limites

On donne le graphe représentant la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



Répondre aux questions à l'aide du graphique.

1. a) Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Donner $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

c) Donner $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2. Donner les asymptotes éventuelles aux endroits de $\mathscr{C}_f$.

Méthode 1 p. 45

78 Ensemble de définition et limites

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{1 - x}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

79 Calcul de limites (1)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{2x - 5}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x + 4}{x^2 - 4}$

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

80 Calcul de limites (2)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 2x + 5$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 5x - 2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{3x + 5}{x^2 + x}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 2}$

Méthode 2 p. 47 Méthode 5 p. 51

81 Calcul de limites (3)

Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin x \, e^x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{e^x}$

Méthode 4 p. 49

82 Solution d'une équation

Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^x - x - 3.$$

On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer les variations de la fonction f sur I puis dresser son tableau de variations.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur I.

b) Vérifier que $\alpha \in [2\,;3]$ puis déterminer par balayage d'une calculatrice un encadrement de α au dixième.

Méthode 4 p. 49

83 Étudier une fonction

Soit la fonction f définie sur $I = [0\,;5]$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x^3}.$$

Soit la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. a) Déterminer la fonction dérivée g' puis dresser le tableau de variations de la fonction g sur I.

b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans I.

c) Vérifier que $\alpha \in [1\,;2]$ puis déterminer par balayage d'une calculatrice un encadrement de α au dixième.

d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. a) Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1 + x^3)^2}.$$

b) Déterminer le signe de f' sur I puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur I.

Méthode 6 p. 53