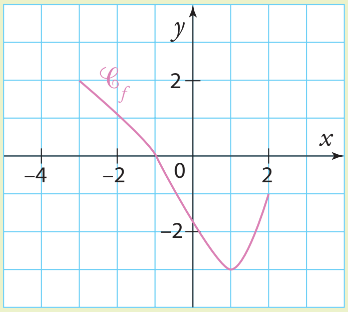
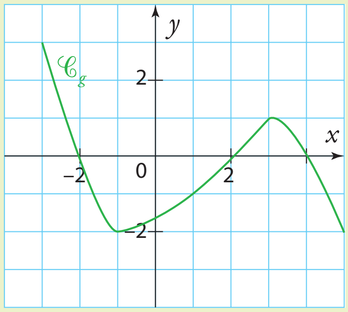
Exercices résolus

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-20

1 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction → Cours 1 p. 244

On considère les fonctions f et g dont voici les courbes représentatives dans des repères.





1. a) Résoudre $f(x) = 0$.
b) Résoudre $f(x) > 0$.
c) Dresser le tableau de signes de la fonction f.

2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction g.

Solution

1. a) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$. 1

b) $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3\,;-1[$. 2

c) On obtient le tableau de signes suivant : 3 4 5

x	–3		–1		2
$f(x)$		+	0	–	

2. $g(x) = 0$ si et seulement si $x = -2$ ou $x = 2$ ou $x = 4$.

$g(x) > 0$ si et seulement si $x \in [-3\,;-2[\cup]2\,;4[$.

x	– 3		– 2		2		4		5
$g(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

Conseils & Méthodes

1 Résoudre $f(x) = 0$ revient à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses.

2 Résoudre $f(x) > 0$ revient à chercher l'abscisse des points de f situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses.

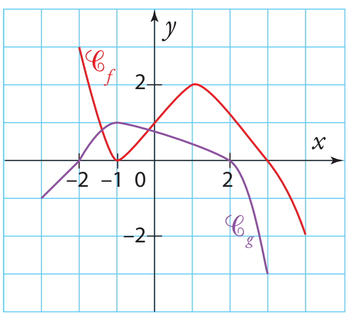
3 On indique dans la première ligne du tableau l'ensemble de définition de la fonction ainsi que les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

4 On indique les 0 correspondants dans la seconde ligne du tableau.

5 Enfin, on complète le tableau avec des + ou des – selon les solutions des inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$.

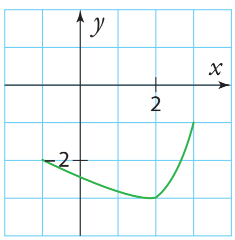
À vous de jouer !

1 Dans chaque cas, déterminer le signe de la fonction dont on donne la courbe représentative dans un repère.

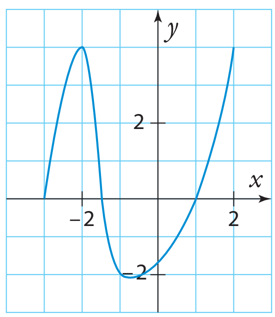


2 Dans chaque cas, déterminer le signe de la fonction f dont on donne la courbe représentative dans un repère.

a)



b)



→ Exercices 19 à 22 p. 252

2 Déterminer le signe d'une fonction affine

Cours 2 p. 245

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -x + 4$.

1. Résoudre $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.

2. a) Déterminer le sens de variations des fonctions f et g.
b) Tracer leurs courbes représentatives dans un repère.
c) En déduire les tableaux de signes de ces fonctions.

3. a) Résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$.
b) Retrouver les tableaux de signes des fonctions f et g.

Solution

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. 1

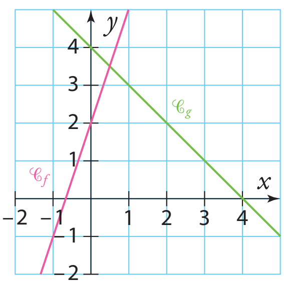
$g(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

2. a) f et g sont des fonctions affines.

Pour f, $a = 3 > 0$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour g, $a = -1 < 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$. 2

b) On trace leurs courbes en calculant deux ou trois images ou en utilisant les ordonnées à l'origine et coefficients directeurs des droites les représentant.



c) On en déduit les tableaux de signes suivants. 3

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Conseils & Méthodes

1 Quelle que soit la méthode utilisée, on cherche d'abord la valeur de x qui annule la fonction affine.

2 $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$, on observe le signe de a pour en déduire les variations de la fonction affine.

3 À l'aide des variations (ou de l'allure de leur droite représentative), on détermine le signe de la fonction affine en fonction des valeurs de x.

4 Lors de la résolution des inéquations, il faut faire attention au fait que multiplier ou diviser par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.

3. a) • $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$

• $g(x) > 0 \Leftrightarrow -x + 4 > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$ 4

b) On retrouve le fait que f est positive sur $\left]-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ et nulle en $-\frac{2}{3}$, donc strictement négative sur $\left]-\infty ; -\frac{2}{3}\right[$.

De même, g est strictement positive sur $]-\infty ; 4[$, nulle en 4 et strictement négative sinon.

À vous de jouer !

3 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 3$ et $g(x) = -2x + 7$.

1. a) Résoudre $f(x) = 0$.

b) Déterminer les variations de f.

c) Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

2. Reprendre les questions précédentes pour $g(x)$.

4 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x - 12$ et $g(x) = 3x - 1$.

1. a) Résoudre $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.

b) Déterminer le tableau de signes de $f(x)$.

2. Reprendre les questions précédentes pour $g(x)$.

Exercices 23 à 27 p. 253

Exo Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-20

3 Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

Cours 3 p. 246

1. Étudier le signe de $2x+4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier le signe de $-x+3$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire le signe de $A(x) = (2x+4)(-x+3)$ et de $B(x) = \dfrac{2x+4}{-x+3}$.

Solution

1. $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{-4}{2}=-2$ **1**

De plus, $a=2>0$ donc $x \mapsto 2x+4$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes suivant. **2**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

2. $-x+3=0 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$

De plus, $a=-1<0$ donc $x \mapsto -x+3$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$	0	$-$	

3. On compile les informations précédentes dans un tableau pour en déduire le signe du produit et du quotient. **3** **4** **5**

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Conseils & Méthodes

1 Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on commence par étudier le signe de chaque terme du produit ou du quotient.

2 On indique les différents signes dans un même tableau de signes, en faisant attention à l'ordre des nombres dans la première ligne.

3 On déduit le signe du produit ou du quotient en utilisant la règle des signes.

4 Il ne faut pas oublier d'indiquer les « 0 » du produit ou du quotient.

5 Lorsque le quotient n'est pas défini pour une valeur de x (lorsque le dénominateur s'annule), on place une double barre dans le tableau.

À vous de jouer !

5 **1.** Étudier le signe des expressions $2x+1$; $-3x-1$ et $5x+2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire le signe de :

a) $A(x) = -2x-1$

b) $B(x) = (2x+1)(-3x-1)$

c) $C(x) = \dfrac{2x+1}{-3x-1}$

d) $D(x) = (2x+1)(-3x-1)(5x+2)$

6 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $x(-3x+6)$

b) $2(-3+4x)(7+x)$

c) $-3x(-4x+4)$

7 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{4x+8}$ **b)** $\dfrac{x+2}{9+x}$ **c)** $\dfrac{7x+6}{x^2}$

8 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $(5x+10)(-3x+6)$

b) $(2x+4)(-x-6)$

c) $(-4x+5)(6x+7)(-0{,}5x+9)$

9 Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $-3x(x-6)$ **b)** $\dfrac{5x-2}{-x}$ **c)** $\dfrac{4-x}{6+0{,}1x}$

Exercices 28 à 35 p. 253-254

4 Résoudre une inéquation avec une étude de signe

Cours 3 p. 246

1. a) Étudier le signe de $(2x+4)(x+1)$.
b) En déduire l'ensemble des solutions des inéquations $(2x+4)(x+1) < 0$ et $(2x+4)(x+1) \geqslant 0$.

2. On considère l'inéquation $x^2 - x > 6$.
a) Montrer que $x^2 - x > 6 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) > 0$.
b) En déduire l'ensemble des solutions de $x^2 - x > 6$.

3. On considère l'inéquation $\dfrac{3+4x}{x+1} \leqslant 2$.

a) Montrer que $\dfrac{3+4x}{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+1} \leqslant 0$. **b) En déduire les solutions de $\dfrac{3+4x}{x+1} > 2$.**

Solution

1. a) $2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$ et $x \mapsto 2x+4$ est croissante sur $\mathbb{R}$. 1

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ et $x \mapsto x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes et le signe du produit.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $(2x+4)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2\,;-1[$

$(2x+4)(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-2] \cup [-1\,;+\infty[$

2. a) $(x-3)(x+2) = x^2+2x-3x-6 = x^2-x-6$

donc $x^2-x>6 \Leftrightarrow x^2-x-6>0 \Leftrightarrow$
$(x-3)(x+2)>0$. 2

b) On étudie le signe de $(x-3)(x+2)$ pour lire les solutions dans le tableau de signes.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que les solutions sont les nombres x tels que $x \in]-\infty\,;-2[\cup]3\,;+\infty[$. D'après le tableau de signes, les solutions de $\dfrac{3+4x}{x+1} \leqslant 2$ sont donc les nombres x tels que $x \in \left]-1\,;-\dfrac{1}{2}\right]$.

Conseils & Méthodes

1 Connaître le signe d'une expression $A(x)$ permet de résoudre des inéquations du type $A(x) > 0$ ou $A(x) \leqslant 0$.

2 Résoudre des inéquations revient le plus souvent à étudier le signe d'une fonction lorsque le second terme est nul.

3 Une fois ramené à un second terme nul, on factorise, éventuellement en reconnaissant une identité remarquable ou un facteur commun.

4 Une fois ramené à un second terme nul, on réduit au même dénominateur.

3. a) $\dfrac{3+4x}{x+1} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{3+4x}{x+1} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$ 3

$\dfrac{3+4x-2(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x+1} \leqslant 0$ 4

b) On étudie le signe de $\dfrac{2x+1}{x+1}$ pour lire les solutions de l'inéquation.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2x+1}{x+1}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

À vous de jouer !

10 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(7x+14)(5x+1) > 0$ **b)** $3x(-6x+2) \geqslant 0$

c) $x^2(6x+1) < 0$ **d)** $(-5x+15)(6x+7)(5-7x) > 0$

11 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x}{x+3} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{x+1}{x} < \dfrac{4x+5}{x}$

Exercices 36 à 41 p. 254

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

12 Quelle démarche doit-on mettre en œuvre pour déterminer le signe d'une fonction dont la courbe est donnée ?

13 Donner les différents tableaux de signes possibles pour une expression affine $ax + b$.

14 On considère l'inéquation $(2x + 1)(-3x + 8) < 0$. Indiquer la méthode à mettre en œuvre pour résoudre cette inéquation, en précisant les différentes étapes.

Questions - Flash

Diapo
Diaporama
Ressource professeur

15 Voici le tableau de signes d'une fonction f définie sur $[-5\ ;5]$.
Que dire du signe de :

a) $f(0)$? **b)** $f(4)$?
c) $f(3)$? **d)** $f(-4)$?

x	-5		-4		3		5
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

16 Compléter les tableaux de signes suivants.

a)

x	$-\infty$		…		$+\infty$
$2x-9$		…	0	…	

b)

x	$-\infty$		…		$+\infty$
$-11x-5$		…	0	…	

17 Compléter le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-5)(-x+1)$.

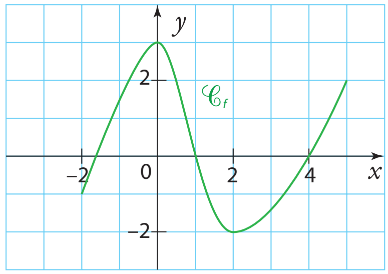
x	$-\infty$		…		…		$+\infty$
$x-5$		…		…		…	
$-x+1$		…		…		…	
$f(x)$		…		…		…	

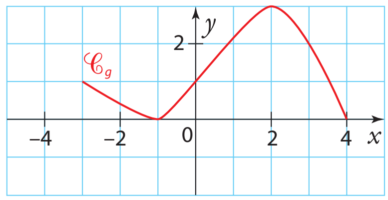
18 Voici un tableau de signes incomplet de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x + 8$.
Calculer $f(0)$ et $f(4)$ puis compléter le tableau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		…	0	…	

Lire le signe d'une fonction

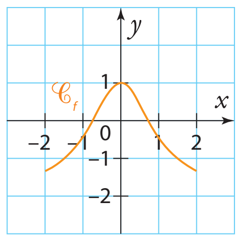
19 f et g sont deux fonctions dont voici les courbes représentatives.

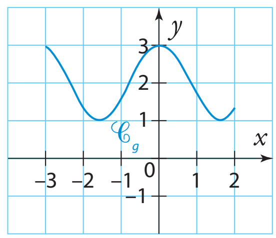




Dresser leurs tableaux de signes.

20 Dresser le tableau de signes des fonctions f et g dont voici les courbes représentatives dans un repère.

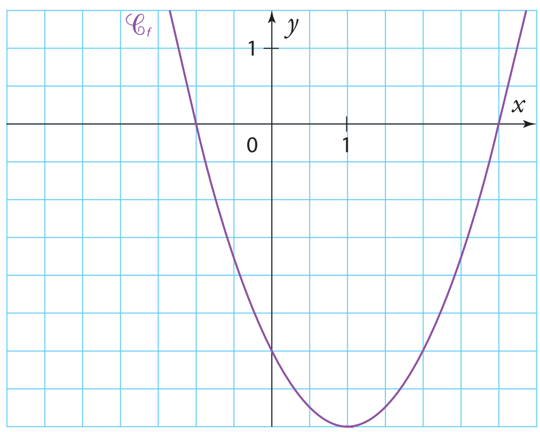




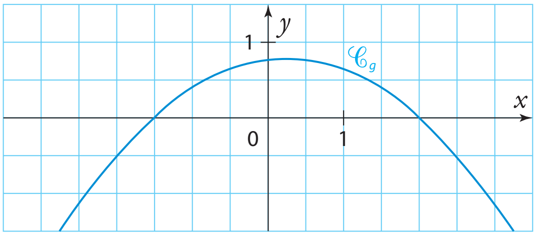
21 Une fonction h est définie sur $[-5\ ;8]$.
Elle s'annule en -2 ; 0 et 5 et est positive pour tout x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;5]$. Elle est négative sinon.
Dresser le tableau de signes de cette fonction.

22 Dresser les tableaux de signes des fonctions f, g, h et m définies sur $\mathbb{R}$ et représentées ci-dessous.

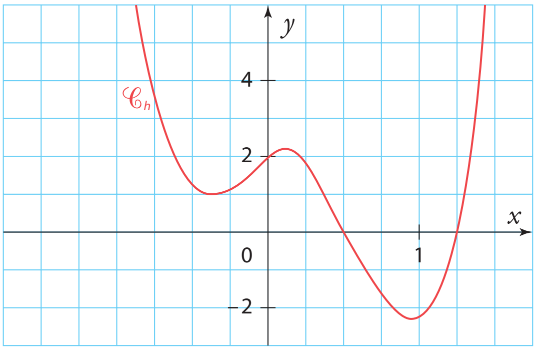
a)



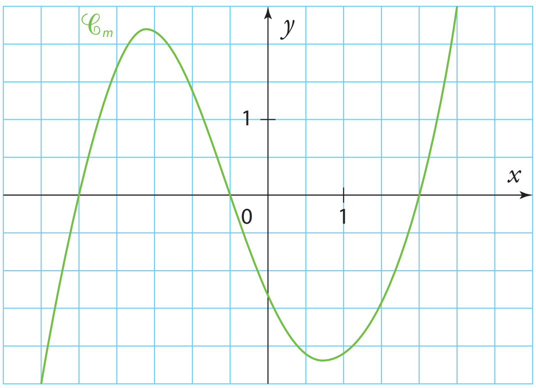
b)



c)



d)



Déterminer le signe d'une fonction affine

23 Étudier le signe des expressions suivantes.
a) $2x+4$ **b)** $8x-5$ **c)** $-3x+12$ **d)** $-7x-2$

24 Étudier le signe des expressions suivantes.
a) $3x+5$ **b)** $-x+4$ **c)** $-2x$ **d)** $\dfrac{1}{2}x+4$

25 f et g sont deux fonctions affines dont voici les tableaux de signes.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Donner une expression possible pour chacune de ces fonctions.

26 Étudier les signes des fonctions affines suivantes et dresser leurs tableaux de signes.
a) $f(x) = 9x+7$ **b)** $h(x) = -0{,}8x+2$
c) $g(x) = x - \sqrt{2}$ **d)** $m(x) = -0{,}125x-3$

27 Étudier les signes des fonctions affines suivantes et dresser leurs tableaux de signes.
a) $f(x) = -3x-7$ **b)** $h(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{5}$
c) $g(x) = 4\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ **d)** $m(x) = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{12}{7}$

Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

28 Étudier le signe des expressions suivantes.
a) x **b)** x^2 **c)** x^4+1 **d)** $\dfrac{1}{x}$

29 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-4)(x+2)$.
1. Déterminer le signe de $3x-4$ et de $x+2$.
2. Dresser le tableau de signes de la fonction f.
3. Représenter graphiquement f sur l'écran de la calculatrice et contrôler le résultat de la question précédente.

30 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.
a) $h(x) = (-2x+3)(-3x-5)$
b) $u(x) = (2x+14)(6x+24)$
c) $v(x) = (5x-65)(7-2x)$
d) $w(x) = (-3x-72)(-4x-96)$

31 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.
a) $h(x) = \dfrac{x+2}{-x^3}$ **b)** $u(x) = \dfrac{2x+3}{6x-4}$
c) $v(x) = \dfrac{-3x-9}{-2x+7}$ **d)** $w(x) = \dfrac{x}{8-x}$

32 Étudier le signe des expressions suivantes.
a) $\dfrac{6}{-2x+1}$ **b)** $\dfrac{x+2}{3-x}$
c) $\dfrac{-7x+14}{3x}$ **d)** $\dfrac{x}{6-3x}$

33 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = 3(x-7)$
b) $g(x) = -2(2+x)(3-x)$

34 **1.** Étudier le signe de $2x-1$ et de $x-3$.
2. En déduire le tableau de signes des expressions suivantes.
a) $\mathrm{O} = \dfrac{2x-1}{x-3}$
b) $\mathrm{L} = \dfrac{2x-1}{3-x}$
c) $\mathrm{S} = \dfrac{-5(2x-1)}{3-x}$

Exercices d'application

35 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x - 5)(x + 7)$.

1. Dresser le tableau de signes de la fonction g.

2. En déduire les signes des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -2(4x - 5)(x + 7)$

b) $h(x) = x^2(4x - 5)(x + 7)$

c) $k(x) = -3(4x - 5)(x + 7)$

d) $t(x) = (5 - 4x)(x + 7)$

e) $p(x) = (5 - 4x)(-x - 7)$

Résoudre une équation ou une inéquation à l'aide d'une étude de signe

36 f est une fonction dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		-5		1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \leqslant 0$ **d)** $f(x) < 0$

37 Voici deux tableaux de signes.

x	$-\infty$		-2		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		6		11		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	

1. Dans un repère, tracer une courbe représentative possible pour chacune de ces fonctions.

2. À l'aide de ces tableaux, résoudre :

a) $f(x) \geqslant 0$

b) $g(x) < 0$

3. Peut-on comparer f et g ?
Si oui, sur quel intervalle ?

38 **1.** Étudier le signe de $(x - 2)(-2x + 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire les solutions de $(x - 2)(-2x + 3) > 0$.

39 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes à l'aide d'études de signe.

a) $(9x - 1)(4 - x) < 0$ **b)** $(3x + 2)(4x - 8) \geqslant 0$

c) $3x^2 - 6x > 0$ **d)** $x^2 - 9 < 0$

40 Sur le modèle de l'exercice **38**, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{4x + 1} > 0$ **b)** $\dfrac{-2x}{x + 8} \leqslant 0$

c) $\dfrac{4x + 4}{-5x - 10} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{3x + 7}{5x + 8} < 0.$

41 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{x}{x + 2} > 1$ **b)** $\dfrac{-x}{3x + 1} > -3$ **c)** $\dfrac{x + 2}{x - 1} > \dfrac{x + 1}{x}$

Interpréter un tableau de signes

42 À partir du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

1. donner les signes des nombres suivants.

a) $f(5)$ **b)** $f(-2)$ **c)** $f(-7)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $f(x) > 0$ **b)** $f(x) \geqslant 0$ **c)** $f(x) < 0$

3. Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

43 À partir du tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

1. donner les signes des nombres suivants.

a) $g(12)$ **b)** $g(-25)$ **c)** $g(0)$

2. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $g(x) > 0$ **b)** $g(x) \geqslant 0$ **c)** $g(x) < 0$

3. Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction g.

Calculs et automatismes

44 Simplifier.

a) $\dfrac{4}{6}$ **b)** $\dfrac{32}{10}$ **c)** $\dfrac{14}{35}$ **d)** $2^3 - 3^3$ **e)** $\sqrt{8} - \sqrt{2}$

45 Résoudre les équations et inéquation suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $3x + 9 = 0$ **b)** $-2x = 7$ **c)** $2x + 1 > 0$

46 Factoriser.

a) $x^2 - 4$ **b)** $-3x^2 - 5x$ **c)** $-x^2 - x$

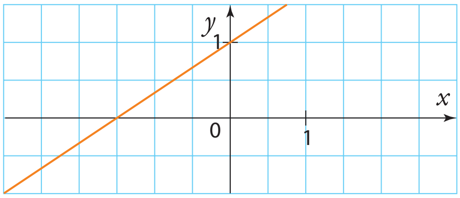
47 Donner le tableau de signes des expressions suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

a) $x + 6$ **b)** x^2 **c)** $-x + 2$

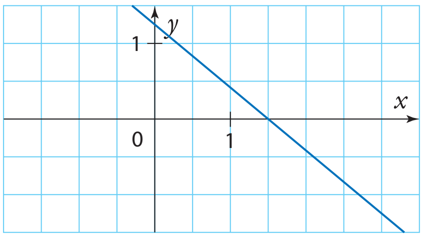
Interpréter un tableau de signes

48 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
1. Dresser son tableau de signes.
2. Sans faire de calcul, que dire du signe de :
a) $f(0{,}219)$? **b)** $f(-0{,}517)$?

49 À partir de la représentation graphique ci-dessous de la fonction affine f, déterminer :
a) l'expression algébrique de la fonction f.
b) le tableau de signes de la fonction f.



50 Même exercice que le précédent avec la représentation graphique suivante.



Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

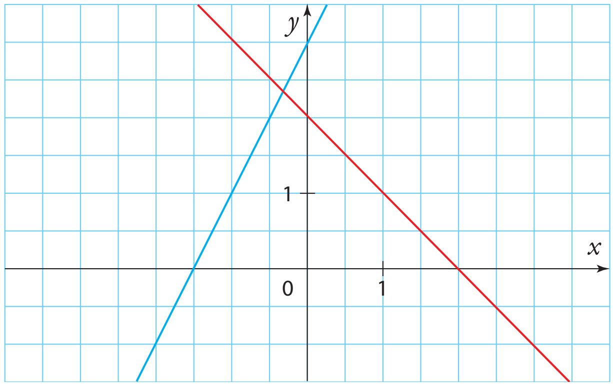
51 Déterminer les signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = (x + 6)^2 - 25$
b) $g(x) = (5x - 3)^2 - (x - 4)^2$
c) $h(x) = x^2 - 7x$
d) $k(x) = (-3x + 8)(7x - 4) - (-3x + 8)(5 - 2x)$

52 Écrire sous la forme d'une seule fraction de la manière la plus simple possible, puis étudier le signe des expressions obtenues.
a) $V = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}$ **b)** $I = \dfrac{5}{2x-1} + 1$
c) $T = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x-1}{3x+5}$ **d)** $E = \dfrac{x}{1-5x} + \dfrac{2}{x+1}$

53 Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$
c) $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$ **d)** $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$
e) $m(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$ **f)** $p(x) = \dfrac{x}{(x-6)(7x+8)}$

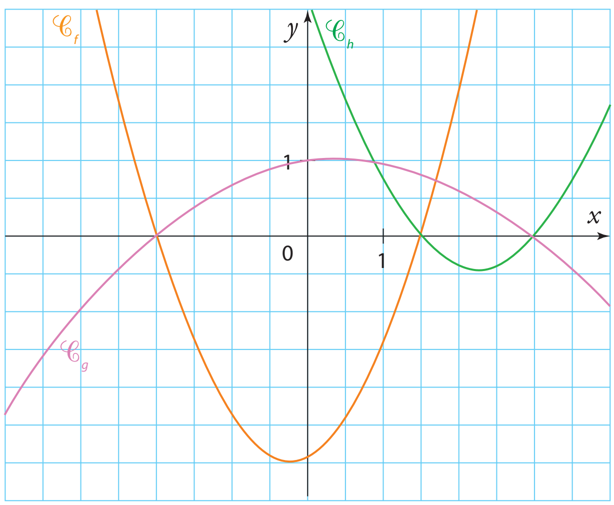
54 Dresser les tableaux de signes des fonctions suivantes.
a) $f(x) = (8x - 1)^2(2 - 7x)$
b) $g(x) = (x - 4)(9x + 2)(5 - x)$
c) $h(x) = -3(5x - 1)(x + 1)(4 - 6x)$

55 Le graphique ci-dessous donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
• $f(x) = 2x + 3$ • $g(x) = -x + 2$



On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par :
$h(x) = (2x + 3)(-x + 2)$.
1. Attribuer chaque courbe à sa fonction.
2. Déterminer graphiquement les valeurs pour lesquelles la fonction h s'annule.
3. Résoudre graphiquement $h(x) \geqslant 0$.
4. En déduire le tableau de signes de h.
5. Proposer une courbe représentative possible de la fonction h.

56 Sur le graphique ci-dessous sont représentées les fonctions f, g et h.
Elles sont le produit de deux fonctions parmi les fonctions affines suivantes.
• $u_1(x) = 2x - 3$ • $u_2(x) = 0{,}5x + 1$
• $u_3(x) = \dfrac{1}{3}x - 1$ • $u_4(x) = 3 - 2x$
• $u_5(x) = -0{,}5x - 1$ • $u_6(x) = -\dfrac{1}{3}x + 1$
Retrouver les expressions des fonctions f, g et h.



Exercices d'entraînement

Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signes

57 Résoudre les inéquations suivantes.

a) $x^2 > 16$ **b)** $16x^2 + 8x + 1 > 0$

c) $64x^2 - 121 > 0$ **d)** $49 - (3 + x)^2 \leqslant 0$

58 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$ **b)** $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$ **c)** $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$

59 Résoudre : **a)** $\dfrac{3x-1}{x+2} < 3$ **b)** $\dfrac{-x+1}{5x+2} \geqslant 2$

60 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{2x-5}{-x+7} \geqslant 1$ **b)** $\dfrac{2}{2x+3} \leqslant 5$ **c)** $\dfrac{1}{x} > \dfrac{3}{-7+6x}$

61 f et g sont deux fonctions dont voici les tableaux de variations.

x	-4		-1		1
f	1	↘	0	↗	3

x	-7		5		9
g	-2	↗	4	↘	1

On sait de plus que $g(3) = 0$. Dresser leurs tableaux de signes.

Inéquations et fonctions de référence

62 On souhaite résoudre l'inéquation $x^2 < 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $x^2 < 9 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) < 0$.

2. Étudier le signe de $(x-3)(x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3. Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction carré.

63 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^2 \geqslant 4$ **b)** $x^2 \leqslant 5$ **c)** $x^2 > \dfrac{3}{4}$

64 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $3x^2 - 18 < 0$ **b)** $-2x^2 + 1 < 11$

65 On souhaite résoudre l'inéquation $x^3 \leqslant 8$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que 2 est solution de $x^3 = 8$.

2. Rappeler le tableau de variations de la fonction cube.

3. En déduire les solutions de l'inéquation $x^3 \leqslant 8$.

4. Contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction cube.

66 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^3 < 1$ **b)** $x^3 \geqslant 4^3$ **c)** $x^3 > -8$

67 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x^3 > 0$ **b)** $2x^3 + 2 < 0$

68 On souhaite résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} > 0$.

2. Étudier le signe de $\dfrac{1-2x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

3. Conclure et contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction inverse.

69 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x} < 3$ **b)** $\dfrac{1}{x} \geqslant -1$ **c)** $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{2}{3}$

70 Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ les inéquations suivantes.

a) $\dfrac{1}{x} + 3 < \dfrac{2}{x} - 1$ **b)** $\dfrac{-2}{x} < -8 - \dfrac{3}{x}$

71 On souhaite résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \leqslant 2$ pour $x \in \mathbb{R}+$.

1. Trouver x tel que $\sqrt{x} = 2$.

2. Rappeler les variations de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}+$.

3. Conclure.

4. Contrôler ce résultat à l'aide de la représentation graphique de la fonction racine carrée.

72 Sur le modèle de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}+$ les inéquations suivantes.

a) $\sqrt{x} < 3$ **b)** $\sqrt{x} > \dfrac{1}{2}$ **c)** $\sqrt{x} \geqslant 25$

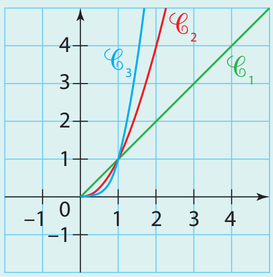
Positions relatives

Démonstration

73 On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$.

Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante.

- Si $x \in [0\,;\,1]$, alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.
- Si $x \in\,]1\,;\,+\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ qui est elle-même située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.



1. a) Factoriser $x^2 - x$.

b) Étudier le signe de $x^2 - x$.

c) En déduire les solutions de $x^2 \geqslant x$ pour $x \geqslant 0$.

2. Résoudre de la même façon $x^3 \geqslant x^2$ pour $x \geqslant 0$.

3. Conclure.

74 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$ et $g(x) = -4x - 1$. Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère.

1. Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de x pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Factoriser $f(x) - g(x)$.

3. En déduire que $f(x) \geqslant g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4. Que peut-on en déduire concernant $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$?

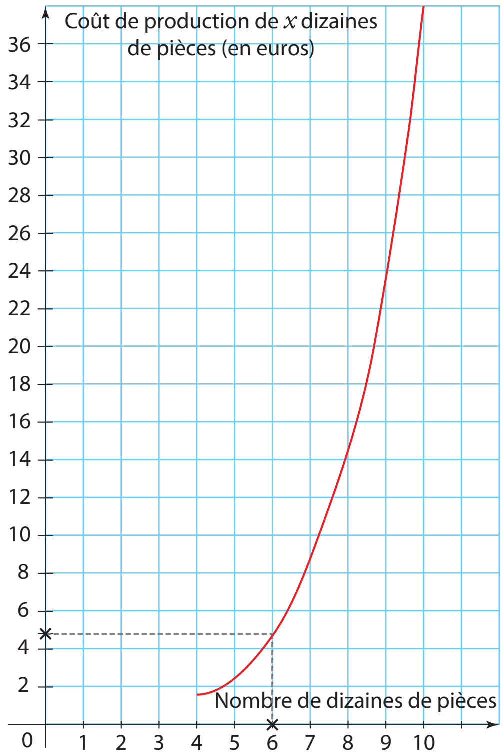
Résoudre des problèmes

75 SES Une entreprise fabrique des pièces mécaniques.

On note x le nombre de dizaines de pièces fabriquées au cours d'une journée.

Le coût de production, en euros, de x dizaines de pièces est noté $f(x)$.

La partie de la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 10] est donnée dans le repère ci-dessous.



Coup de pouce On peut lire sur le graphique que, si $x = 6$, l'entreprise produit 60 pièces pour un coût de 4,4 euros.

A. Lecture graphique

1. À l'aide du graphique, déterminer le cout de production de 50 pièces.

2. Chaque pièce est vendue 0,30 euro. On note $R(x)$ la recette de l'entreprise lorsqu'elle produit x dizaines de pièces. Expliquer pourquoi $R(x) = 3x$.

3. Le bénéfice réalisé par l'entreprise, en fonction du nombre x de dizaines de pièces vendues, est la différence entre la recette et le cout de production. On note $B(x)$ce bénéfice. À l'aide du graphique et de la règle (sans faire aucun tracé), déterminer à quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

B. Étude algébrique

On suppose que la fonction f est définie par :
$f(x) = x^2 - 8x + 18$ sur l'intervalle [4 ; 10].

1. On rappelle que, lorsque l'entreprise produit x dizaines de pièces, sa recette est $R(x) = 3x$.
Vérifier que le bénéfice de l'entreprise est alors :
$B(x) = -x^2 + 11x - 18$.

2. Montrer que $B(x) = (2 - x)(x - 9)$.

3. Retrouver le résultat de la question **3.** de la partie **A** par le calcul.

76 SES Le prix x d'une paire de baskets est compris entre 20 € et 50 €.
L'offre est le nombre de paires de baskets qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de x €.
La demande est le nombre probable de paires de baskets achetées par les consommateurs quand la paire de baskets est proposée à ce même prix de x €.
La demande se calcule avec $d(x) = -750x + 45\,000$ pour x en milliers de paires de baskets.

L'offre se calcule avec $f(x) = -\dfrac{500\,000}{x} + 35\,000$.

Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

1. Écrire une inéquation traduisant le problème posé.

2. Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ revient à $\dfrac{3x^2 - 40x - 2\,000}{x} > 0$.

3. a) Démontrer que, pour tout x :
$3x^2 - 40x - 2\,000 = (x + 20)(3x - 100)$.

b) En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.

c) Conclure.

Travailler autrement

77 En groupe

f est une fonction telle que
$f(x) = x^2 + bx + c$ où b et c sont des réels.
Voici son tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déterminer les valeurs de b et de c.

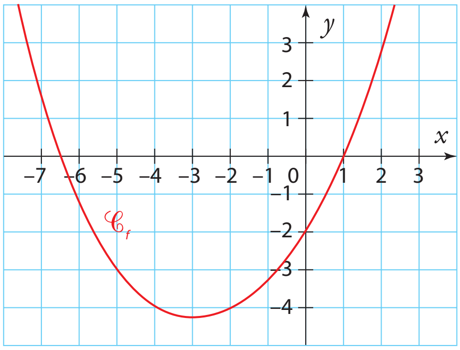
78 En groupe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 12x + 11$.
Étudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Coup de pouce Développer $(2x - 3)^2$.

79 Courbe et signe d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}3x^2 + 1{,}7x - 2$.
Sa courbe représentative est tracée dans le repère suivant.



1. À l'aide de sa courbe, déterminer le signe de $f(x)$.
2. a) Montrer que $f(x) = (x - 1)(0{,}3x + 2)$ si $x \in \mathbb{R}$.
b) Retrouver le résultat de la question **1.** par le calcul.

80 Mise en forme et étude de deux fonctions

On considère les fonctions f et g définies par :
- $f(x) = 3x^2 - 4x$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- $g(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{4 - x}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq 4$.

1. a) Factoriser $f(x)$.
b) Dresser son tableau de signes.
c) Résoudre $f(x) > 0$.
2. a) Écrire $g(x)$ sous la forme d'une seule fraction.
b) Dresser son tableau de signes.
c) Résoudre $g(x) \leqslant 0$.

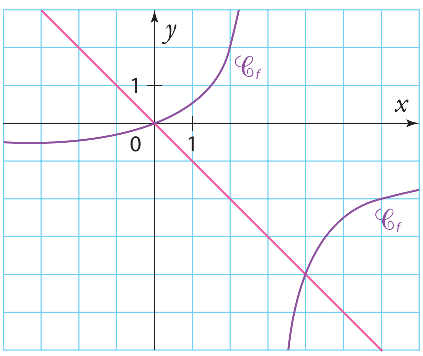
81 Inéquation et étude de signe

On considère l'inéquation $\dfrac{2}{x+2} \geqslant 3$.

1. Quelle est la valeur que x ne peut pas prendre ?
2. Déterminer une expression $A(x)$ pour que l'inéquation se ramène à $A(x) \geqslant 0$.
3. Résoudre $A(x) \geqslant 0$.

82 Résolution graphique et par le calcul

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \dfrac{-x}{x-3}$.



1. En utilisant le graphique précédent, résoudre :
a) $f(x) \leqslant 1$ **b)** $f(x) > -x$
2. Résoudre ces inéquations par le calcul.

83 Extremum d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
1. À l'aide de la calculatrice, dresser un tableau de variations de f.
2. f admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?
3. Étudier le signe de $f(x) + 1$.
4. En déduire que -1 est bien un minimum de f sur $\mathbb{R}$.

84 Deux tableaux sans courbe

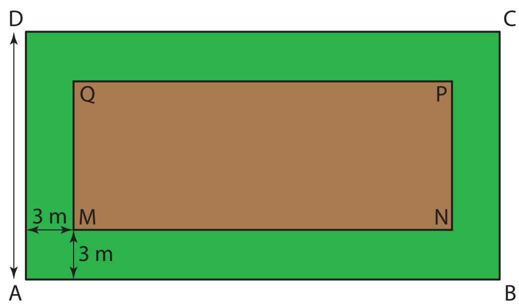
f est une fonction définie sur $[-2 ; 3]$ dont voici le tableau de variations.

x	-2		0		2		3
$f(x)$	2	↘	-3	↗	-1	↘	-2

On sait de plus que l'unique antécédent de 0 par f est -1.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$.

85 Le potager de Khadija

Khadija souhaite faire aménager un potager dans son jardin. Elle souhaite que le potager soit entouré d'un chemin sur une largeur de 3 m et que la surface totale (potager et chemin) soit un rectangle d'aire 300 m^2.



A. Aménagement du potager
On pose AD = x.
1. Exprimer MQ en fonction de x.
2. a) Expliquer pourquoi AB = $\dfrac{300}{x}$.
b) En déduire MN en fonction de x.
3. On note S la fonction qui à la longueur x = AD (en mètres) associe l'aire du potager, donc du rectangle MNPQ (en m^2).
Montrer que $S(x) = 336 - 6x - \dfrac{1\,800}{x}$.

Dans la suite, on admet que S est définie sur l'intervalle $[6 ; 50]$.

B. Conditions pour un grand potager
On cherche à déterminer comment choisir x pour que l'aire du potager soit supérieure à 63 m^2.
1. Montrer que $S(x) > 63 \Leftrightarrow \dfrac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x} > 0$.
2. Montrer que $-6x^2 + 273x - 1\,800 = -3(x - 8)(2x - 75)$.
3. En déduire le tableau de signes de $\dfrac{-6x^2 + 273x - 1\,800}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4. Conclure.

86 Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition le plus grand possible de ces fonctions.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **b)** $g(x) = \sqrt{5 - x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **d)** $k(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$

e) $m(x) = \sqrt{-x^2 + 9}$ **f)** $n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 3}$

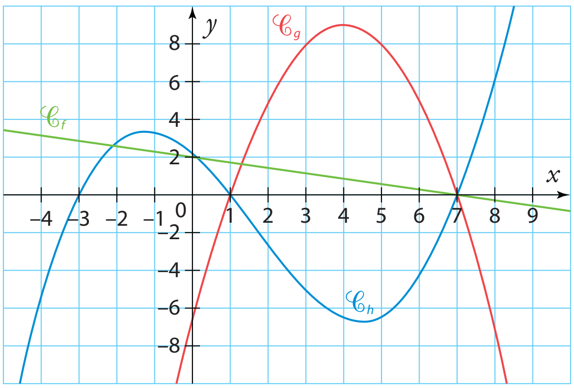
87 Au 3e degré

Résoudre $4x^3 - 12x^2 + 9x > 0$.

88 Trois fonctions TICE

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -0{,}3(x - 7)$
- $g(x) = -x^2 + 8x - 7$
- $h(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 - 1{,}7x + 2{,}1$



1. a) Montrer qu'étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ équivaut à étudier le signe de l'expression $-x^2 + 8{,}3x - 9{,}1$.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

factoriser (– x^2 + 8,3*x – 9,1)
– (– 1,3 + x)*(x – 7)

En déduire le signe de $-x^2 - 8{,}3x + 9{,}1$ et les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, étudier les positions relatives des courbes :

a) $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ **b)** $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$

89 Variations d'une fonction (1)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$.

1. Conjecturer le sens de variations de f.

2. Vérifier que $f(b) - f(a) = \dfrac{5(a - b)}{(b - 2)(a - 2)}$.

3. Soit a et b deux nombres réels tels que $2 < a < b$.
Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.

4. Que peut-on en déduire sur les variations de f ?

90 Variations d'une fonction (2)

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que :

a) $f(x) = \dfrac{-3}{(x - 5)^2}$ est strictement croissante sur $]5 ; +\infty[$.

b) $g(x) = 3(x + 2) - \dfrac{2}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

91 Fonction inverse

1. Déterminer le tableau de signes de la fonction inverse.

2. Déterminer une expression de fonction f dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		–	0	+	

3. Déterminer une expression de fonction g dont voici le tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$g(x)$		–	‖	+	0	–	

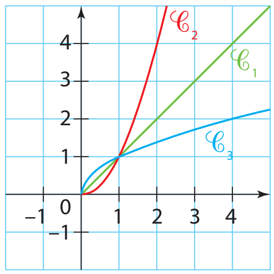
92 Égalité et étude de signe

1. Démontrer que $x^2 - 6x - 7 = (x - 3)^2 - 16$.

2. Déterminer le signe de $T(x) = x^2 - 6x - 7$.

93 Positions relatives

On note $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes d'équations respectives $y = x$; $x = x^2$ et $y = \sqrt{x}$. Ces courbes ont été représentées dans le repère ci-contre.



Le but de cet exercice est d'étudier la position de relative de ces trois courbes sur $[0 ; +\infty[$.

1. Comparer x et x^2, pour $x \in \mathbb{R}+$, en étudiant le signe de leur différence.

2. Montrer que $x - \sqrt{x} = \dfrac{x^2 - x}{x + \sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

3. Comparer x et $\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$.

94 Calcul formel (1) TICE

Renée cherche à résoudre l'inéquation :
$x^3 + 2x^2 + x > x^2 + 3x + 2$.
Elle utilise un logiciel de calcul formel et obtient :

simplifier(x^3 + 2*x^2 + x – (x^2 + 3*x + 2))
x^3 + x^2 – 2*x – 2
factoriser(x^2 + 3*x + 2)
(x + 1) * (x + 2)
factoriser(x^3 + x^2 – 2*x – 2)
x*(x^2 – 2)
factoriser(x^3 + 2*x^2 + x)
x*(x + 1)^2

Aider Renée à résoudre cette inéquation.

95 Fonctions convexe et concave

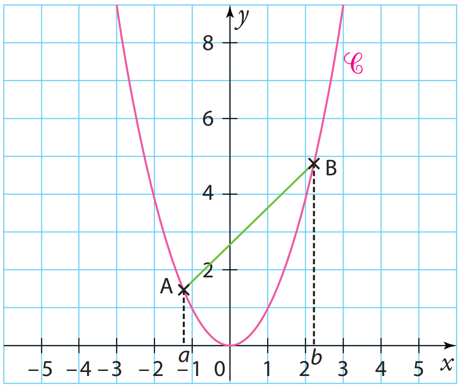
Une fonction est convexe si sa représentation graphique « est tournée vers le haut ».

Mathématiquement, cela signifie que, si A et B sont deux points de la représentation graphique de la fonction, le segment [AB] est entièrement situé au-dessus de la courbe. Si le segment [AB] est entièrement situé en-dessous, la fonction est dite concave.

A. Un exemple pour la fonction carré

On considère $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction carré.

On appelle A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives a et b.



On cherche à vérifier, sur deux exemples, que le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

1. Dans cette question, on prendra $a = 1$ et $b = 2$.

a) Donner l'expression de la fonction affine n dont la représentation graphique est la droite (AB).

b) Développer $(x - 1)(x - 2)$.

c) En déduire que $\mathscr{C}$ est en dessous de (AB) sur l'intervalle [1 ; 2].

2. Démontrer que, pour $a = -1$ et $b = 1$, le segment [AB] est au-dessus de $\mathscr{C}$.

B. En toute généralité

Dans cette partie, on considère que $a < b$ et on souhaite démontrer que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

2. Donner un encadrement de l'abscisse d'un point du segment [AB].

3. Déterminer l'expression de la fonction affine f dont la droite (AB) est la représentation graphique.

4. Quelle inéquation faut-il résoudre pour prouver que la fonction carré est convexe ?

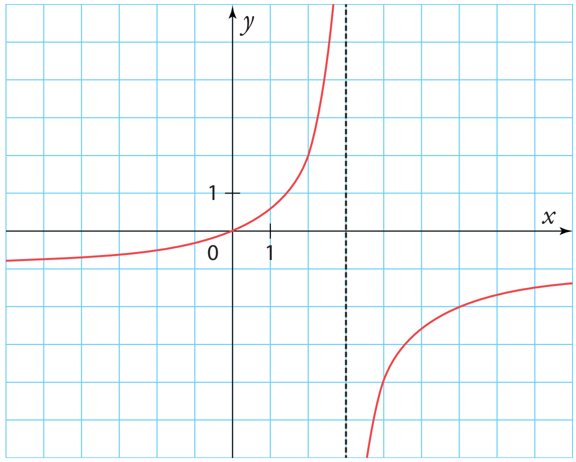
5. Montrer que : $x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$.

6. Établir le tableau de signes de l'expression $x^2 - f(x)$.

7. Conclure.

C. Une autre fonction !

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $g(x) = \dfrac{-x}{x-3}$ et sa représentation graphique.



1. Sur quel intervalle la fonction g semble-t-elle concave ? convexe ?

Soit A et B deux points de la représentation graphique de g. Leurs abscisses respectives sont notées a et b telles que $a < b < 3$.

2. Déterminer la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (AB).

a) Quel est le signe du coefficient directeur ? Pourquoi ?

b) Peut-on déterminer le signe de l'ordonnée à l'origine ? Pourquoi ?

3. Quelle inéquation faut-il résoudre pour démontrer que la fonction g est convexe sur $]-\infty ; 3[$?

4. Démontrer que cela revient à résoudre :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) < 0$.

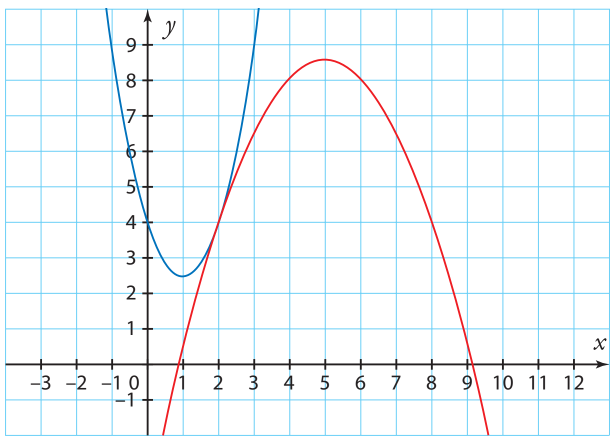
5. En développant, prouver que :
$x(b - 3)(a - 3) + 3x(x - 3) - ab(x - 3) = 3(x - a)(x - b)$.

6. Conclure.

96 Courbes représentatives

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1{,}5x^2 - 3x + 4$ et $g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 4$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative ; leur courbe a été tracé dans le repère ci-dessous.



1. a) Associer à chaque courbe sa fonction.

b) Lire graphiquement la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

2. a) Déterminer une expression de $f(x) - g(x)$.
b) Factoriser l'expression précédente.
c) Démontrer le résultat de la question 1. b).

97 Calcul formel (2)

TICE

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x + 3$ et $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer la position relative des courbes représentatives de f et de g dans un repère.

98 À la recherche d'une expression

1. Déterminer le signe de $(x - 2)^2$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer une expression $f(x)$ pouvant avoir les signes suivants.

a)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

c)

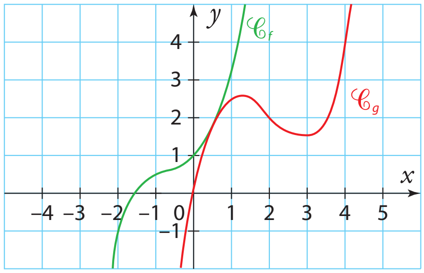
x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		-3		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

99 Positions relatives (2)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$.
Le repère ci-dessous donne leurs courbes représentatives, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



1. Calculer $f(x) - g(x)$.
2. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

Vers la 1re

Orientation

100 Spécialité Maths

On considère l'inéquation $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ (I).

A. Existence de l'inéquation (I)
1. Étudier le signe de $x^2 - 2x$.
2. Pour quel intervalle de x l'inéquation est-elle définie ?

B. Plus simple !
1. Établir le tableau de signes de l'expression $X - X^2$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation $X < X^2$.

C. Encadrement
1. Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$, c'est résoudre $X < X^2$. Expliciter X.
2. En déduire l'inégalité que doit vérifier $\sqrt{x^2 - 2x}$.

D. Résolution de $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$
1. Montrer que résoudre $\sqrt{x^2 - 2x} > 1$, c'est résoudre $\left(\sqrt{x^2 - 2x} + 1\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x} - 1\right) > 0$.
2. Établir que cela revient à résoudre $x^2 - 2x - 1 > 0$.

E. Résolution de $x^2 - 2x - 1 > 0$
1. Conjecturer la solution à l'aide de la calculatrice.
2. Développer $\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right)$.
3. Déterminer les solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 1 > 0$.
4. En déduire les solutions de $\sqrt{x^2 - 2x} < x^2 - 2x$ (I).

101 STMG

Une usine produit de l'acier. Elle peut produire jusqu'à 20 tonnes d'acier chaque jour.
Produire x tonnes d'acier pendant une journée coûte $C(x) = 30x^2 - 150x + 3\,780$ euros.

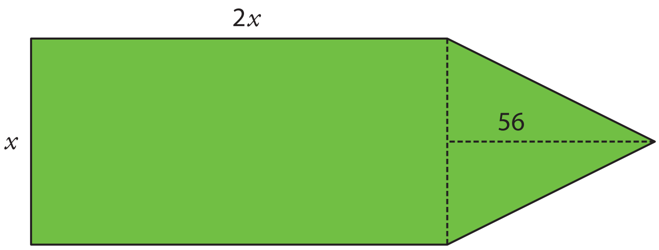
1. À quel intervalle appartient x ?
2. Déterminer le coût de production pour 5 tonnes produites.
3. On suppose que chaque tonne produite est vendue au prix de 600 euros la tonne.
a) Quelle est la recette pour 5 tonnes d'acier produites ?
b) Déterminer la recette $R(x)$ (en euros) en fonction du nombre x de tonnes produites.
4. a) Déterminer les bénéfices réalisés pour 5 tonnes produites.
b) Montrer que les bénéfices journaliers réalisés pour x tonnes produites sont de :
$B(x) = -30x^2 + 750x - 3\,780$ euros.
5. Montrer que $B(x) = 30(x - 7)(18 - x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$.
6. Déterminer la quantité d'acier produite pour laquelle un bénéfice est réalisé.

Travaux pratiques

TICE — Chercher, expérimenter — 45 min

1 Pour rassembler des vaches

Le père Bono n'arrive pas à regrouper ses vaches quand il faut les ramener à l'étable. Il souhaite placer un enclos rectangulaire adossé à une parcelle triangulaire sur son champ, comme sur le schéma ci-dessous, pour faciliter le regroupement de ses bêtes.
Il déclare alors : « Mon champ aura cette forme ou je ne m'appelle pas Jean ! »
Cependant, il est nécessaire de prévoir une surface minimale de 11 152 m^2 pour que les vaches puissent paitre.



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer le résultat.

2. Montrer que le père Bono doit résoudre l'inéquation $2x^2 + 28x - 11\,152 \geqslant 0$.

3. Démontrer que $2x^2 + 28x - 11\,152 = (2x - 136)(x + 82)$.
Déterminer les dimensions possibles du champ du père Bono.

Algo & Prog — Raisonner — 30 min

2 Signe d'une fonction affine

On considère l'algorithme suivant.

```
a=float(input("Saisir la valeur de a:"))
b=float(input("Saisir la valeur de b:"))
c=-b/a
if a>0:
    print("f(x)=ax+b est négatif jusqu'à",c,"et positif après")
else:
    print("f(x)=ax+b est ... jusqu'à",c,"et ... après")
```

1. **a)** Que renvoie cet algorithme si on donne `a = 2` et `b = - 6` ?
b) À quoi cet algorithme peut-il servir ?
c) Compléter les pointillés de cet algorithme.

2. **a)** Que renvoie l'algorithme pour la fonction $f(x) = -2$?
b) Modifier l'algorithme pour qu'il prenne en compte le cas des fonctions constantes.

TICE

Raisonner, expérimenter

55 min

3 Inéquations et calcul formel

Le but de ce TP est de maitriser quelques fonctionnalités du logiciel de calcul formel Xcas.

A ▸ Développer

Dans son devoir maison à rendre pour demain, Sheïma devait développer $(x-3)^2(x+2)^2-5$.
Ce matin, au petit-déjeuner, elle a fait une tache de thé en relisant son devoir (pour s'assurer qu'il n'y avait pas d'erreur), il y est maintenant écrit :

$(x-3)^2(x+2)^2-5 = x^4$ $+ 31$.

Aidons Sheïma à retrouver le résultat de son développement.

1. Ouvrir le logiciel Xcas.

2. Dans cette question, nous allons voir deux spécificités importantes de la syntaxe à respecter avec Xcas.

a) Dans la zone de saisie écrire :

développer ((x – 3)^2(x+2)^2 – 5)

Le « résultat » affiché parait-il satisfaisant ?

b) Dans la zone de saisie, écrire :

developper ((x – 3)^2(x+2)^2 – 5)

Le résultat affiché parait-il satisfaisant ?

c) Dans la zone de saisie, écrire :

developper ((x – 3)^2*(x+2)^2 – 5)

d) Quels enseignements nous ont appris les trois questions précédentes sur la syntaxe à respecter avec Xcas ?

3. À l'aide d'Xcas, développer :

a) $x^6-4x^5-4x+3(x+3)^3$ (le terme constant doit être 81, si ce n'est pas le cas, il y a erreur : attention aux symboles de multiplications non implicites !)

b) $(4(x+1)^2+x+2)^3$

B ▸ Factoriser

1. a) À l'aide de la fonction **developper** d'Xcas, dire si l'égalité suivante est correcte :

$8x^2+6x-5 = (4x+7)(2x-2)$.

b) Écrire la commande suivante dans Xcas et corriger la mauvaise égalité précédente :

factoriser (8*x^2+6*x – 5)

c) En déduire le tableau de signes de $8x^2+6x-5$.

2. À l'aide de la commande d'Xcas, dresser le tableau de signes de $35x^2-3x-2$.

C ▸ Résoudre

1. a) Quelle(s) inéquation(s) doit-on normalement résoudre pour dresser le tableau de signes de $35x^2-3x-2$?

b) Écrire la commande suivante dans Xcas.

resoudre (35*x^2 – 3*x – 2>0, x)

c) Faire le lien avec la question 2 de la partie **B**.

d) Résoudre $35x^2-3x-2<0$ à l'aide d'Xcas.

2. Utiliser la commande **resoudre** d'Xcas pour dresser le tableau de signes de $-2x^2+5x+4$.

3. Même question avec x^3+3x^2-5x+1.

En autonomie

1 Lire et interpréter un tableau de signes

QCM

Pour les exercices 102 à 107 on considère le tableau de signes de la fonction h suivant.

x	$-\infty$		-5		10		14		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	‖	$-$	

102 Sur quel intervalle a-t-on $h(x) > 0$?
a $]-5\,;14[$ b $]-5\,;10[$ c $]-5\,;10]$

103 Sur quel intervalle a-t-on $h(x) < 0$?
a $]-\infty\,;-5[$ b $]10\,;14[$ c $]10\,;+\infty[$

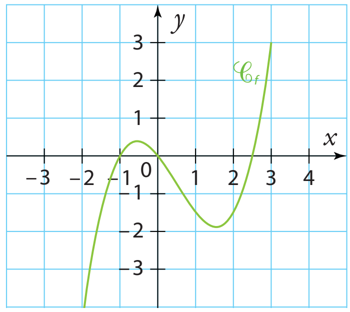
104 Les solutions de $h(x) \leqslant 0$ sont :
a $S =]-\infty\,;-5] \cup [10\,;+\infty[$
b $S =]-\infty\,;-5] \cup [10\,;14[\cup]14\,;+\infty[$

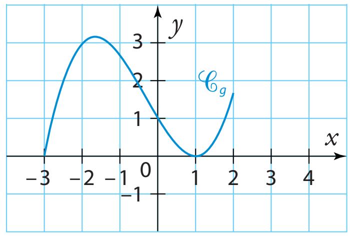
105 Que peut-on dire de $h(10)$?
a $h(10) = -5$ b $h(10) = 0$

106 Que peut-on dire de $h(0)$?
a $h(0)$ est positif.   b $h(0) = 4$

107 Que peut-on dire de $h(14)$?
a $h(14)$ est négatif.   b $h(14)$ n'existe pas.

108 ✶ Dresser le tableau de signes des fonctions f et g dont voici les représentations graphiques dans un repère.





109 ✶✶ Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f dont voici le tableau de signes.

x	-6		0		1		2
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

2 Étudier le signe d'un produit

QCM

110 Parmi ces tableaux de signes, lequel est celui de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x - 3$?

a

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

b

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

c

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

d

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

Pour les exercices 109 et 110 on considère le tableau de signes incomplet de la fonction de la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (3x+5)(-2x+7)$.

x	$-\infty$		$\dots$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	

111 En quelle valeur s'annule $3x + 5$?
a $-\dfrac{3}{5}$ b $\dfrac{5}{3}$ c $-\dfrac{5}{3}$

112 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $p(x) < 0$?
a $\left]-\infty\,;\dfrac{7}{2}\right[$ b $\left]\dfrac{7}{2}\,;+\infty\right[$

113 ✶ Dresser le tableau de signes des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x - 20$ et $g(x) = 8x + 2$, puis donner le signe de $(-5x - 20)(8x + 2)$.

114 ✶ Déterminer le tableau de signes des expressions $A(x) = (3x + 4)(-x + 3)$ et $B(x) = 2x(-7x + 9)$.

115 ✶✶ Étudier le signe de $(6 - 9x)(2x + 3)$.

3 Étudier le signe d'un quotient

QCM

Pour les exercices 116 à 118 on considère le tableau de signes incomplet de la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par $q(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

116 Que peut-on dire de $q(-4)$?
a Il vaut 0. b Il n'existe pas.

117 Que peut-on dire de $q(3)$?
a Il vaut 0. b Il n'existe pas.

118 Sur lequel de ces intervalles a-t-on $q(x) \geqslant 0$?
a $]-\infty ; -4]$ b $[-4 ; 3]$ c $[3 ; +\infty[$

119 ✶ Déterminer le tableau de signes des expressions $C(x) = \dfrac{-3x+9}{2x+4}$ et $D(x) = \dfrac{2+8x}{x}$.

120 ✶✶ Étudier le signe des expressions suivantes.

a) $\dfrac{-7x+1}{x^2}$ **b)** $\dfrac{4x+2}{(2x+1)(-x-3)}$ **c)** $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{8+x}$

4 Inéquation et signe

QCM

Pour les exercices 121 à 124 on considère le tableau de signes d'une expression $A(x)$.

x	$-\infty$		0		3		5
$A(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

121 L'équation $A(x) = 0$:
a n'a pas de solution.
b a pour solution 0 et 3.
c a pour solution 0.

122 L'équation $A(x) > 0$ a pour ensemble de solution :
a $]0 ; 3[$ b $[0 ; 3[$ c $[0 ; 3]$

123 L'équation $A(x) \leqslant 0$ a pour ensemble de solution
a $]-\infty ; 0[\cup[3 ; 5]$
b $]-\infty ; 0]$
c $]-\infty ; 0]\cup]3 ; 5]$

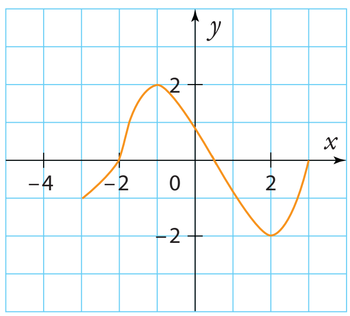
124 Si $A(x) > 1$, alors x appartient à :
a $[0 ; 3]$ b $[1 ; 2]$
c $[1 ; +\infty[$ d On ne peut pas savoir.

125 ✶ Résoudre les inéquations suivantes.

a) $(x+3)(x-6) < 0$ **b)** $x^2 + 4x - 6 < -6$
c) $\dfrac{-2x+3}{-4x-1} \geqslant 0$ **d)** $\dfrac{1}{4-2x} < 1$

126 ✶ **1.** Résoudre $x^2 < 9$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre $\dfrac{1}{x} < 2$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

127 ✶✶ f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.
g est la fonction définie sur $[-3 ; 3]$ par $g(x) = -2x + 5$.



1. Déterminer le signe de :
a) $f(x)$ **b)** $g(x)$
c) $f(x)g(x)$ **d)** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
a) $f(x) = 0$ **b)** $f(x) > 0$ **c)** $g(x) \leqslant 0$
d) $f(x)g(x) < 0$ **e)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$ **f)** $\dfrac{g(x)}{f(x)} > 0$

PARTIE 5

Statistiques et probabilités

Blaise Pascal (1623 – 1662)
Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Christian Huygens
(1629 – 1695)

Les recensements de bétail sous l'Antiquité constituent les prémices des statistiques. Plus tard, les jeux d'argent à la cour du Roi Soleil conduisent aux idées d'optimisation du gain et aux probabilités.

Pascal et Fermat, en ayant des raisonnements différents, donnent la même réponse au problème du chevalier de Méré : si un jeu s'arrête avant la fin, comment les joueurs se répartissent-ils la mise ? La correspondance entre ces deux mathématiciens aboutit à l'émergence de la théorie des probabilités.
↪ Dicomaths p. 350 et p. 352

Christian Huygens publie en 1657 *De ratiociniis in ludo aleae*, premier traité sur la théorie des probabilités.
↪ Dicomaths p. 350

Mon parcours du collège au lycée

Au collège, j'ai appris à interpréter et à représenter des données à travers des tableaux et des graphiques, à traiter ces données en calculant des effectifs, des fréquences puis en déterminant des caractéristiques de position (moyenne, médiane) ou de dispersion (étendue) d'une série statistique. J'ai découvert la notion de probabilité, ainsi que certaines de ses propriétés, et également la notion de proportionnalité en résolvant des problèmes de quatrième proportionnelle et de pourcentage.

En 2de, je vais découvrir en statistiques la moyenne pondérée, l'écart interquartile et l'écart-type. Je vais également étudier la notion de loi de probabilité et je vais calculer des probabilités dans des cas simples et au sein de modèles de référence : dé, pièce équilibrée, etc. Enfin, je vais définir la notion d'échantillon et découvrir la loi des grands nombres, la fluctuation d'échantillonnage et le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon.