DIAPORAMA
Calculs et automatismes
lienmini.fr/maths-c01-05

Les rendez-vous Sésamath

Exercices calculs et automatismes

21 Calculer les termes d'une suite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n - 5$.

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_{10}.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

Donner la valeur des trois premiers termes de la suite (v_n).

22 Calculer les termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

a) Calculer u_1.

b) Calculer u_4.

23 Calculer les termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_1 = 4$.

a) Calculer u_2.

b) Calculer u_{11}.

24 Déterminer la raison d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$.

Déterminer la valeur de q.

25 Déterminer la raison d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$. Déterminer la valeur de r.

26 Donner des exemples de suites de limite donnée

Donner un exemple de suite :

a) ayant pour limite $+\infty$.

b) ayant pour limite -2.

c) ayant pour limite $-\infty$.

d) n'ayant pas de limite.

27 Donner la limite de suites définies de façon explicite

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2 + n$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** 2.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{5+\sqrt{n}}$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $\dfrac{1}{5}$.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = -n + \dfrac{1}{n}$ a pour limite :

a $+\infty$. **b** $-\infty$. **c** 0. **d** $-\dfrac{1}{2}$.

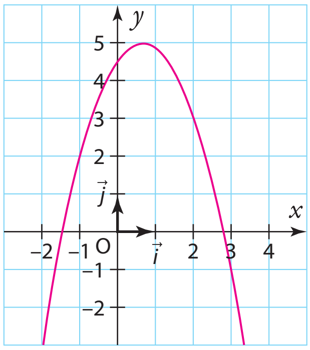
28 Limite de suites géométriques

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

	V	F
1. La suite géométrique de raison 10 et de premier terme -1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
2. La suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 a pour limite $+\infty$.	☐	☐
3. La suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 2 a pour limite 2.	☐	☐
4. La suite géométrique de raison 0,25 et de premier terme -1 a pour limite 0.	☐	☐

29 Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (1)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction représentée ci-contre.



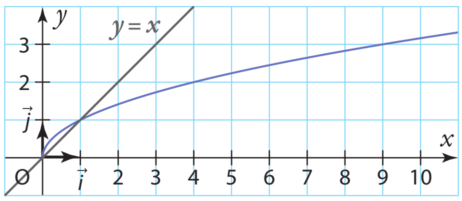
a) Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

b) Que peut-on dire de la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

30 Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On a représenté ci-dessous la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Choisir la (les) bonne(s) réponse(s).



1. u_1 est égale à :

a 0 **b** 1 **c** 3 **d** 9

2. La limite de la suite (u_n) :

a semble être 0. **b** semble être 1.

c semble être $+\infty$. **d** n'existe pas.

31 Déterminer l'expression d'une suite en fonction de *n*

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$. Comment faire pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n ?

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5v_n - 16$. Comment faire pour déterminer l'expression de v_n en fonction de n ?

Exercices d'application

Modéliser avec une suite

Méthode 1 p. 19

32 Pour prendre le train, Sofia achète un abonnement mensuel qui coûte 400 €.
Avec cet abonnement, chaque billet de train qu'elle achète est au prix de 2 €.
1. Combien Sofia paiera-t-elle au total si elle achète 10 billets de train ?
2. On note u_n le prix que paye Sofia par mois pour l'abonnement et n billets de train.
a) Exprimer u_n en fonction de n.
b) Sofia a payé 434 €.
Combien de billets de train a-t-elle achetés ?

33 Un téléphone est en vente à 400 € en 2019. Chaque année, son prix baisse de 10 % par rapport à l'année précédente. On note u_n le prix du téléphone en 2019 + n.
1. Donner la valeur de u_0 et u_1.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
En déduire la nature de la suite (u_n).
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

34 Un festival de musique accueille 100 000 festivaliers en 2020.
L'équipe d'organisation prévoit que chaque année, 80 % des personnes venues l'année précédente reviendront et qu'il y aura 30 000 nouveaux festivaliers.
1. Combien de festivaliers l'organisation prévoit-elle en 2021 ?
2. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

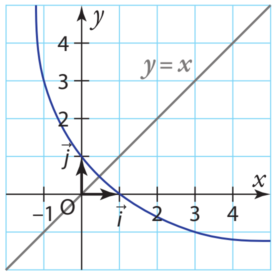
Représenter graphiquement une suite

Méthode 2 p. 19

35 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
1. Tracer la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ dans un repère orthonormé.
2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.
3. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

36 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 1$.
1. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite.
2. Conjecturer les variations de la suite (u_n) et la limite de la suite (u_n).

37 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction dont la représentation graphique est ci-contre en bleu.



1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Que peut-on dire sur les variations de la suite (u_n) et sur la limite de la suite (u_n) ?

Limite d'une suite

Méthode 3 et Méthode 4 p. 21

38 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = n^2 + 2n - 4$.
b) (v_n) définie par $v_n = -n^3 + 5$.
c) (w_n) définie par $w_n = \dfrac{2}{7 + \sqrt{n}}$.
d) (a_n) définie par $a_n = n \times \sqrt{n}$.

Coup de pouce
Utiliser les règles des opérations sur les limites.

39 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.
b) (v_n) définie par $v_n = -3 + \dfrac{5}{n-1}$.

40 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = \left(n + \dfrac{1}{n}\right) \times \left(\dfrac{1}{n^4} - 5\right)$.
b) (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3+n}{2 + \dfrac{1}{n}}$.

41 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) définie par $u_n = n^2 - 2n$.
b) (v_n) définie par $v_n = n - n^3$.

Coup de pouce
Commencer par factoriser les expressions de u_n et de v_n.

42 Déterminer la limite des suites définies par :
a) $u_n = 3n - n^3 + 2$ **b)** $v_n = \dfrac{n-5}{2n+4}$.

43 Déterminer la limite des suites définies par :
a) $u_n = \dfrac{n^2 + 2n}{n+1}$ **b)** $v_n = \dfrac{3n + \sqrt{n}}{2n+3}$

44 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{n} \square (n^2 - 2)$.

1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. En développant, déterminer la limite de la suite (u_n).

Limites et comparaison

Méthode 5 et Méthode 6 p. 23

45 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{3n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > \sqrt{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

46 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n - \sin(n)$.
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant -n + 1$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

47 Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{4}{n+1}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

48 Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-3 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant -3 + \frac{1}{n^2+1}$.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

49 Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -5 + \frac{\cos(n)}{n^2}$. En utilisant le théorème des gendarmes, déterminer la limite de la suite (v_n).

50 Soit (w_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 4 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
Déterminer la limite de la suite (w_n).

Suites géométriques

Méthode 7 p. 25

51 Déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 2.
b) (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme -3.
c) (w_n) est la suite définie par $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{w_n}{3}$.

52 Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 0{,}5a_n$.
1. Déterminer la nature de la suite (a_n) en justifiant.
2. Déterminer la limite de la suite (a_n).

53 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 9$.
1. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n.
a) $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
b) $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}$.
2. Déterminer la limite de S_1 quand n tend vers $+\infty$.

54 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = -10$.
1. Calculer une valeur approchée de la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n).
2. On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).
a) Donner l'expression de S_n en fonction de n.
b) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

55 Soit (v_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = 4$.
On note S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n).
1. Donner l'expression de S_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Suites arithmético-géométrique

Méthode 8 p. 25

56 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 9$.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.
a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme.
b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
d) Calculer u_{10}.

57 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 10$.
1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_6.

58 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 14$.
1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Calculer u_8.

59 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 12$.
1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) et justifier que ce n'est ni une suite arithmétique, ni une suite géométrique.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{20}.

Exercices d'entraînement

Limite d'une suite

60 En utilisant la méthode de votre choix, déterminer la limite des suites suivantes.
a) (u_n) est définie par $u_n = n^3 + n^2 - 4$.
b) (v_n) est définie par $v_n = n^3 - n^2 - 4$.
c) (w_n) est définie par $w_n = \dfrac{n^3}{n^2 - 4}$.
d) (a_n) est définie par $a_n = n^3 + \dfrac{\cos(n)}{n^2 - 4}$.

61 Démo
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.
1. Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.
2. Si (u_n) diverge, alors (v_n) converge vers 0.

62 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
1. Peut-on déterminer la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations sur les limites ?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sqrt{n+1}$.
a) Montrer que $v_n > \sqrt{n}$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

63 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^3 - 4$.
1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Déterminer le plus petit entier n tel que :
a) $u_n > 100$.
b) $u_n > 1\,000$.
c) $u_n > 10\,000$.

64 Algo
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n$.
1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. On veut déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n > 1\,000$.
a) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il réponde au problème.

```
n = …
u = …
while …:
    u = …
    n = …
print (…)
```

b) Déterminer cet entier à l'aide de la calculatrice.

65 Dans cet exercice Algo Histoire des maths
nous allons utiliser la méthode de Héron d'Alexandrie pour approximer $\sqrt{2}$.

Héron d'Alexandrie

Soient a et b deux réels tels que $b > \sqrt{a}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.
On admet que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
1. On choisit $a = 2$ et $b = 10$.
a) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).
On arrondira à 10^{-4} près si besoin.
b) Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il calcule u_{100}.

```
u = …
for i in range (…):
    u = …
print (…)
```

2. Reprendre les mêmes questions que précédemment avec $a = 2$ et $b = 5$.

66 Dans cet exercice Algo Histoire des maths
nous allons utiliser la série de Leibniz pour approximer π.
On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Gottfried Leibniz

On note S_n la somme des n premiers termes de (u_n).
On admet que (S_n) converge vers $\dfrac{\pi}{4}$, mais la convergence est très lente.

Compléter le programme en **Python** suivant pour qu'il calcule et affiche S_{100}, puis qu'il affiche $4 \times S_{100}$.

```
s = 0
u = 0
for i in range (…):
    u = …
    s = …
print (…)
print (…)
```

Suites géométriques et suites arithmético-géométriques

Méthode 9 p. 26

67 Une ville contient 15 000 habitants en 2020.
La maire prévoit que chaque année, 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouvelles personnes s'installeront.
1. Déterminer le nombre d'habitants en 2021.
2. Modéliser le problème à l'aide d'une suite (u_n).
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter avec le contexte.

68 Démo

Soit q un réel positif ou nul.

1. Rappeler selon les valeurs de q, la limite de la suite (q^n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.

a) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n

b) En utilisant les propriétés des opérations sur les limites, déterminer, en différenciant les cas, la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

69 Adama décide de faire creuser un tunnel dans une mine de sel. Il fait appel à une entreprise.

On note u_n le prix facturé par l'entreprise pour le n-ième mètre creusé. Le premier mètre creusé coûte 50 €.

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n \times 1{,}1 - 3$.

On a $u_1 = 50$.

1. Déterminer la valeur de u_2.

2. Un tunnel de longueur 2 mètres coûte alors $(u_1 + u_2)$€. En déduire le coût d'un tunnel de 2 mètres de longueur.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer le coût correspondant à un tunnel de longueur 50 mètres.

70 Thème 2

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve naturelle.

En 2020, il y a 100 tigres.

Puis, chaque année, 10 % de la population de tigres meurt et 5 nouveaux tigres sont recueillis dans la réserve.

On note u_n le nombre de tigres en $2020 + n$.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2021.

2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 5$.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

71 Soit S_n la somme définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n$.

1. Exprimer S_n en fonction de n.

2. Déterminer limite de S_n quand n tend vers $+\infty$ en justifiant.

72 Algo

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.

1. Donner la valeur des quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre, afin qu'il calcule u_{20}.

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

3. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de u_{20}.

73 Algo Thème 2

Au 1er janvier 2018, Hélène dispose d'un capital de 16 000 €.

Le 1er juillet de chaque année, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances.

1. On note u_n le montant du capital d'Hélène disponible le 1er janvier $2018 + n$.

On a $u_0 = 16\,000$.

a) Calculer u_1 et u_2.

b) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

2. On souhaite déterminer le nombre d'années à partir duquel le capital d'Hélène devient inférieur ou égal à 2 000 €.

a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
u = …
n = 0
while … :
    n = …
    u = …
```

b) Quelle est la valeur numérique contenue par la variable **n** à la fin de l'exécution de ce programme ?

3. Hélène décide finalement d'ajouter à son capital disponible 300 € chaque 1er décembre.

On note v_n la valeur du capital le 1er janvier $2018 + n$. On a $v_0 = 16\,000$.

a) Justifier que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}85v_n + 300$.

b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

D'après Bac ES 2018

74 Oral

Présenter le travail suivant.

1. Trouver un exemple de situation pouvant être modélisée par une suite arithmético-géométrique.

2. Déterminer l'expression de la suite.

3. À l'aide de la suite, interpréter les résultats dans le contexte (valeur de certains termes, limite,…).

Exercices d'entraînement

75 Un site Internet propose à ses abonnés des films à télécharger. Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %. Algo

1. On note u_n le nombre de films proposés n mois après l'ouverture du site. On a $u_0 = 500$.

a) Calculer u_1 et u_2 (on arrondira à l'unité).

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

a) Recopier et compléter le programme en Python ci-contre pour qu'il réponde au problème.

```
u = 500
n = 0
while  …:
      n = …
      u = …
print (…)
```

b) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme, puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des personnes abonnées au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.

On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15\,000$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}9 \times v_n + 2\,500$.

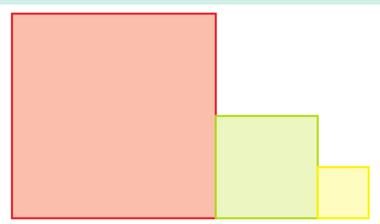
b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

c) Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Si oui, à combien d'abonnés ? Justifier.

D'après Bac ES 2016

76 On considère un carré de côté 3 cm. Thème 4

À chaque étape, on construit un carré dont le côté mesure la moitié du côté du carré de l'étape précédente.



On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du n-ième carré.

1. Donner la valeur de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

2. Exprimer $\mathcal{A}_{n+1}$ en fonction de $\mathcal{A}_n$ et en déduire la nature de la suite $(\mathcal{A}_n)$.

3. Déterminer l'expression de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.

4. Déterminer l'expression de l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés, en fonction de n.

5. En déduire l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés si on continue indéfiniment cette construction.

77 Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.

En 2020, elle estime qu'il y a 1 000 singes sur l'île.

A ▶ Premier modèle

La biologiste suppose que la population de singes augmente de 4 % chaque année.

On note u_n le nombre de singes en milliers sur l'île en 2020 + n.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n), puis exprimer u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Que peut-on penser de ce modèle ?

B ▶ Second modèle

La biologiste suppose finalement que la population de singes est modélisée par une suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n + 0{,}15$.

1. Avec ce modèle, combien peut-on prévoir de singes en 2021 ?

2. a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

b) Déterminer les variations de la suite (v_n) et interpréter avec le contexte.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) et interpréter avec le contexte.

3. On souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population de singes dépassera les 1 400 individus.

a) Recopier et compléter le programme suivant en Python pour qu'il réponde au problème.

```
n=0
v=1
while …:
  n=…
  v=…
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année correspondante.

Suites croisées

Méthode 10 p. 37

78 On s'intéresse à l'ensemble des ascenseurs d'une grande ville en 2017. Pour chacun d'eux, un entretien annuel doit être réalisé. Deux sociétés d'ascensoristes, notées A et B, se partagent ce travail. En 2017, la société A entretient 30 % des ascenseurs. On estime que, chaque année :

• 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B l'année suivante,
• 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A l'année suivante,
• les autres ascenseurs ne changeront pas de société d'ascensoristes l'année suivante.

On étudie l'évolution, au fil des années, de la répartition des contrats d'entretien de ces ascenseurs entre les sociétés A et B.

On note a_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société A pendant l'année $(2017 + n)$. De même, on note b_n la proportion d'ascenseurs entretenus par la société B lors de l'année $(2017 + n)$. On a donc $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.

1. Calculer a_1. Interpréter le résultat.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}97a_n + 0{,}05b_n$ puis en déduire que $a_{n+1} = 0{,}92a_n + 0{,}05$.

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (a_n) et l'interpréter avec le contexte.

D'après BAC 2018

79 Un groupe de presse édite un magazine qu'il propose en abonnement. Jusqu'en 2010, ce magazine était proposé uniquement sous forme papier.

Depuis 2011, les abonnés du magazine ont le choix entre la version numérique et la version papier.

Une étude a montré que, chaque année, certains abonnés changent d'avis : 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique et 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.

On admet que le nombre global d'abonnés reste constant dans le temps.

On note a_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version papier en $2010 + n$ et b_n la proportion d'abonnés ayant choisi la version numérique en $2010 + n$.

1. Justifier que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 0{,}06b_n$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}84a_n + 0{,}06$.

3. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la proportion d'abonnés à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonnés à la version numérique.

D'après BAC 2016

Étude d'évolution

TICE — Thème 2

80 Des chercheuses et des chercheurs veulent étudier le nombre de poissons dans l'étang Lagoon. Pour cela, ils commencent une étude et comptent 9 000 poissons dans l'étang.

A ▶ Lagoon est un bassin artificiel, ce qui permet de contrôler les conditions de vie et le nombre de poissons pêchés. D'une année sur l'autre, a % de poissons meurent (de manière naturelle et par la pêche) et b % de poissons naissent, avec a et b deux réels fixes.

On note u_n le nombre de poissons, n années après le début de l'étude.

1. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \dfrac{b-a}{100}\right)$.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Selon les valeurs de a et b, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

4. Selon les valeurs de a et b, déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

B ▶ Les chercheurs constatent empiriquement que le nombre de poissons dans Lagoon diminue chaque année de 20 % par rapport à l'année précédente.

Lorsqu'ils commencent leur deuxième étude, ils comptent 3 000 poissons dans l'étang.

Et pour leur deuxième étude, ils décident, pour compenser la baisse naturelle, de rajouter chaque année 2 150 poissons dans l'étang.

On note v_n le nombre de poissons dans l'étang n années après le début de la deuxième étude.

1. Justifier que $v_0 = 3\,000$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}8v_n + 2150$.

2. On veut modéliser l'évolution du nombre de poissons sur un tableur.

a) Recopier le tableau ci-contre dans un tableur.

b) Compléter la cellule B2.

c) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ?

d) Compléter la colonne B en étirant vers le bas.

	A	B
1	n	v_n
2	0	
3	1	
4	2	

e) Combien de poissons peut-on prévoir 10 années après le début de l'étude ?

f) Conjecturer la limite de la suite (v_n).

3. On souhaite démontrer les résultats de la question précédente.

a) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

b) En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercices bilan

81 Représentation graphique et étude d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$

1. a) Représenter graphiquement la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$

b) Représenter sur le même graphique les quatre premiers termes de la suite (u_n)

c) Conjecturer les variations et la limite de la suite.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2.$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.

3. Démontrer les conjectures de la question **1. c)**.

82 Limite d'une suite

Déterminer la limite des suites suivantes :

a) (u_n) est la suite définie par $u_n = n + \sqrt{n} - 10$

b) (v_n) est la suite définie par $v_n = n^3 - 5n$

c) (w_n) est définie par $w_n = n^2 + (-1)^n$

d) (a_n) est défini par $a_n = 25 + \frac{\cos(n)}{n}$

e) (b_n) est la suite géométrique de raison 5 et de premier terme $b_0 = -2$

f) (c_n) est définie par $c_0 = -10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \frac{c_n}{2}$

83 Gagnante au loto

Lucille gagne 1 000 000 € au loto le 1er janvier 2020. Elle dépose la somme sur un compte en banque, et elle décide de dépenser chaque année un quart de la somme qui lui reste.

1. On note u_n la somme restante sur le compte le 1er janvier 2020 + n.

a) Quelle somme reste-t-il sur son compte le 1er janvier 2021 ?

b) Donner la valeur de u_0 et u_1.

c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire la nature de la suite (u_n).

d) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. On note S_n la somme dépensée les n premières années.

a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

84 Étude du nombre d'arbres dans une forêt

Algo

On s'intéresse au nombre d'arbres dans une forêt. En 2020, il y a 2 500 arbres dans la forêt. Mais on prévoit que chaque année, 10 % des arbres soient coupés et 100 arbres soient replantés. On note u_n le nombre d'arbres en 2020 + n.

1. Donner la valeur de u_0 et calculer u_1.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$

3. a) Recopier et compléter le programme en **Python** ci-contre pour qu'il détermine le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'arbres en 2050 dans la forêt.

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1\,000$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n en fonction de n.

c) Déterminer les variations et la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte.

85 Suites croisées

Dans un pays, deux fournisseurs d'électricité ont le monopole du marché : *Electic* et *Energo*.

On s'intéresse à la répartition des parts de marché de ces deux fournisseurs.

En 2020, *Electic* a 55 % des parts du marché.

Chaque année, on prévoit que *Electic* perde 5 % de ses clients, mais qu'il récupère 15 % des clients de *Energo*.

On note a_n le pourcentage des parts de marché de *Electic* et b_n celui de *Energo* en 2020 + n

1. Déterminer la valeur de $a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}15b_n$

3. En déduire que $a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}15$

4. Déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

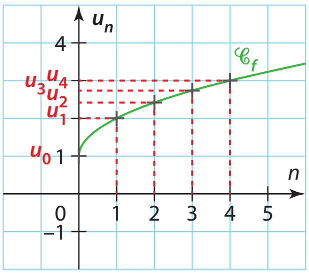
5. Déterminer la limite de la suite (a_n), et interpréter avec le contexte.

CONTRÔLE CONTINU

Préparer le BAC L'essentiel

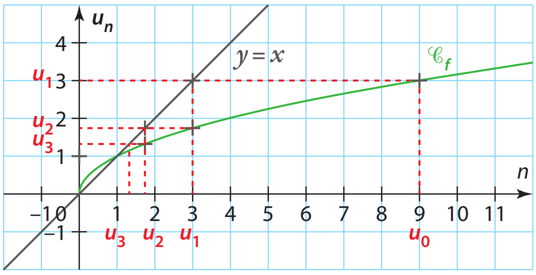
Suite définie par une formule explicite

- $u_n = f(n)$
- u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe de $\mathscr{C}_f$



Suite définie par une relation de récurrence

- Par exemple u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$
- On construit les termes à l'aide de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.



Suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p.

- Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q > 1$ et $u_p > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $q > 1$ et $u_p < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_p$
- Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n),

  si $0 \leqslant q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_p}{1-q}$.

Suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a \neq 1$ et soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$.

Alors (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a.

Théorème des gendarmes

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ avec ℓ un réel alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Formes indéterminées

- $+\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\dfrac{0}{0}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$

Limites de suites de référence

- (n), $(\sqrt{n})$, (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$
- $\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0.

Inégalités et limites

Si $u_n \leqslant v_n$ et (u_n) et (v_n) convergent, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Théorème de comparaison

- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Préparer le BAC Je me teste

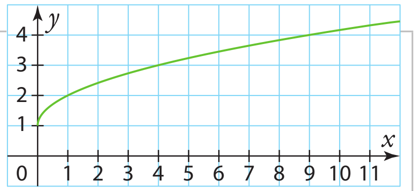
Je dois être capable de…	Méthode	Parcours d'exercices
▶ Modéliser un problème par une suite	Méthode 1	1, 2, 32, 33
▶ Représenter graphiquement une suite	Méthode 2	3, 4, 35, 36
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée	Méthode 3, Méthode 4	5,6,7,8,38, 39,41,42
▶ Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes	Méthode 5, Méthode 6	9, 10, 11, 12, 45, 46, 47, 48
▶ Calculer une limite de suite géométrique et de la somme des termes d'une suite géométrique	Méthode 7	13, 14, 51, 52
▶ Étudier une suite arithmético-géométrique	Méthode 8, Méthode 9, Méthode 10	15, 16, 17, 18, 19, 20, 56, 57, 67, 68, 78, 79

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-c01-06

QCM

Pour les QCM suivants, choisir la (les) bonne(s) réponse(s).

Pour les exercices 86 à 87 on a représenté graphiquement une fonction f ci-contre.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.



	A	B	C	D
86 La suite (u_n) semble :	croissante.	décroissante.	pas monotone.	constante.
87 La limite de la suite (u_n) semble être :	$+\infty$	0	$-\infty$	environ 2,5
88 La suite (u_n) définie par $u_n = n + 5n^2$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
89 La suite (v_n) définie par $v_n = n - 5n^2$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
90 La suite (a_n) définie telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n} < a_n < \frac{2}{n^2}$	a pour limite $+\infty$.	a pour limite 0.	a pour limite $-\infty$.	n'a pas de limite.
91 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 5$. Quand n tend vers $+\infty$, la somme des n premiers termes de la suite tend vers :	$+\infty$	$-\infty$	0	6,25

Pour les exercices 92 à 93 on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4u_n - 12$.

	A	B	C	D
92 La suite (v_n) définie par :	$v_n = u_n + 4$ est géométrique.	$v_n = u_n - 4$ est géométrique.	$v_n = u_n + 4$ est arithmétique.	$v_n = u_n - 4$ est arithmétique.
93 La suite (u_n) est définie par:	$u_n = 6 \times 4^n + 4$	$u_n = 6 \times 4^n - 4$	$u_n = 10 \times 4^n + 4$	$u_n = 10 \times 4^n - 4$

94 Représentation graphique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$

1. Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$.

2. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).

3. Conjecturer les variations et la limite de la suite.

4. Reprendre les questions précédentes avec $u_0 = 0$.

Méthode 2 p. 19

95 Limite d'une suite

Déterminer les limites des suites suivantes.

1. (u_n) définie par $u_n = (2n+n^2) \square \sqrt{n}$

2. (v_n) définie par $v_n = \dfrac{3n^2+5}{2n^2-4}$

3. (w_n) définie par $w_n = n^2 + (-1)^n$

4. (a_n) définie par $a_n = 3 + \dfrac{\cos(3n+1)}{n^3}$

5. (b_n), suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $b_0 = 10$.

Méthode 3 Méthode 4 p. 21

6. (c_n) définie par $c_n = -4 \times 2^n$

Méthode 5 Méthode 6 p. 23

96 Bouts de ficelles

On considère une ficelle d'une longueur de 20 m. Camille commence par couper un morceau mesurant le quart de la longueur de la ficelle.

Puis à chaque étape suivante, elle coupe un morceau mesurant le quart de la longueur du morceau coupé à l'étape précédente.

1. On note u_n la longueur coupée à la n-ième étape.

a) Donner la valeur de u_1 et u_2.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Camille décide de recoller tous les morceaux coupés. On note L_n la longueur totale des n premiers morceaux recollés.

a) Donner la valeur de L_1 et de L_2.

b) Donner l'expression de L_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (L_n).

Méthode 7 p. 25

97 Évolution d'un salaire

Thomas travaille dans une entreprise et gagne 1 500 € nets le 1er janvier 2020. Chaque année, son salaire augmente de 4 %.

On note u_n le salaire de Thomas en 2020 + n.

1. Déterminer le salaire de Thomas en 2021.

2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer la somme totale que Thomas aura gagnée en 10 ans.

Méthode 7 p. 25

98 Compte en banque

Algo

Maud dépose 5 000 € sur un compte en banque le 1er janvier 2020. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus, le dernier jour de chaque mois, elle dépose 2 000 € supplémentaires sur le compte. On note u_n la somme sur le compte le 1er jour du mois, n mois après janvier 2020.

1. Donner la valeur de u_1 et u_2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2\,000$.

2. On souhaite connaître la somme sur le compte le 1er janvier 2021.

```
u = …
for i in range (…) :
    u = …
print (…)
```

a) Compléter le programme en **Python** pour qu'il réponde à la question

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la somme sur le compte le 1er janvier 2021.

3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de la suite (u_n) et donner sa limite. Interpréter avec le contexte.

Méthode 8 p. 25 Méthode 9 p. 26

99 Bénévoles dans une association

Une association d'un village de 3 000 habitants (nombre constant) étudie le nombre de ses bénévoles.

L'année de création de l'association, il y avait 20 bénévoles. Puis chaque année, on estime que 25 % d'entre eux quitteront l'association et 5 % des habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente le deviendront. On note u_n le nombre d'habitants bénévoles et v_n le nombre d'habitants non-bénévoles, n années après la création de l'association.

1. Donner la valeur de u_0 et v_0.

2. Donner la valeur de $u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 0{,}05v_n$.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 150$.

5. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

6. Déterminer la limite de la suite (u_n), et interpréter avec le contexte.

Méthode 10 p. 27