1

Suites et modèles discrets

Dans un étang, la population de poissons fluctue au cours du temps.
Plusieurs facteurs interviennent, comme la reproduction des poissons ou l'homme à travers notamment la pêche.

Comment le nombre de poissons dans l'étang évolue-t-il ?

↪ Exercice 80 p. 35

VIDÉO WEB

80 % de poissons en moins dans la baie de Somme

lienmini.fr/maths-c01-01

Pour prendre un bon départ

EXO Prérequis lienmini.fr/maths-c01-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Utiliser des pourcentages

1. Un article coûte 30 €. Son prix subit une augmentation de 10 %.
Quel est le nouveau prix de l'article ?

2. On s'intéresse à l'évolution de la population d'un village.

Année	2020	2021
Nombre d'habitants	3 500	4 025

Quel est le taux d'évolution en pourcentage du nombre d'habitants entre 2020 et 2021 ?

2 Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 1$.

a) Calculer u_0.

b) Calculer u_5.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

a) Calculer v_0.

b) Calculer v_{10}.

3 Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + n$.
Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n).

4 Utiliser les suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 3$

a) Déterminer la nature de la suite (u_n).

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer u_{10}.

5 Utiliser les suites géométriques

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$

a) Déterminer la nature de la suite (v_n).

b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.

c) Calculer v_{10}.

6 Calculer des sommes

1. Calculer les sommes suivantes.

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$

b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{12}$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $u_0 = 2$.
Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (u_n).

Activités

20 min · Thème 2

1 Introduire la notion de limite d'une suite

A ▶ Première étude de cas

On s'intéresse au nombre d'abonnés d'une plate-forme de streaming de musique en France. En 2020, on compte 30 000 abonnés à la plate-forme.
Chaque année, 90 % des abonnés se réabonnent, et il y a 10 000 nouveaux abonnés.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.

2. On note u_n le nombre d'abonnés en milliers en 2020 + n.

a) Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de u_{20}, u_{30}, u_{40} et u_{50}.

c) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice.

d) Que se passe-t-il pour les termes u_n quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

B ▶ Deuxième étude de cas

On s'intéresse à l'évolution d'une population de singes dans une réserve naturelle. En 2020, il y a 100 singes dans la réserve. Chaque année, la population de singes augmente de 10 % par rapport à l'année précédente.

1. Déterminer le nombre de singes en 2021 et 2022.

2. On note v_n le nombre de singes en 2020 + n.

a) Donner la valeur de v_0, v_1 et v_2.

b) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs de v_{20}, v_{30}, v_{40} et v_{50}.

c) Représenter graphiquement la suite sur la calculatrice.

d) Que se passe-t-il pour les termes v_n quand n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

3. Que peut-on penser de cette évolution ?

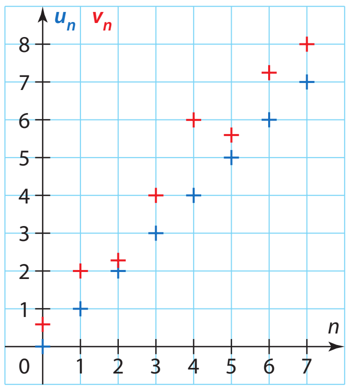
↪ Cours 2 p. 20

20 min

2 Découvrir des propriétés sur les limites

A ▶ Théorème de comparaison

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n$.
Soit (v_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. On a représenté graphiquement ci-contre la suite (u_n) en bleu et la suite (v_n) en rouge.



1. Donner la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Conjecturer la limite de la suite (v_n).

B ▶ Théorème des gendarmes

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On veut étudier le comportement de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (w_n).

2. En donnant un encadrement de $(-1)^n$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $-\dfrac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. Représenter sur un même graphique les suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et (w_n).

4. Donner la limite des suites $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

5. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (w_n) quand n tend vers $+\infty$.

↪ Cours 3 p. 22

TICE 30 min

3 Étudier des suites géométriques

Dans la cuisine de Diane se trouve un fromage posé sur un plateau. Le fromage est réservé pour Diane. Le premier jour, elle mange la moitié du fromage. Puis, le deuxième jour, elle mange la moitié de ce qu'il reste. Et ainsi de suite.

On note u_n la part du fromage qu'elle mange le n-ième jour. Ainsi $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur de u_2 et u_3.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. On s'intéresse maintenant à la part totale du fromage mangée par Diane.
On note S_n la part totale mangée par Diane entre le 1er jour et la fin du n-ième jour.
Déterminer la valeur de S_1, S_2 et S_3.

4. On veut modéliser le problème à l'aide d'un tableur.

a) Recopier le tableau ci-contre dans un tableur et compléter les cellules B2 et C2 avec leurs valeurs.

b) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ? Et dans la cellule C3 ?

	A	B	C
1	Jour	u_n	S_n
2	1		
3	2		

c) En étirant vers le bas, compléter les colonnes B et C.

d) Pour des grandes valeurs de n, de quelle valeur semblent se rapprocher les termes u_n ? Et les termes S_n ?
Comparer cette valeur avec $\frac{u_1}{1-q}$ où q est la raison de la suite (u_n).

e) Diane peut-elle donner du fromage à sa sœur sans être lésée par rapport à ce qu'elle prévoyait de manger ?

↪ Cours 4 p.24

TICE 30 min Thème 2

4 Découvrir les suites arithmético-géométriques

Un nouveau magazine arrive sur le marché en 2020. La première année (en 2020), 500 personnes s'abonnent au magazine. On prévoit que chaque année, 80 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.

1. Déterminer le nombre d'abonnés en 2021 et en 2022.

2. On note u_n le nombre d'abonnés en $2020 + n$.

a) Donner la valeur de u_0, u_1 et u_2.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.

c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Résoudre l'équation $x = 0{,}8x + 200$. On notera x_0 la solution de l'équation.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - x_0$.

a) Calculer v_0, v_1, v_2.

b) En calculant $\frac{v_1}{v_0}$ et $\frac{v_2}{v_1}$, conjecturer la nature de la suite (v_n).

5. On veut démontrer la conjecture de la question précédente.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} puis en fonction de u_n et enfin en fonction de v_n.

b) En déduire la nature de la suite (v_n).

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

6. Quel sera le nombre d'abonnés en 2050 ?

↪ Cours 4 p. 24

Cours

1 Définition et représentation graphique d'une suite

Définition Suite définie par une formule explicite

Définir une suite (u_n) par une formule explicite, c'est donner l'expression de u_n en fonction de n.

Remarque

On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.

Exemple

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n + 1$.
On a alors $u_0 = 3 \times 0 + 1 = 1$; $u_{20} = 3 \times 20 + 1 = 61$

Définition Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un (ou plusieurs) premier(s) terme(s) et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

Exemple

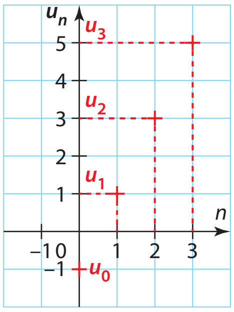
La suite (u_n) est définie par $u_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On a $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times (-4) + 1 = -11$.
Et $u_2 = 3u_1 + 1 = 3 \times (-11) + 1 = -32$.

Règle Représentation graphique

Pour représenter graphiquement une suite dans un repère, on place les points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.
On la représente graphiquement comme ci-contre.

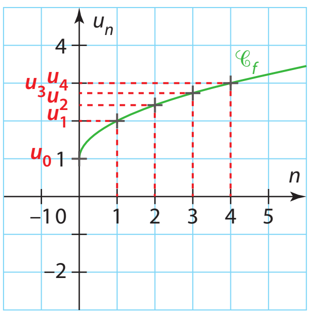


Règle Représentation graphique d'une suite avec une formule explicite ou une relation de récurrence

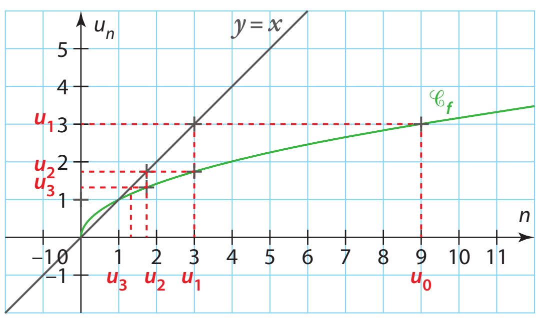
• Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.
• Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.

Exemples

① Si $u_n = f(n)$



② Si $u_{n+1} = f(u_n)$



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 1 Modéliser avec une suite

Énoncé

Un lycée a 1 500 élèves inscrits le 1er septembre 2020. Chaque année, 30 % des anciens élèves ne se réinscrivent pas et il y a 500 nouveaux élèves.

1. Combien y aura-t-il d'élèves inscrits au lycée le 1er septembre 2021 ?

2. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

Solution

1. $1500 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 500 = 1550$ **1**

Il y aura donc 1 550 élèves inscrits le 1er septembre 2021.

2. Soit (u_n) la suite correspondant au nombre d'élèves inscrits le 1er septembre de l'année $(2020 + n)$ **2**

$u_0 = 1\,500$ **3** et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 1500 = 0{,}7u_n + 1500$ **4**

Conseils & Méthodes

1 30 % des élèves ne se réinscrivent pas. Cela correspond à une baisse de 30 %. On multiplie donc par $\left(1 - \frac{30}{100}\right)$.

2 Il faut d'abord identifier ce que l'on veut modéliser : ici le nombre d'élèves inscrits chaque année.

3 u_0 est le nombre d'élèves inscrits en 2020 + 0, soit en 2020.

4 u_n est le nombre d'élèves inscrits en $2020 + n$ et u_{n+1} le nombre en $2020 + (n + 1)$, c'est-à-dire l'année suivante.

À vous de jouer !

1 Nawal s'entraîne pour un marathon. Le premier jour d'entraînement, elle court 1 km. Puis, chaque jour, elle décide d'augmenter sa distance de course de 10 % par rapport au jour précédent. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

2 Le 1er janvier 2020, Mirunan place 5 000 € sur un compte épargne. Chaque année, il dépose 2 000 € supplémentaires sur le compte en juin. Et le 31 décembre, la banque lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte. Modéliser la situation à l'aide d'une suite.

↪ Exercices 32 à 34 p. 30

Méthode 2 Représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$. **1**

On commence par tracer la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Puis, on place u_0 sur l'axe des abscisses.

Pour obtenir la valeur de u_1, on cherche l'image de u_0 par la fonction f.

On obtient donc la valeur de u_1 sur l'axe des ordonnées.

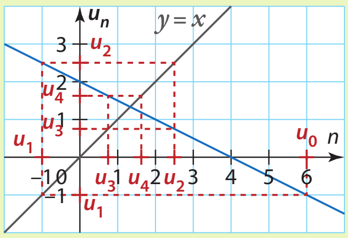
Pour continuer la représentation graphique, il faut avoir la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses.

Pour cela, on utilise la droite d'équation $y = x$.

Puis pour obtenir u_2, on cherche l'image de u_1 par la fonction f. Et ainsi de suite.

Conseils & Méthodes

1 Pour représenter graphiquement une suite définie par une relation de récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$) on trace la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Il faut ensuite représenter les termes de la suite un par un.



À vous de jouer !

3 Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = -8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 1$.

4 Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5$.

↪ Exercices 35 à 37 p. 30

2 Limite d'une suite

Définition Suite ayant pour limite un nombre réel

Une suite (u_n) a pour limite un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de ℓ que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) converge vers ℓ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Définition Suite ayant pour limite l'infini

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi grands (respectivement petits) que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit que (u_n) diverge et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$)

Remarque Certaines suites n'ont pas de limite, comme la suite $(-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs -1 et 1.

Propriété Limite des suites de référence

- **Les suites $(\sqrt{n})$, (n) et (n^k) avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.**
- **Les suites $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.**

Propriété Limites d'une somme et d'un produit

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	(u_n+v_n) a pour limite	$(u_n\times v_n)$ a pour limite
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$ indéterminée si $\ell=0$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$ indéterminée si $\ell=0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminée	$-\infty$

Propriété Limite d'un quotient

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ et ℓ' deux réels.

(u_n) a pour limite	(v_n) a pour limite	$\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\ell\neq 0$	0^+	$+\infty$ si $\ell>0$ $-\infty$ si $\ell<0$
	0^-	$-\infty$ si $\ell>0$ $+\infty$ si $\ell<0$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$ si $\ell'>0$ ou $\ell'=0^+$ $-\infty$ si $\ell'<0$ ou $\ell'=0^-$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$ si $\ell'>0$ ou $\ell'=0^+$ $+\infty$ si $\ell'<0$ ou $\ell'=0^-$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	indéterminée
0	0	indéterminée

Remarques
Dans les deux tableaux précédents :
1. **indéterminée** signifie que c'est une forme indéterminée, et qu'il n'y a pas de propriété pour déterminer la limite.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que $v_n > 0$ (resp. $v_n < 0$) à partir d'un certain rang.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 3 Déterminer la limite d'une suite

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$ **b)** (v_n) **définie par** $v_n = -5\sqrt{n} - n^3$ **c)** (w_n) **définie par** $w_n = \dfrac{2}{3n+5}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par somme) **1**

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\sqrt{n} = -\infty$ (par produit) **2**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ (par somme) **1**

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n+5 = +\infty$ (par produit et somme) **1** **2**.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ (par quotient) **3**

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme somme de suites de référence.

2 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme produit de suites de référence.

3 Pour déterminer la limite de cette suite on essaye de décomposer la suite comme quotient de suites de référence.

À vous de jouer !

5 Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) $u_n = n^2 + n - 5$ **b)** $v_n = n^2\sqrt{n} + 2$ **c)** $w_n = -\dfrac{1}{2n-5}$

6 Déterminer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} - 10\right)$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \square \dfrac{1}{n}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{n}}\right)$

↪ Exercices 38 à 40 p. 30

Méthode 4 Lever une forme indéterminée

Énoncé

Déterminer la limite des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) **définie par** $u_n = n^2 - n$ **b)** (v_n) **définie par** $v_n = \dfrac{4n^2}{n+1}$

Solution

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

Donc on obtient une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \times (n-1)$ **1**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (par produit)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ (par produit) et $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

Donc on obtient une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n^2 \times 4}{n \times \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}$ donc $v_n = \dfrac{n \times 4}{1 + \dfrac{1}{n}}$ **2**

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n \square 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (par quotient)

Conseils & Méthodes

1 Pour lever une indéterminée, on peut factoriser ou développer.

2 Pour lever une indéterminée dans un quotient, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré.

À vous de jouer !

7 Pour chaque suite suivante, montrer que l'on a une forme indéterminée et lever la forme indéterminée à l'aide d'une factorisation.

a) $u_n = -n^3 + 2n^2$ **b)** $v_n = n^2 - 3n + 1$

8 Déterminer la limite des suites suivantes.

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{5n-2}$ **b)** $v_n = \dfrac{2n}{1-n^2}$

↪ Exercices 41 à 44 p. 30

Cours

3 Limite et comparaison

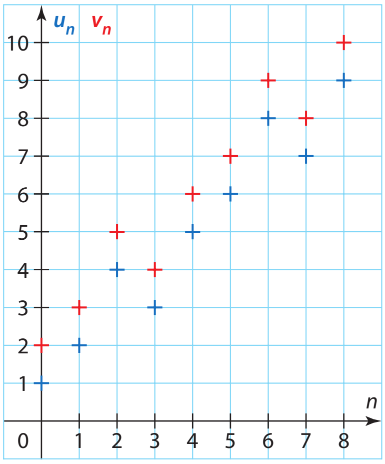
Théorème Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.
On suppose qu'il existe un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.
- **Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.**
- **Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.**

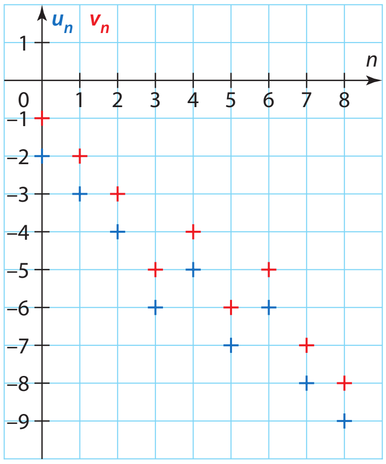
Exemples

Sur les schémas suivants, on a représenté (u_n) en bleu et (v_n) en rouge avec $u_n \leqslant v_n$.

① Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$.



② Les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $-\infty$.



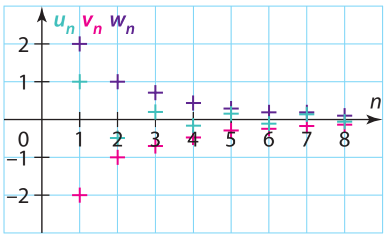
Théorème Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites, et ℓ un réel.
On suppose que :
- **il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$.**
- **$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$.**

Alors la suite (u_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté la suite (u_n) en turquoise, la suite (v_n) en rose et la suite (w_n) en violet.

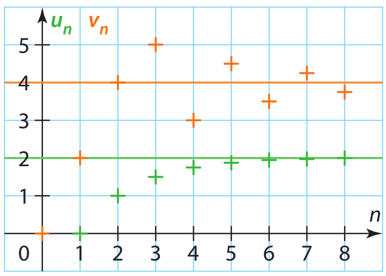


Propriété Inégalités et limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.
On suppose qu'il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$,
$u_n \leqslant v_n$
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté la suite (u_n) en vert et la suite (v_n) en orange.



EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 5 Utiliser le théorème de comparaison

Énoncé

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + 2 \times \sin(n)$
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$
b) En déduire la limite de la suite (u_n)

2. Soit v_n la suite définie par $v_n = -n^2 - n + (-1)^n$.
Déterminer la limite de la suite (v_n).

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ **1**

Donc $-2 \leqslant 2 \times \sin(n) \leqslant 2$ et donc $n - 2 \leqslant n + 2 \times \sin(n) \leqslant n + 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n - 2$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$. **2**

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2. $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **3**. Donc $-n^2 - n - 1 \leqslant -n^2 - n + (-1)^n \leqslant -n^2 - n + 1$.

Donc $v_n \leqslant -n^2 - n + 1$ **4**. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 - n + 1 = -\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $(\sin(n))$ n'a pas de limite.

3 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (v_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

4 Après avoir encadré v_n, on détermine la limite des deux suites de l'encadrement pour choisir quelle inégalité sera utilisée.

À vous de jouer !

9 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 5 \times (-1)^n$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n^2 - 5$.
b) En déduire la limite de la suite (u_n).

10 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\sqrt{n} - \cos(2n)$.
a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant -\sqrt{n} + 1$.
b) En déduire la limite de la suite (v_n).

➥ Exercices 45 à 46 p. 31

Méthode 6 Utiliser le théorème des gendarmes

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ **1**. Donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ **2**,

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

Conseils & Méthodes

1 On ne peut pas déterminer directement la limite de la suite (u_n) en utilisant les propriétés des opérations car la suite $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
On essaye donc d'abord d'encadrer la suite (u_n).

2 On détermine ensuite la limite des deux suites de l'encadrement.

À vous de jouer !

11 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = -5 + \dfrac{\sin(n)}{n}$
Déterminer la limite de la suite (u_n).

12 Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 42 - \dfrac{5 \times (-1)^n}{\sqrt{n}}$
Déterminer la limite de la suite (v_n).

➥ Exercices 47 à 50 p. 31

Cours

4 Cas particuliers

Propriété Limite de q^n

Soit q un réel positif ou nul.

- **Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$**
- **Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$**
- **Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$**

Exemple $0 \leqslant \dfrac{1}{2} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

Propriété Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $q \geqslant 0$ et de premier terme u_p avec $p \in \mathbb{N}$.

- **Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$**
- **Si $q > 1$ et $u_p > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$**
- **Si $q > 1$ et $u_p < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$**
- **Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_p$**

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3}$.
(u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$. Or $0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Propriété Limite de la somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) et de raison q, avec $0 \leqslant q < 1$.
Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n). On a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_p}{1-q}$

Démonstration

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_{p+n-1} = u_p + u_p \times q + u_p \times q^2 + \ldots + u_p \times q^{n-1}$$

$$= u_p \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = u_p \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$0 \leqslant q < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - q^n = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} S_n = u_p \times \frac{1}{1-q} = \frac{u_p}{1-q}$$

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-c01-04

Exemple En reprenant l'exemple précédent, le somme des n premiers termes de (u_n) a pour limite $\dfrac{5}{1-\dfrac{1}{3}}$ soit 7,5 quand n tend vers $+\infty$.

Définition Suite arithmético-géométrique

Une suite (u_n) est arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Remarques

① Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante. ② Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique. ③ Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique.

Exemple Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Propriété Suite arithmético-géométrique et suite géométrique

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique de premier terme u_p ($p \in \mathbb{N}$) et telle que pour tout entier $n \geqslant p$, $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$. Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant p$, par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_p = u_p - \ell$.

Remarque À l'aide de la suite (v_n), on peut déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
En effet, on a alors pour tout entier $n \geqslant p$, $v_n = v_p \times a^{n-p}$. Or $v_n = u_n - \ell$. Donc $u_n = v_n + \ell = v_p \times a^{n-p} + \ell$.

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 Les rendez-vous Sésamath

Exercices résolus

Méthode 7 Étudier une suite géométrique

Énoncé

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = 5$. Déterminer la limite de la suite (u_n), l'expression de la somme de ses n premiers termes en fonction de n ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Solution

$0 < \frac{1}{4} < 1$ **1**. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$ **2**

$S_n = u_0 + u_0 \times q + \ldots + u_0 \times q^{n-1}$ **3**

$S_n = u_0 \times (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ **4**

$$S_n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = 5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \times \left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{20}{3}$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer la limite d'une suite géométrique, il faut regarder la valeur de la raison de la suite.

2 Le premier terme est u_0, donc le n-ième terme est u_{n-1}.

3 On exprime les termes de la somme en fonction du premier terme (ici u_0), puis on factorise.

4 $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

À vous de jouer !

13 Pour chaque suite ci-dessous, déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

a) (u_n) est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1 = -2$.

b) (u_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -4 \times 3^n$.

14 Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = 4$.
Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

1. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

2. Déterminer la limite S_n quand n tend vers $+\infty$.

↪ Exercices 51 à 55 p. 31

Méthode 8 Étudier une suite arithmético-géométrique (1)

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction n.

Solution

(u_n) est une suite arithmético-géométrique. On suppose que (u_n) est convergente de limite x. $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} (3u_n - 4)$ donc $x = 3x - 4$

$x = 3x - 4 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$ **1**

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$ **2**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2$ **3** $= 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3 \times (u_n - 2) = 3v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 6 - 2 = 4$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 \times 3^n$ **4**

Or $v_n = u_n - 2$. Donc $u_n = v_n + 2$ et donc $u_n = 4 \times 3^n + 2$.

Conseils & Méthodes

1 On reconnaît une suite arithmético-géométrique avec $u_{n+1} = au_n + b$. On commence par résoudre l'équation $x = ax + b$.

2 On étudie ensuite la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - \ell$ où ℓ est la solution de l'équation $x = ax + b$.

3 Pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$ avec q un réel fixé.

4 On exprime ensuite v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

À vous de jouer !

15 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$. Donner l'expression de u_n en fonction n.

16 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -4v_n + 10$. Donner l'expression de v_n en fonction n.

↪ Exercices 56 à 59 p. 31

Exercices résolus

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-c01-03 — Les rendez-vous Sésamath

Méthode 9 Étudier une suite arithmético-géométrique (2)

Cours 2 p. 20 et Cours 4 p. 24

Énoncé

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n - 4$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n).

4. Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n et en déduire la limite de (S_n).

D'après bac

Solution

1. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. **1**

$x = 0{,}8x - 4 \Leftrightarrow 0{,}2x = -4 \Leftrightarrow x = -20$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - (-20) = u_n + 20$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 20 = 0{,}8u_n - 4 + 20$

$= 0{,}8u_n + 16 = 0{,}8 \times (u_n + 20) = 0{,}8 \times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 + 20 = 4 + 20 = 24$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 24 \times 0{,}8^n$.

Or $v_n = u_n + 20$. Donc $u_n = v_n - 20 = 24 \times 0{,}8^n - 20$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 24 \times 0{,}8^{n+1} - 20 - (24 \times 0{,}8^n - 20)$ **2**

$= 24 \times 0{,}8^{n+1} - 24 \times 0{,}8^n$

$= 24 \times 0{,}8^n \times (0{,}8 - 1)$ **3**

$= 24 \times 0{,}8^n \times (-0{,}2)$

$= -4{,}8 \times 0{,}8^n$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ **4**. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 24 \times 0{,}8^n = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 24 \times 0{,}8^n - 20 = -20$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -20$

4. $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}$ **5**

$= 24 \times 0{,}8^0 - 20 + (24 \times 0{,}8^1 - 20) + (24 \times 0{,}8^2 - 20) + \ldots + (24 \times 0{,}8^{n-1} - 20)$

$= -20 \times n + (24 \times 0{,}8^0 + 24 \times 0{,}8^1 + 24 \times 0{,}8^2 + \ldots + 24 \times 0{,}8^{n-1})$ **6**

$= -20 \times n + 24 \times (1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^{n-1})$

Donc $S_n = -20n + 24 \times \dfrac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} = -20n + 24 \times \dfrac{1 - 0{,}8^n}{0{,}2} = -20n + 120(1 - 0{,}8^n)$

Or $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - 0{,}8^n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 120 \times (1 - 0{,}8^n) = 120$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} -20 \times n = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique : Méthode 8 p. 25

2 Pour étudier les variations d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors la suite est strictement croissante.
Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors la suite est strictement décroissante.

3 Pour simplifier l'expression, on factorise. Ici le facteur commun est $24 \times 0{,}8^n$. De plus, $0{,}8^{n+1} = 0{,}8^n \times 0{,}8^1$.

4 Pour déterminer la limite d'une suite arithmético-géométrique, on utilise les propriétés du cours pour les limites de (q^n) et les opérations sur les limites.

5 Le n-ième terme est u_{n-1}.

6 On regroupe les termes « -20 » ensemble et les termes de la forme $24 \times 0{,}8^k$ ensemble.

À vous de jouer !

17 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 8$.

1. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2. Étudier les sens de variations de la suite (u_n).

18 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}6v_n + 2$.

1. Déterminer l'expression de v_n en fonction n.

2. Soit S_n la somme des n premiers termes de la suite (v_n). Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, puis en déduire la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercices 67 à 77 p. 33

Exercices résolus

Méthode 10 Étudier deux suites croisées

Cours 4 p. 24

Énoncé

On veut étudier l'évolution du nombre d'habitants entre deux villes A et B. On suppose que la population totale des villes A et B est constante. En 2020, il y a 17 500 habitants dans chaque ville.

Puis d'une année sur l'autre, on suppose que 15 % des habitants de la ville A partent pour habiter dans la ville B et 20 % des habitants de la ville B partent pour habiter dans la ville A.

On note u_n le nombre d'habitants de la ville A en 2020 + n et v_n le nombre d'habitants de la ville B en 2020 + n.

1. **Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$**

2. **Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 0{,}2v_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 7\,000$**

3. **Déterminer l'expression de u_n en fonction de n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.**

Solution

1. La population totale des villes A et B est constante.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 17\,500 + 17\,500 = 35\,000$ **1**

2. 15 % des habitants de la ville A partent pour habiter dans la ville B et 20 % des habitants de la ville B partent pour habiter dans la ville A.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \left(1 - \dfrac{15}{100}\right)u_n + \dfrac{20}{100}v_n$ **2** $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 0{,}2v_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + \dfrac{20}{100}(35\,000 - u_n)$ **3**

$= 0{,}85u_n + 7\,000 - 0{,}2u_n$

Donc $u_{n+1} = 0{,}65u_n + 7\,000$

3. (u_n) est une suite arithmético-géométrique. **4**

$x = 0{,}65x + 7\,000 \Leftrightarrow 0{,}35x = 7\,000 \Leftrightarrow x = \dfrac{7\,000}{0{,}35} \Leftrightarrow x = 20\,000.$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 20\,000$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} - 20\,000 = 0{,}65u_n + 7\,000 - 20\,000 = 0{,}65u_n - 13\,000 = 0{,}65(u_n - 20\,000) = 0{,}65w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,65 et de premier terme $w_0 = u_0 - 20\,000 = -2\,500$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -2\,500 \times 0{,}65^n$. Or $w_n = u_n - 20\,000$ donc $u_n = w_n + 20\,000$ et donc $u_n = -2\,500 \times 0{,}65^n + 20\,000$.

$u_n + v_n = 35\,000$. Donc $v_n = 35\,000 - u_n = 35\,000 - (-2\,500 \times 0{,}65^n + 20\,000)$. Donc $v_n = 15\,000 + 2\,500 \times 0{,}65^n$

Conseils & Méthodes

1 La population totale des villes A et B est constante. Donc $u_n + v_n$ est constant.

2 15 % des habitants de la ville A partent pour la ville B, cela correspond à une diminution de 15 %. Il faut donc multiplier par $\left(1 - \dfrac{15}{100}\right)$.

3 $u_n + v_n = 35\,000$, donc $v_n = 35\,000 - u_n$

4 Pour déterminer l'expression d'une suite arithmético-géométrique : Méthode 8 p. 25

À vous de jouer !

19 On s'intéresse au nombre d'abonnés dans un club de sport dans une ville qui contient 5 000 habitants. On suppose que le nombre d'habitants dans la ville est constant. La première année, il y a 600 abonnés. Puis, chaque année, 60 % des abonnés se réinscrivent, et 10 % des personnes qui n'étaient pas abonnés s'abonnent. On note u_n le nombre d'habitants de la ville abonnés au club n années après l'ouverture du club et v_n le nombre d'habitants de la ville non abonnés au club n années après l'ouverture du club

1. Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}1v_n$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 500$

4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

20 *RougeTel* et *BleuMobile* sont deux opérateurs de téléphonie dans une ville de 10 000 habitants. La population est constante et tous les habitants sont abonnés à l'un des deux opérateurs. En 2020, 2 000 habitants souscrivent à *RougeTel*. Chaque année, 80 % des abonnés de *RougeTel* se réabonnent à *RougeTel*, et 30 % des abonnés de *BleuMobile* changent d'opérateur et partent chez *RougeTel*. On note u_n le nombre d'habitants abonnés à *RougeTel* en 2021 + n, et v_n le nombre d'habitants abonnés à *BleuMobile* en 2021 + n.

1. Déterminer la valeur de $u_n + v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 0{,}3v_n$.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3\,000$.

4. Déterminer les expression de u_n et v_n en fonction de n.

↪ Exercices 78 à 79 p. 35

Exercices apprendre à démontrer

La propriété à démontrer

La suite auxiliaire d'une suite arithmético-géométrique est géométrique.

On traitera la démonstration de la façon suivante.

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$, avec $a \neq 1$.

Soit ℓ la solution de l'équation $x = ax + b$. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \ell$.

Alors la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Comprendre avant de rédiger

- Soit, par exemple, la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

$x = 2x - 1 \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$. La suite auxiliaire est donc la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$.

On a $u_0 = 5$, $u_1 = 2 \times 5 - 1 = 9$, $u_2 = 2 \times 9 - 1 = 17$, $u_3 = 2 \times 17 - 1 = 33$

On a donc $v_0 = u_0 - 1 = 4$; $v_1 = u_1 - 1 = 8$; $v_2 = u_2 - 1 = 16$ et $v_3 = u_3 - 1 = 32$.

La suite (v_n) semble géométrique de raison 2.

- Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q \times v_n$, avec q un réel donné.

Rédiger

Étape 1

On veut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a \times v_n$.
On sait que $v_n = u_n - \ell$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$.

On peut remplacer n par la valeur que l'on veut. Ici, on a choisi $n+1$, pour pouvoir faire apparaître v_{n+1}.

Étape 2

On utilise une autre relation de l'énoncé : $u_{n+1} = au_n + b$.

Étape 3

On cherche à exprimer ℓ en fonction de a et b.

On isole l'inconnue dans l'équation.

Étape 4

On remplace ℓ dans l'expression de v_{n+1}, et on simplifie l'expression.

On rappelle que pour soustraire deux fractions, il faut qu'elles soient réduites au même dénominateur.

Étape 5

On veut montrer que pour tout $n \in n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a \times v_n$.
On factorise donc par a dans l'expression de v_{n+1}.

$a \times b - a \times c = a \times (b - c)$

La démonstration rédigée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell$

$v_{n+1} = au_n + b - \ell$

Or ℓ est solution de l'équation $x = ax + b$.

Et $x = ax + b \Leftrightarrow x - ax = b \Leftrightarrow x \times (1 - a) = b$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{b}{1-a}$ Donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$

Donc :

$$v_{n+1} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a) - b}{1-a}$$

$$= au_n + \frac{b - ab - b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a}$$

Donc :

$$v_{n+1} = a \times \left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) = a \times (u_n - \ell) = a \times v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \ell$.

Pour s'entraîner

Utiliser la méthode de la démonstration précédente dans l'exemple suivant.

Soit (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Déterminer la suite auxiliaire et démontrer qu'elle est géométrique.