2

Limites et continuité

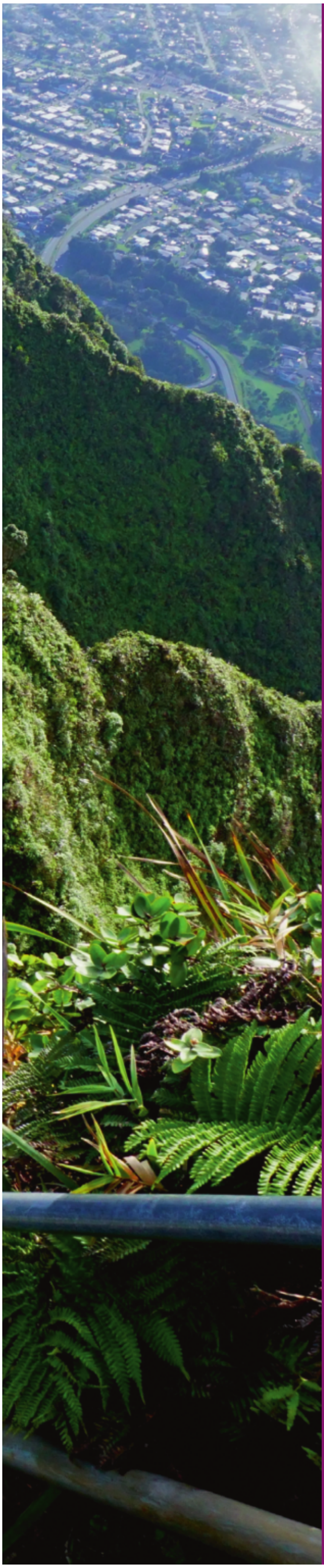
Le théorème des valeurs intermédiaires est lié à la continuité. C'est un théorème d'existence c'est-à-dire qu'il permet d'affirmer qu'une équation possède des solutions sans en donner l'expression exacte. Une fois l'existence de solution(s) démontrée, on approche la ou les solutions par encadrements successifs, c'est-à-dire par dichotomie.

Comment résoudre une équation avec le théorème des valeurs intermédiaires ?

↪ Activité 4 p. 43

VIDÉO WEB

Théorème des valeurs intermédiaires
lienmini.fr/maths-c02-01



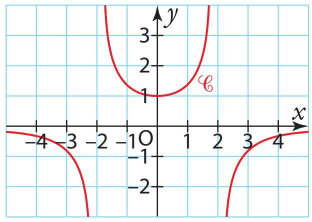
Pour prendre un bon départ

EXO
Prérequis
lienmini.fr/maths-c02-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Conjecturer une limite

On donne la représentation $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.



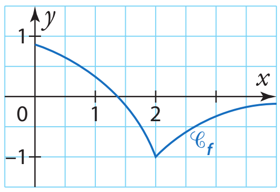
a) Lorsque x prend des valeurs proches de $+\infty$ que font les valeurs de $f(x)$? Pourquoi ? Même question quand x prend des valeurs proche de $-\infty$.

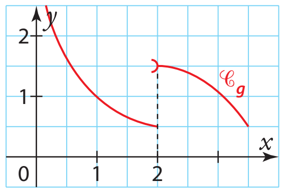
b) Lorsque x s'approche de 2 en valeurs supérieures, que font les valeurs de $f(x)$?
Et lorsque x s'approche de 2 en valeurs inférieures ?

c) Mêmes questions que **b)** lorsque x s'approche de la valeur −2.

2 Interpréter une courbe

On donne les représentations des fonctions f et g.





a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. La fonction f est-elle dérivable en 2 ? Pourquoi ?

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$. La fonction g admet-elle une limite en 2 ?

3 Tracer la courbe d'une fonction de référence

a) Tracer la courbe de la fonction carrée $x \mapsto x^2$. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et $-\infty$?

b) Tracer la courbe de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et $-\infty$? Et de sa limite en 0 ? Que représentent les axes de coordonnées pour la courbe de la fonction inverse ?

4 Utiliser un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f sur l''intervalle [−5 ; 5].

a) Pourquoi l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution ?

b) Combien de solution l'équation $f(x) = -2$ possède-t-elle de solutions ? Dans quels intervalles ?

x	−5	−1	2	5
f	−4 ↗	−1 ↘	−2 ↗	6

5 Comprendre une fonction en langage Python

Qu'affiche cet algorithme pour $f(1)$, $f(0.9)$ et $f(1.1)$?

En déduire $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

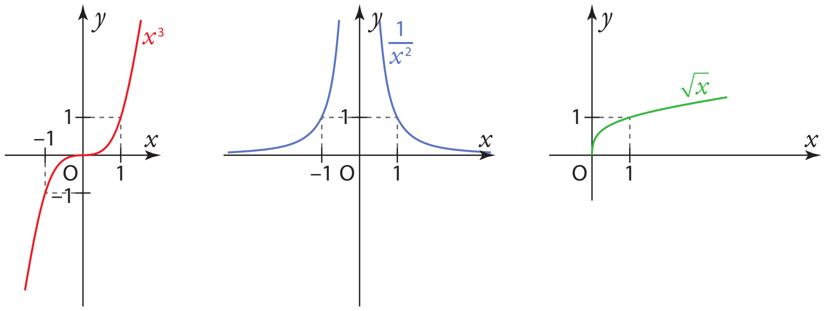
```
def f(x):
    if x<1:
        return x+1
    elif x>1:
        return -x**2+4*x+1
    else:
        return 3
```

Activités

15 min

1 Se rapprocher des limites, notion d'asymptote

On donne les représentation des fonctions cube $x \mapsto x^3$, inverse au carré $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.



1. a) En lisant les courbes, donner les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$.

b) Existe-t-il un réel x tel que,$x^3 > 10^3$? et pour $x^3 > 10^9$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$.

c) Existe-t-il un réel x tel que,$x^3 < -10^3$? et pour$x^3 < -10^9$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$.

2. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

b) Existe-t-il un réel x tel que, $\dfrac{1}{x^2} < 10^{-6}$? et pour $\dfrac{1}{x^2} > 10^{-12}$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$.

c) Comment se comporte la courbe en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des abscisses ?

On dit alors que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.

3. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

b) Existe-t-il un réel x tel que, $\dfrac{1}{x^2} > 10^6$? et pour $\dfrac{1}{x^2} \leqslant 10^{12}$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

c) Comment se comporte la courbe en 0 de $\dfrac{1}{x^2}$ par rapport à l'axe des ordonnées ?

On dit alors que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

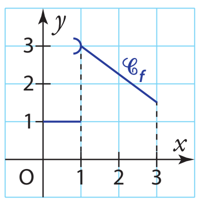
4. a) Donner la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

b) Existe-t-il un réel x tel que, $\sqrt{x} < 10^2$? et pour $\sqrt{x} > 10^3$? Justifier alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}$.

↪ Cours 1 p. 44

10 min

2 Appréhender la continuité



On donne la représentation d'une fonction sur [0 ; 2].

1. a) Que vaut $f(1)$?

b) Vers quelle valeur tend $f(x)$ lorsque x tend vers 1 en valeur inférieure ? En valeur supérieure ?

c) La limite de $f(x)$ existe-t-elle ? On dit alors que la fonction f n'est pas continue en 1.

2. Peut-on dire que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$? Pourquoi ? On dit alors que la fonction f est continue en 2.

En quelles valeurs de x la fonction f est-elle continue ?

↪ Cours 1 p. 44

3 Faire des opérations sur les limites

20 min

A ▸ Un polynôme

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Donner les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 3$. Pourquoi peut-on affirmer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

2. Donner les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 3$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

3. Vérifier que pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)$. Donner la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$. Peut-on en déduire la limite de f en $-\infty$? Pourquoi ?

B ▸ Une fonction rationnelle

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ par : $g(x) = \dfrac{3x+2}{x-2}$.

1. Donner les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2$. Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$?

2. Montrer que pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \dfrac{3 + \dfrac{2}{x}}{1 - \dfrac{2}{x}}$. Peut-on maintenant en déduire la limite de g en $+\infty$?

3. Donner les limites $\lim\limits_{x \to 2} 3x + 2$ et $\lim\limits_{x \to 2} x - 2$. Quel est le signe de $(x - 2)$ si $x > 2$? En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} g(x)$.
Quel est le signe de $(x - 2)$ si $x < 2$? En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} g(x)$

↪ Cours 1 p. 44

4 Résoudre une équation

15 min — Thème 1

1. On donne les tableaux de variations de deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
f	$-\infty$ ↗	5	↘ -1

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	−	
g	$\frac{3}{2}$ ↘	-2

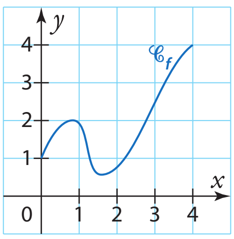
On considère les équations suivantes avec $k \in \mathbb{R}$, $(E_1) : f(x) = k$ et $(E_2) : g(x) = k$.

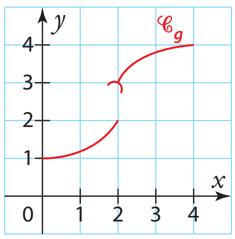
a) On prend $k = 0$. Combien de solutions possèdent les équations (E_1) et (E_2) ? Pourquoi ?

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_1).

c) Déterminer, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E_2).

2. On donne les représentations de deux nouvelles fonctions f et g définies sur $[0 ; 4]$.





On considère les équations suivantes avec $k \in [1 ; 4]$, $(E_1) : f(x) = k$ et $(E_2) : g(x) = k$.

a) La fonction g est-elle continue en $x = 2$? Pourquoi ?
Quelle est l'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par la fonction g ?

b) Discuter le nombre de solutions des équations (E_1) et (E_2) suivant les valeurs de k.

↪ Cours 2b p. 52

Cours

1 Limites

a Limite en l'infini

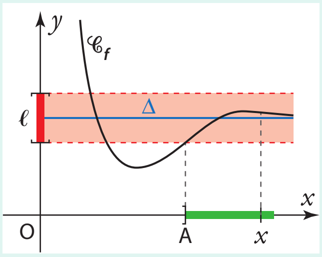
Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est définie sur les intervalles considérés. La courbe représentative de la fonction f est notée $\mathscr{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

Définition Limite finie et asymptote horizontale

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle $]A\,;+\infty[$. On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell$$

La droite Δ d'équation $y=\ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

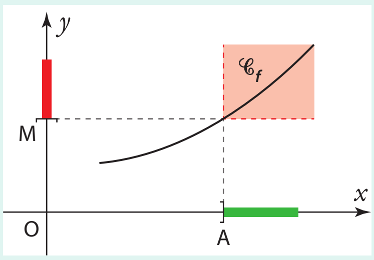


Remarque On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.

Définition Limite infinie

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle $]A\,;+\infty[$.
On note alors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$



Remarque On définit de façon analogue :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Propriétés Limites des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	x^2	x^3	x^n	$\sqrt{x}$	e^x	e^{ax}
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0	0	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ $a>0$ 0 $a<0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	0	0	0	non définie	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	non définie	0	0 $a>0$ $-\infty$ $a<0$

Exercices résolus

Méthode 1 Conjecturer la limite d'une fonction en l'infini Algo

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\,e^{-x} + 1$ et la droite d d'équation $y = 1$.

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f et la droite d pour $x \in [-3\,;3]$ et $y \in [-3\,;4]$. Que peut-on conjecturer pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

2. Que représente la droite d pour la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$? Pourquoi ?

3. On donne l'algorithme en Python suivant.

a) Que représente `abs(1-f(x))` ?

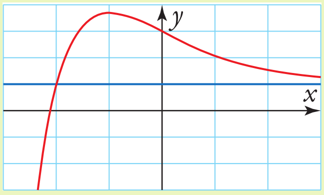
b) Que renvoie la fonction `dist(a)` ?

c) À l'exécution, on voit que `dist(10**(-3))` renvoie 10 et `dist(10**(-6))` renvoie 17. En quoi ces valeurs permettent-elles de vérifier la limite de $f(x)$ en $+\infty$?

```
from math import*
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)+1
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-1)>=a:
        x+=1
    return x
```

Solution

1. On obtient la courbe suivante. 1



D'après la représentation de fonction f et de la droite d on peut conjecturer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. 2

2. La droite d représente une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

En effet la courbe se « rapproche » de plus en plus de la droite d lorsque x augmente. 3

3. a) `abs(1 -f(x))` = $|f(x) - 1|$ représente la distance entre la droite d et la courbe $\mathscr{C}_f$.

b) La fonction `dist(a)` renvoie l'entier naturel le plus petit tel que la distance entre la droite d et la courbe $\mathscr{C}_f$ est plus petite que la réel a. 4

c) La valeur de $f(x)$ se trouve à moins de 10^3 de sa limite à partir de $x = 10$ et à moins de 10^{-6} à partir de $x = 17$.

Cela signifie que l'on peut prendre un intervalle aussi petit autour de la limite $\ell = 1$ de la fonction f en $+\infty$, on peut trouver un x à partir duquel $f(x)$ se trouve dans cet intervalle. 5

Conseils & Méthodes

1 Bien respecter les indications pour la fenêtre pour obtenir un visuel exploitable.

2 On suppose que la tendance de la courbe ne varie pas en dehors de la fenêtre.

3 C'est la définition d'une asymptote à une courbe.

4 Attention la condition sur une boucle conditionnelle est l'opposé de ce que l'on veut obtenir $|f(x) - 1| < a$.

5 C'est la définition d'une limite finie en $+\infty$.

À vous de jouer !

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{4x^2+1}.$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Comment peut-on le vérifier ?

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}15x - 1{,}8x - 0{,}7.$$

1. Tracer sur la calculatrice la fonction f. Que peut-on conjecturer sur les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Comment peut-on le vérifier ?

➥ Exercices 25 à 30 p. 58

Cours

b Limite en un point

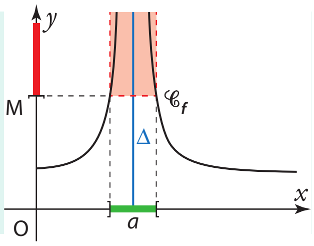
Dans tout ce qui suit, on suppose que la fonction f est définie sur les intervalles considérés. Le réel a considéré appartient ou est une borne de l'ensemble de définition de f. La courbe représentative de la fonction f est notée $\mathscr{C}_f$ et n désigne un entier naturel non nul.

Définition Limite infinie et asymptote verticale

Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en un réel a signifie que tout intervalle $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a, c'est-à-dire pour les x d'un intervalle ouvert contenant a.
On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

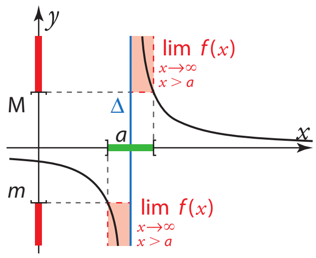
La droite Δ d'équation $x = a$ est alors asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Remarques

- On définit de façon analogue : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$
- Lorsque la limite en a n'existe pas, on peut définir une limite à droite ou à gauche de a que l'on note respectivement

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \text{ ou } \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \to a^-} f(x)$$



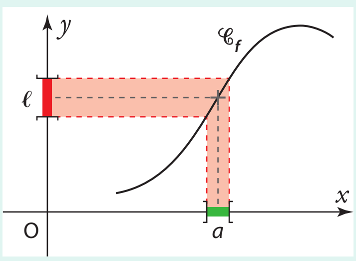
Propriétés Limites infinies des fonctions élémentaires

$f(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ n pair $-\infty$ n impair	**non définie**

Définition Limite finie

Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ en un réel a, signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$



Remarque On peut de même définir une limite à droite et à gauche de a.

Méthode 2 Conjecturer la limite infinie d'une fonction en un point

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{0{,}5x^2-1{,}5x+2}{x-2}$.

1. a) Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre $x\in[-1\,;5]$ et $y\in[-5\,;5]$.

b) Que peut-on conjecturer pour les limites de la fonction f lorsque x tend vers 2, en valeurs supérieures et en valeurs inférieures ?

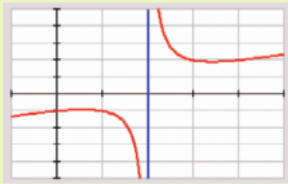
Peut-on conjecturer qu'il existe une limite de la fonction f en 2 ?

2. Tracer sur le même graphique la droite d d'équation $x=2$.

Que représente la droite d pour la courbe $\mathscr{C}_f$ en 2 ?

Solution

1. a) On obtient la courbe ci-contre .



b) On peut conjecturer :

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty$. 1

f n'a pas de limite en 2 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

2. La droite d'équation $x=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en 2 car plus x se rapproche de 2 plus la courbe s'en rapproche.

Conseils & Méthodes

1 Lorsque x se rapproche de 2
- en valeurs supérieures, limite à droite, les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes.
- en valeurs inférieures, limite à gauche, es valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus grandes en négatif.

À vous de jouer !

3 **1.** Tracer la courbe de $f(x)=\dfrac{x+1}{2(1-x)}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x\in[-2\,;4]$ et $y\in[-5\,;5]$.

2. La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

3. Conjecturer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

4 **1.** Tracer la courbe de $f(x)=\dfrac{1}{(e^x-1)^2}$

2. La fonction f admet-elle une limite en 1 ? Interpréter géométriquement ce résultat.

↪ Exercices 31 à 36 p. 58

Méthode 3 Conjecturer la limite finie d'une fonction en un point

Énoncé

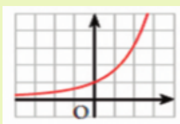
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

1. Tracer la courbe sur une calculatrice dans la fenêtre $x\in[-4\,;4]$ et $y\in[-1\,;5]$.

2. La fonction f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

Solution

1. On obtient la courbe ci-contre.



2. La fonction n'est pas définie en 0, car le dénominateur est alors nul.

Par contre d'après la représentation, la fonction f admet une limite en 1 : $\lim\limits_{x\to1} f(x)=1$. 1

Conseils & Méthodes

1 Pour tracer une fonction, la calculatrice utilise des points qu'elle relie ensuite. Le point en $x=0$ étant singulier, la calculatrice n'en tient pas compte.

À vous de jouer !

5 **1.** Tracer la courbe $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x\in[-1\,;8]$ et $y\in[-1\,;2]$.

2. La fonction f est-elle définie en 4 ? Admet-elle une limite en 1 ? Si oui laquelle ?

6 **1.** Tracer la courbe $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ sur une calculatrice dans la fenêtre $x\in[-5\,;5]$ et $y\in[-5\,;5]$.

2. La fonction f est-elle définie en 0 ? Admet-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ?

↪ Exercices 31 à 36 p. 58

Cours

C Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit f et g désignent deux fonctions et ℓ une valeur réelle ou $+\infty$ ou $-\infty$.
« indéterminée » désigne une forme que l'on ne peut pas calculer par l'opération concernée.

Théorème Limite de la somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**indéterminée**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x+3=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3+\dfrac{1}{x}=+\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+x$ indéterminée

on ne peut rien conclure

Théorème Limite du produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$*	**indéterminée**	$\pm\infty$*

*** On applique la règle des signes pour déterminer le signe devant ∞.**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} \sin x=0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}\sin x$ indéterminée

on ne peut rien conclure

Théorème Limite du quotient

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell\neq 0$	0	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	0**	0	$\pm\infty$	ℓ'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$*	**indéterminée**	0	$\pm\infty$*	**indéterminée**

*** On applique la règle des signes pour déterminer le signe devant ∞.**

**** signe constant, on écrira 0^+ pour un nombre positif et 0^- pour un nombre négatif.**

Exemples

① $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+} 2x+1=-5 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} x+2=0^+\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+1}{x+2}=-\infty$

② $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+2=+\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{2x+1}{x+2}$ indéterminée

on ne peut rien conclure.

Méthode 4 Déterminer une limite en l'infini

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = 4x - 3 + \dfrac{3}{x-1}$ et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - x + 3$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Déterminer le signe de $(x - 1)$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire les limites de f en 1 en valeur supérieures et inférieures.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

Solution

1. On détermine la limite la fonction f par somme en $+\infty$ en étudiant les limites de $(4x - 3)$ et $\dfrac{3}{x-1}$. **1**

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4x - 3 = +\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x-1} = 0\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par somme} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\end{array}$$

2. a) On a le tableau de signes de $(x-1)$ suivant.

x	$-\infty$	1^- 1 1^+	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

b) On détermine la limite en 1 de la fonction f par somme en étudiant les limites de $(4x - 3)$ et $\dfrac{3}{x-1}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to1} 4x - 3 = 1$ et **2**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 3 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ x>1}} x-1 = 0^+\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty\end{array}\quad\text{et}\quad\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^-\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty\end{array}$$

Par somme on déduit la limite en 1 : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

3. On ne peut pas déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$ par somme car on obtient une forme indéterminée. On change alors la forme de la fonction g. **3**

Pour $x \neq 0$ on a $g(x) = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$ on peut alors déterminer la limite de g par produit.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} = 1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty\end{array}$$

Conseils & Méthodes

1 Avant de déterminer une limite par somme, il faut vérifier rapidement que l'on n'obtient pas une forme indéterminée.

2 Suivant que x se rapproche de 1 en valeurs supérieures ou inférieures, $(x - 1)$ change de signe.

3 En effet en $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^2$ tend vers $+\infty$ et la fonction $x \mapsto -x + 3$ vers $-\infty$.

À vous de jouer !

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

2. Déterminer la limite de f en 0.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 + 6.$$

1. Pourquoi ne peut-on pas déterminer la limite de f en $\pm\infty$ par somme ?

2. Changer la forme de la fonction f puis déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

↪ Exercices 37 à 40 p. 59

Cours

d Déterminer une limite par encadrement et par comparaison

Théorème Limite par encadrement ou théorème des gendarmes

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;+\infty[$ et ℓ un réel.

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \end{cases} \quad \text{alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque On a des énoncés équivalents en $-\infty$, avec $I =]-\infty\,; a[$ et en a, avec un intervalle ouvert contenant a.

Théorème Limite par comparaison

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;+\infty[$.

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant g(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Si } \begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\text{alors } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Remarque On a des énoncés équivalents en $-\infty$, avec $I =]-\infty\,; a[$ et en a, avec un intervalle ouvert contenant a.

2 Continuité d'une fonction

a Définitions

Définition Continuité en un point

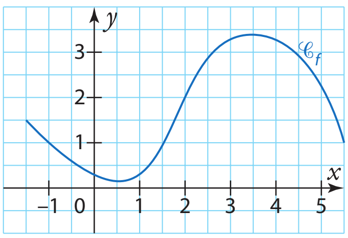
Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I contenant le réel a. On dit que la fonction f est continue en un point a si et seulement si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Définition Continuité sur un intervalle

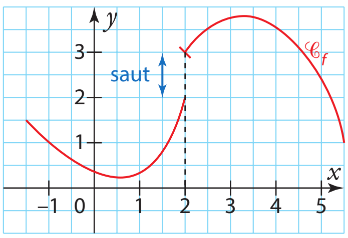
La fonction f est continue sur un intervalle I si, et seulement si, f est continue en tout point de I.

Remarques

- Graphiquement, la continuité d'une fonction sur un intervalle I se traduit par une courbe « en un seul morceau », elle n'a pas de « saut » en certaines valeurs.
- On définit la continuité sur un intervalle fermé en prenant la limite à droite de la borne inférieure et la limite à gauche de la borne supérieure.



Fonction continue sur son intervalle de définition



La fonction f n'a pas de limite en 2. f est discontinue en 2 donc non continue sur son intervalle de définition

- Les fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition. C'est le cas par exemple des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et exponentielles.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison

Énoncé

Soit les fonctions *f* et *g* définies sur I = [1 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ et } g(x) = x + \cos(x).$$

1. Pourquoi ne peut-on pas déterminer directement les limites des fonction *f* et *g* en +∞ ?

2. À l'aide d'un encadrement sur I déterminer la limite de la fonction *f* en +∞.

3. À l'aide d'une inégalité sur I, déterminer la limite de la fonction *g* en +∞.

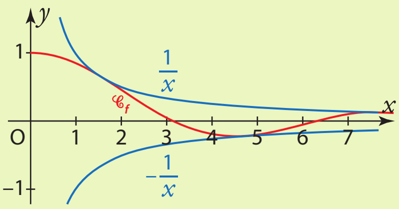
Solution

1. Les fonctions sin et cos sont des fonctions périodiques de valeurs comprises entre –1 et 1. Elles n'ont donc pas de limites en +∞.

2. Comme la fonction sin est bornée dans [–1 ;1], on a pour $x \geqslant 1$:

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \overset{[\div x]}{\Rightarrow} -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x} \quad \boxed{1}$$

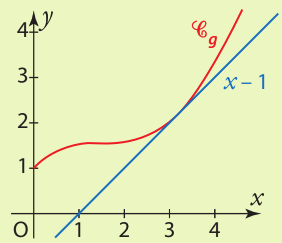
$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'après le théorème d'encadrement ou des gendarmes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.



3. On minore cos pour montrer que la fonction *g* tend vers +∞. $\boxed{2}$

$$\cos(x) \geqslant -1 \overset{+x}{\Rightarrow} x + \cos(x) \geqslant x - 1 \quad \boxed{3}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, d'après le théorème par comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.



Conseils & Méthodes

1 On ne change pas une inégalité si l'on multiplie ou divise par un nombre strictement positif.

2 Un rapide aperçu de la fonction *g* montre qu'elle tend vers +∞ le terme prépondérant étant x.

3 On ne change pas une inégalité lorsqu'on ajoute ou retranche un même terme de chaque côté de l'inégalité.

À vous de jouer !

9 Soit la fonction *f* définie sur]1 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x + 1}.$$

Déterminer la limite de la fonction *f* en +∞.

10 Soit la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = x^2 + x\sin(x).$$

1. Factoriser $f(x)$.
2. En déduire la limite de la fonction *f* en +∞.

11 Soit la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{x + 1}{2 - \cos(x)}.$$

1. Montrer l'encadrement suivant, pour tout réel x.

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2 - \cos(x)} \leqslant 1$$

2. En déduire la limite de *f* en –∞.

↪ Exercices 41 à 42 p. 59

Cours

b Propriétés de la continuité

Théorème Continuité et dérivabilité

Si une fonction *f* est dérivable en un point *a* alors *f* est continue en *a*

Si une fonction *f* est dérivable sur un intervalle I alors *f* est continue sur I.

Remarques

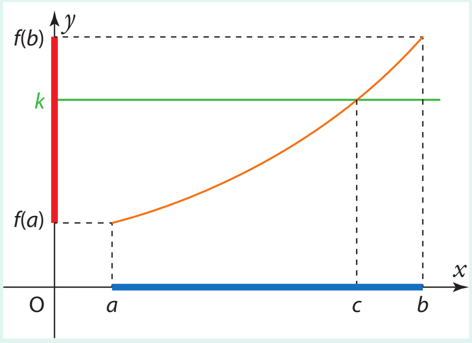
• La réciproque de ce théorème est fausse.
Une fonction peut être continue en *a* mais pas dérivable en *a*.
Cela se caractérise sur une courbe sans saut mais qui n'admet pas une tangente au point a comme la fonction valeur absolue en 0.

• L'intérêt de ce théorème est de pouvoir affirmer qu'une fonction est continue sachant que la fonction est dérivable.

Théorème Valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*].

Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'équation *f*(*x*) = *k* admet une unique solution *c* dans l'intervalle [*a* ; *b*].

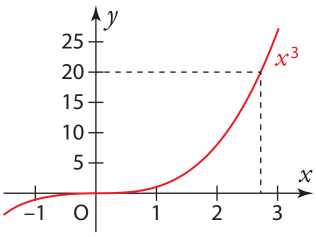


Remarques

• Pour un réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), l'existence d'une solution est déterminée par la continuité et l'unicité par la stricte monotonie.
• Ce théorème s'appelle le théorème des valeurs intermédiaires car le réel *k* est une valeur intermédiaire entre *f*(*a*) et *f*(*b*).
• On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert I =]*a* ; *b*[où *a* et *b* peuvent être réels ou $\pm\infty$.
k doit alors être compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$.
• Lorsque $k = 0$, il suffira de montrer que la fonction *f* change de signe sur I.
• Un tableau de variations pourra être suffisant pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction.
En effet les flèches « montantes » ou « descendantes » d'un tableau de variations indique la continuité et la monotonie.
Il est cependant important de rappeler ces deux hypothèses dans la rédaction.

Exemple

L'équation $x^3 = 20$ admet une unique solution sur $]-\infty\,;+\infty[$ car la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ et 20 est compris entre $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Exercices résolus

Méthode 6 Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

Énoncé

Soit la fonction f définie sur $I = [-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solutions dans l'intervalle $[0\,;2]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-2\,;+\infty[$.

Donner un encadrement au dixième près de α.

Solution

1. Étudions les variations de la fonction f sur $[-2\,;+\infty[$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme.

On calcule $f(0) = 3$, $f(2) = -1$ et $f(-2) = -17$

x	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-17	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

2. a) Sur l'intervalle $[0\,;2]$, la fonction f est continue, strictement monotone (décroissante) et 1 est compris entre $f(0) = 3$ et $f(2) = -1$, d'après le théorème des valeur intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution. **1**

b) Sur l'intervalle $[-2\,;2[$, $f(x)$ est majorée par 3 donc l'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution. **2**

Sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement monotone. 5 est compris entre $f(2) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[2\,;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

Par le balayage d'une calculatrice avec un pas de 0,1, on trouve $3{,}1 < \alpha < 3{,}2$. **3**

X	Y1
3	3
3.1	3.961
3.2	5.048
3.3	6.267

Conseils & Méthodes

1 Il est important de rappeler les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires pour la rigueur du raisonnement.

2 Lorsqu'une équation n'a pas de solution, une simple majoration est suffisante pour conclure.

3 Pour déterminer un encadrement d'une solution, la méthode la plus simple consiste en un balayage d'un tableau de valeurs avec un pas adapté.

À vous de jouer !

12 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2 a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;+\infty[$.

b) Contrôler en traçant la fonction f sur une calculatrice la véracité des résultats.

13 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 2.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction, on admettra que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [2\,;3]$.

b) Par le balayage d'une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

↪ Exercices 43 à 46 p. 59

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c02-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 7 Déterminer les limites d'une fonction rationnelle

Énoncé

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

1. **Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-4\ ;\ 4]$ et $y \in [-10\ ;\ 10]$ puis conjecturer les limites en $\pm\infty$ et ± 1.**

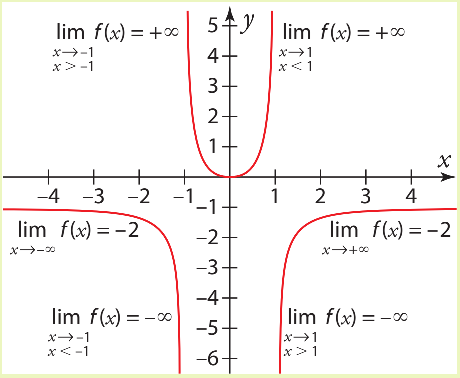
2. a) Pour $x \neq 0$, factoriser par x^2 le dénominateur $(1 - x^2)$ puis confirmer les limites de la fonction f en $\pm\infty$ trouvées à la question 1.

b) Déterminer le signe de $(1 - x^2)$ suivant les valeurs de x.

c) Confirmer alors les limites de la fonction f en ± 1 trouvées à la question 1.

Solution

1. On obtient la courbe et les conjectures suivantes.



2. a) Pour $x \neq 0$, on a : $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x^2}-1}$ **1** :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} - 1 = -1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2\end{array}$$

Par un même raisonnement, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$.

b) $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

on obtient alors le tableau de signes suivant. **2**

x	$-\infty$		-1		1^- 1 1^+		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) En séparant limite à gauche et limite à droite, on trouve : **3**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 1 - x^2 = 0^+\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty\end{array} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 1 - x^2 = 0^-\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Par quotient} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty\end{array}$$

Par un même raisonnement, on obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} f(x) = +\infty$.

Conseils & Méthodes

1 Pour ne pas trouver une formes indéterminées en l'infini, on change la forme de $f(x)$.

2 Comme le dénominateur de $f(x)$ s'annule en ± 1, il faut donc déterminer le signe autour de ces valeurs.

3 Attention, les limites en ± 1 ne sont pas des formes indéterminées. Ne pas changer la forme de $f(x)$ comme en $\pm\infty$.

À vous de jouer !

14 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-6\ ;\ 6]$ et $y \in [-1\ ;\ 6]$ puis conjecturer les limites en $\pm\infty$.

2. a) Pour $x \neq 0$, factoriser par x^2 le numérateur et le dénominateur de $f(x)$.

b) Confirmer alors les limites en $\pm\infty$ trouvées à la question 1.

15 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

1. Tracer la fonction f sur une calculatrice pour $x \in [-5\ ;\ 5]$ et $y \in [-5\ ;\ 5]$. Conjecturer les limites en $\pm\infty$ et en ± 2.

2. a) Confirmer les limites en $\pm\infty$ en levant l'indétermination.

b) En étudiant le signe de $(x^2 - 4)$, confirmer les limites en ± 2.

↪ Exercices 50 à 54 p. 60

Méthode 8 Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

Énoncé

Soit la fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{10x}{e^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I que : $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ où g est une fonction définie sur I par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs sur une calculatrice donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution

1. $f'(x) = \dfrac{10(e^x+1) - 10xe^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{10(e^x+1-xe^x)}{(e^x+1)^2} = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$

avec $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

2. a) • On étudie les variations de g et sa limite en $+\infty$. **1**

$g'(x) = e^x - (1e^x + xe^x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$

Pour $x \geqslant 0$, $-xe^x \leqslant 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$. La fonction g est décroissante sur I.

• Limite en $+\infty$: on a $g(x) = e^x(1-x) + 1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(1-x) = -\infty\end{array}$$

Par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. On calcule $g(0) = 2$. **2**

Sur I la fonction g est continue (car dérivable), monotone (décroissante) et change de signe car $g(0) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

b) Par le balayage d'une calculatrice, on trouve : $g(1{,}27) \approx 0{,}039$ et $g(1{,}28) \approx -0{,}007$. **3** On en déduit que $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

c) Comme la fonction g est décroissante sur I, si $x < \alpha$, $g(x) > 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) < 0$.

3. Comme, $\dfrac{10}{e^x+1} > 0$ pour tout x de I, le signe de $f'(x) = \dfrac{10}{(e^x+1)^2} \times g(x)$ est du signe de $g(x)$, on obtient le tableau de variations ci-contre.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Conseils & Méthodes

1 L'unicité de la solution est obtenue par le théorème des valeurs intermédiaires. Il est nécessaire de connaître les variations de la fonction f.

2 Le changement de signe de la fonction g sur I est alors établi.

3 On programme le tableau de valeurs avec comme valeur initiale 0 et un pas de 0,01.

À vous de jouer !

16 Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 12x - 5.$$

1. Démontrer que pour tout réel que : $f'(x) = 12g(x)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.

b) À l'aide d'un tableau de valeurs donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeur de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

17 Soit la fonction f définie et dérivable sur $I =]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Démontrer que pour tout réel de I que : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où g est une fonction définie sur I que l'on déterminera.

2. a) Démontrer qu'il existe un unique réel α de I tel que $g(\alpha) = 0$.

b) Donner un encadrement de α à 10^{-2}.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. En déduire le tableau de variations de f sur I.

↪ Exercices 55 à 57 p. 61

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer

Sachant que pour tout réel x, $e^x > x$, en déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0.$$

On souhaite démontrer la première limite par comparaison, puis en déduire la seconde par un changement de variable.

Comprendre avant de rédiger

- On peut résumer le résultat de ces limites en disant que « la fonction exponentielle l'emporte sur la fonction identité $x \mapsto x$ ».
- On utilise l'inégalité donnée $e^x > x$ pour montrer l'inégalité $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$.
- Pour la deuxième limite, on utilise le changement de variable $X = -x$ pour établir la limite.

Rédiger

Étape 1
Si l'inégalité donnée est valable pour x elle est aussi valable pour $\frac{x}{2}$.

Étape 2
La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $(e^a)^2 = e^{2a}$.

Étape 3
Comme $x > 0$, on ne change pas l'inégalité en divisant par x.

Étape 4
Il ne reste plus qu'à passer à la limite avant de conclure.

Étape 5
Si x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$.

Si $\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ alors par quotient $0 \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$.

La démonstration rédigée

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$

On élève au carré pour $x > 0$

$$\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow e^x > \frac{x^2}{4}$$

En divisant par x, on obtient :
$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{4}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

On pose $X = -x \Leftrightarrow x = -X$, on a alors :
$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{x \to +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0.$

Pour s'entraîner

À l'aide d'un changement de variable astucieux, déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \to +\infty} 20e^{-0,2x} \text{ et } \lim_{x \to -\infty} 20e^{-0,2x}$$