10

Le nombre de bouquets de fleurs qui doivent être produits pour être vendus peut être calculé en résolvant des inéquations.

Signe d'une fonction et inéquations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.	1 p. 248 1 2 p. 248 19 20 p. 252
Déterminer algébriquement le signe d'une fonction affine.	2 p. 249 3 4 p. 249 23 24 p. 253
Déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient.	3 p. 250 5 6 p. 250 28 30 31 p. 253
Interpréter un tableau de signes.	4 p. 251 42 43 p. 254
Résoudre une inéquation à l'aide d'une étude de signe.	4 p. 251 10 11 p. 251 36 38 p. 254
Démonstration Étudier la position relative des courbes d'équations $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.	Cours p. 247 73 p. 256

1 exercices résolus | 16 exercices corrigés | 14 exercices non corrigés | TP travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration

p. 245, 247, 256

Algo & Prog

p. 242, 262

TICE

p. 259, 261, 262, 263

Les autres disciplines

p. 257

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-19

1. Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $2x - 3 = 0$ **b)** $2x + 3 = -7$ **c)** $8x + 7 = 10x - 2$

2. Résoudre des inéquations

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $4x - 5 \geqslant 0$ **b)** $2x + 9 < 5x - 4$

3. Factoriser des expressions en utilisant les identités remarquables

Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 2x + 1$ **b)** $25x^2 + 60x + 36$

c) $49x^2 - 64$ **d)** $(x - 2)^2 - 9$

4. Factoriser des expressions en utilisant un facteur commun

Factoriser les expressions suivantes.

a) $4x - 8$ **b)** $7x^2 - 2x$

c) $2(x + 1) - x(x + 1)$ **d)** $(2x + 1)(3x - 4) + (3x - 4)(5x + 3)$

5. Réduire au même dénominateur

Réduire au même dénominateur les expressions suivantes.

$A(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3}{2}$ $\quad B(x) = \dfrac{x}{x+3} + \dfrac{3}{-x+1}$

6. Représenter graphiquement des fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -x + 3$.

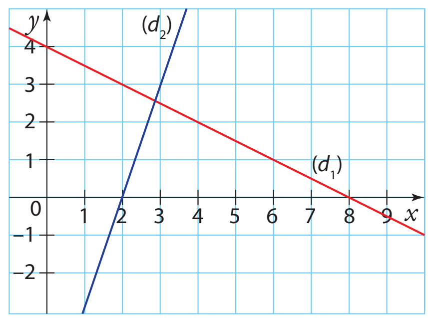
Tracer leur représentation graphique dans un repère.

7. Interpréter la courbe d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = 3x - 6$
- $g(x) = -0{,}5x + 4$

Leurs droites représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.



1. Associer chaque fonction à sa droite représentative.

2. Résoudre par le calcul $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.

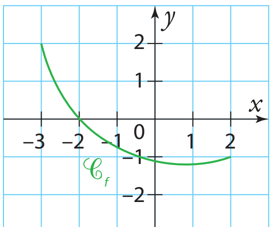
Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

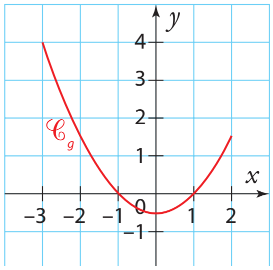
Activités

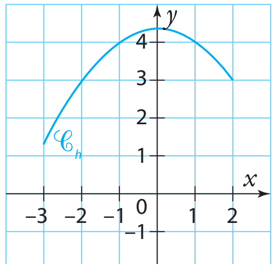
1 Tableaux de signes

25 min

f, g et h sont des fonctions définies sur [–3 ; 2], dont voici les courbes représentatives dans un repère.







1. a) Résoudre $f(x) = 0$.

b) Résoudre $f(x) > 0$.

c) Résoudre $f(x) < 0$.

d) Recopier et compléter les phrases suivantes.

• $f(x)$ est strictement positif si $x \in$ …

• $f(x)$ est nul si …

• $f(x)$ est … si $x \in$ …

e) Les informations précédentes peuvent être récapitulées dans un tableau, appelé tableau de signes.
Compléter les pointillés avec des signes + ou –.

x	–3	–2	2
$f(x)$	…	0	…

2. Dresser le tableau de signes de $g(x)$ et de $h(x)$ sur le modèle précédent.

Cours 1 p. 244

Algo & Prog

45 min

2 Signes et viennoiseries

Une boulangerie propose des brioches à 80 centimes. Assia possède un avoir de 4 euros dans cette boulangerie.

Elle entre et décide d'acheter un nombre x de brioche(s). On note $R(x)$ le montant restant en euros (on considère que la boulangerie fait crédit et que l'avoir d'Assia peut donc être négatif).

1. Expliquer pourquoi $R(x) = -0{,}8x + 4$ pour $x \in \mathbb{N}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}8x + 4$.

2. Écrire un algorithme qui, lorsque l'on donne une valeur x en entrée, renvoie si l'expression $f(x)$ est positive ou négative.

3. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Résoudre l'équation $f(x) > 0$.

c) Dans le tableau de signes ci-contre, compléter les pointillés avec des + ou des –.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	…	0	…

4. Au bout de combien de jours Assia sera-t-elle endettée auprès de sa boulangerie ?

5. Dresser le tableau de signes d'une fonction g définie par $g(x) = 3x - 12$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Coup de pouce Utiliser la même démarche que dans la question **3.**

Cours 2 p. 245

3 Signes à déterminer

40 min

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.
Dresser son tableau de signes.

2. Déterminer de même le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 5$.

3. Sans calcul, déterminer le signe de $f(1) \times g(1)$ et de $\dfrac{f(2)}{g(2)}$.

4. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = (-2x + 3)(2x + 5)$.

a) Quels doivent être le signe de $-2x + 3$ et de $2x + 5$ pour que $P(x)$ soit positif ?

b) Compléter le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$		$+\infty$
$-2x+3$					0		
$2x+5$			0				
$P(x)$				+		−	

5. On considère la fonction Q définie par $Q(x) = \dfrac{-2x+3}{2x+5}$.

a) La fonction Q est-elle définie pour tout nombre réel ?

b) Étudier le signe de la fonction Q en présentant les résultats sous forme de tableau.

Cours 3 p. 246

4 Résolution d'inéquation et lecture graphique

35 min

On considère l'inéquation $\dfrac{4}{x+2} < 4$.

1. -3 est-il une solution de cette inéquation ?

2.

Je sais résoudre cette inéquation.
Je multiplie de chaque côté par $x + 2$ et cela donne $4 < 4x + 8$, ce qui est facile à résoudre : les solutions sont les nombres $x > -1$.

Pourquoi Freddie a-t-il tort ?

3. À l'aide d'une calculatrice, observer les courbes d'équations $y = \dfrac{4}{x+2}$ et $y = 4$ et lire graphiquement les solutions de $\dfrac{4}{x+2} < 4$.

4. a) Expliquer pourquoi l'inéquation de départ revient à résoudre $\dfrac{-4x-4}{x+2} < 0$.

b) En déduire les solutions du problème posé.

Cours 3 p. 246

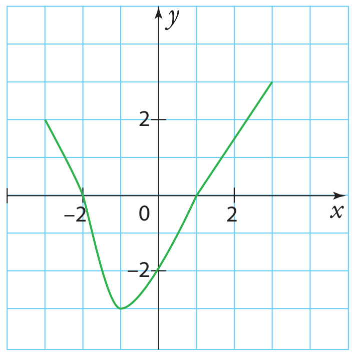
1 Étude du signe d'une fonction

Définition Signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction ou d'une expression $f(x)$ revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est strictement positif, nul ou strictement négatif.
Le signe est souvent présenté sous la forme d'un tableau de signes.

Exemples

① f est une fonction définie sur $[-3\,;3]$ dont voici la courbe représentative dans un repère.



- $f(x)$ est strictement positif si $x \in [-3\,;-2[\cup]1\,;3]$;
- $f(x)$ est strictement négatif si $x \in]-2\,;1[$;
- $f(x)$ est nul si $x = -2$ ou $x = 1$.

On présente les résultats précédents dans un tableau de signes :

x	-3		-2		1		3
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

② g est la fonction définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$g(x)$ est toujours positif sauf en $x = 0$ où $g(x)$ est nul.
On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

③ h est la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
$h(x)$ est du même signe que x.
On en déduit le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$-$	‖	$+$	

↳ Exercice résolu 1 p. 248

Remarques

① Le tableau de signes d'une fonction comporte deux lignes.
Sur la **première ligne**, on indique les éléments du domaine de définition de la fonction et les éventuelles valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ s'annule.
Sur la **deuxième ligne**, on crée des cases dans lesquelles on indique le signe de la fonction ainsi que les zéros en dessous des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ s'annule.

② Étudier le signe d'une expression peut permettre de résoudre une inéquation dont le second terme est 0. Résoudre l'inéquation revient alors à chercher pour quel nombre l'expression est positive ou négative.

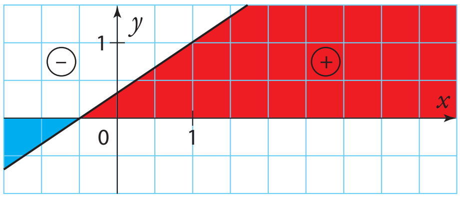
2 Étude du signe d'une fonction affine

Propriété Signe d'une fonction affine

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\dfrac{b}{a}$.

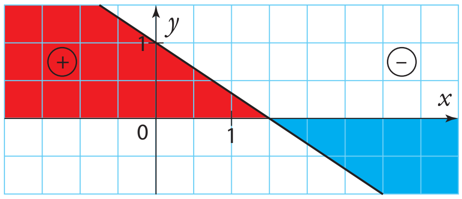
$a > 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f est négative puis positive.

$a < 0$



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

f est positive puis négative.

Démonstrations

① Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Pour $x > -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Pour $x = -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

Donc f est négative sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}\right[$ puis positive sur $\left]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$: on en déduit le tableau de signes qui précède.

② Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $x < -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) > f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Pour $x > -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) < f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. Or $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Pour $x = -\dfrac{b}{a}$ on a $f(x) = f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$. Donc f est positive sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{b}{a}\right[$ puis négative sur $\left]-\dfrac{b}{a}\,;+\infty\right[$.

Exemple

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto -3x + 4$.

$g(x) = ax + b$ avec $a = -3$, a est négatif, donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On recherche la valeur qui annule $g(x)$:

$-3x + 4 = 0$ soit $x = \dfrac{-4}{-3}$ soit $x = \dfrac{4}{3}$.

x	$-\infty$		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	0	$-$	

Exercice résolu 2 p. 249

3 Signe et opérations

Règle Signe d'un produit ou d'un quotient

Pour déterminer le signe du produit (ou du quotient) de deux fonctions, on construit un tableau de signes à 4 lignes.

① La 1e ligne indique les éléments de l'ensemble de définition et les valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions s'annulent, c'est-à-dire pour lesquelles leur produit s'annule.
Les valeurs doivent être placées en respectant l'ordre.

② Les 2e et 3e lignes indiquent le signe de chacune des deux fonctions.

③ La 4e ligne se remplit avec la règle des signes du produit (ou du quotient) de deux nombres relatifs :

• des facteurs de même signe donnent un produit (ou un quotient) positif ;

• des facteurs de signes contraires donnent un produit (ou un quotient) négatif.

Exemples

① Étudier le signe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x + 4)(-2x + 6)$.

h est un produit de deux fonctions affines. On recherche les valeurs qui annulent $3x + 4$ et $-2x + 6$:

• $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$ et $x \mapsto 3x + 4$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

• $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $x \mapsto -2x + 6$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		3		$+\infty$
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

② Déterminer le signe de la fonction k définie par $k(x) = \frac{3x - 5}{2x + 7}$.

k est un quotient de deux fonctions affines.

On recherche les valeurs pour lesquelles les fonctions affines s'annulent :

• $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ et $x \mapsto 3x - 5$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

• $2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$ et $x \mapsto 2x + 7$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$k(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Remarques

① Lorsque $x = \frac{5}{3}$, alors $3x - 5 = 0$ et $2x + 7 > 0$ donc $\frac{3x-5}{2x+7} = 0$, comme indiqué dans la dernière ligne.

En revanche, lorsque $x = -\frac{7}{2}$, alors $3x - 5 < 0$ et $2x + 7 = 0$ donc la fonction k n'est pas définie (puisque son dénominateur s'annule) : $-\frac{7}{2}$ est une **valeur interdite**, on la signale par une **double barre**.

② Lorsque l'on connaît le signe de termes d'une somme, on ne peut pas en général déterminer le signe de la somme, sauf lorsque les deux termes sont de même signe.

Par exemple, x^2 et 4 sont chacun positifs si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2 + 4 \geqslant 0$.

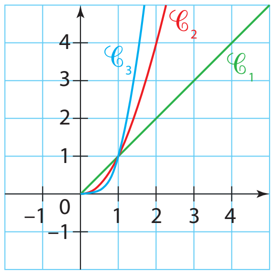
Exercice résolu 3 p. 250

4 Position relative de courbes de référence

Propriété Positions relatives des courbes de référence

On considère les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ d'équations respectives $y = x$; $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

- **Si $x \in [0\,;1[$, alors $\mathscr{C}_1$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ située au-dessus de $\mathscr{C}_3$.**
- **Si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent au point de coordonnées (1 ; 1).**
- **Si $x \in\,]1\,;+\infty[$, alors $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.**



Démonstration

- Pour comparer x^2 et x, on va étudier le signe de leur différence.

$x^2 - x = x(x - 1)$

On étudie le signe du produit dans le tableau de signes ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
x	0	+		+	
$x - 1$		–	0	+	
$x(x-1)$	0	–	0	+	

Si $x \in\,]0\,;1[$, $x^2 - x < 0$ donc $x^2 < x$ et $\mathscr{C}_2$ est située en dessous de $\mathscr{C}_1$.

Si $x \in\,]1\,;+\infty[$, $x^2 - x > 0$ donc $x^2 > x$ et $\mathscr{C}_2$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_1$.

Si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se croisent.

- De même, on étudie le signe de $x^3 - x^2$.

$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

On étudie le signe du produit dans le tableau ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
x^2	0	+		+	
$x - 1$		–	0	+	
$x^2(x-1)$	0	–	0	+	

Si $x \in\,]0\,;1[$, $x^3 - x^2 < 0$ donc $x^3 < x^2$ et $\mathscr{C}_3$ est située en dessous de $\mathscr{C}_2$.

Si $x \in\,]1\,;+\infty[$, $x^3 - x^2 > 0$ donc $x^3 > x^2$ et $\mathscr{C}_3$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_2$.

Si $x = 0$ ou si $x = 1$, alors $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_2$ se croisent.

Ces points mis ensemble démontrent la propriété.

Exercice résolu 4 p. 251