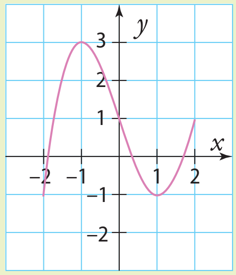
1 Dresser un tableau de variations

Cours 1 p. 220

f est une fonction définie sur [–2 ; 2], dont voici la courbe représentative tracée dans un repère.

1. Décrire par des phrases les variations de la fonction f.

2. Dresser le tableau de variations de f.



Solution

1. f est croissante sur [– 2 ; – 1], puis décroissante sur [– 1 ; 1] et enfin croissante sur [1 ; 2]. 1

2. Son tableau de variations est le suivant. 2 3 4 5 6

x	– 2	– 1	1	2
f	– 1 ↗	3 ↘	– 1 ↗	1

Conseils & Méthodes

1 Pour décrire graphiquement les variations d'une fonction, on repère sur l'axe des abscisses chaque intervalle où la courbe représentative « monte » ou « descend ».

2 Un tableau de variations comporte deux lignes, une pour la variable x et l'autre pour les variations de f.

3 Aux extrémités de la première ligne, on trouve les bornes de l'ensemble de définition de la fonction. Entre les bornes, on place les éventuelles valeurs particulières pour lesquelles f change de sens de variation.

4 Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la seconde ligne par une ou plusieurs flèches sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.

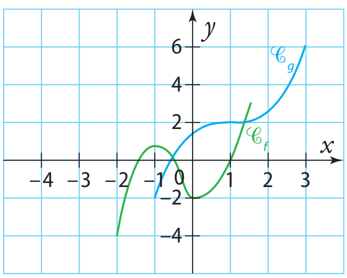
5 On indique au bout des flèches les images des valeurs de la première ligne.

6 On vérifie, lorsque cela est possible, la cohérence entre le sens des flèches et la valeur des images. Ici, on constate une augmentation de –1 à 3, ce qui est cohérent, puis une baisse de 3 à –1 et enfin une augmentation de –1 à 1.

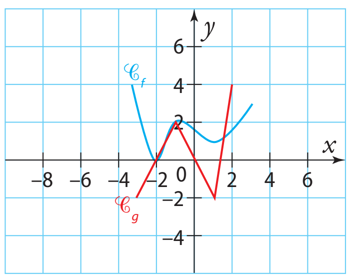
À vous de jouer !

1 On considère une fonction f définie sur [–2 ; 1,5] et une fonction g définie sur [–1 ; 3] dont voici les courbes représentatives dans un repère.

Dresser leurs tableaux de variations.



2 On considère les fonctions f et g définies sur [–4 ; 4] dont voici les courbes représentatives dans un repère.



1. Déterminer leurs ensembles de définition.
2. Dresser leurs tableaux de variations.

Exercices 15 à 20 p. 226-227

Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-18

2 Utiliser les variations d'une fonction

Cours 1 p. 220

f est une fonction dont voici le tableau de variations.

1. Comparer les nombres $f(0)$ et $f(1)$ en justifiant.

2. Même question pour les nombres $f(2)$ et $f(3)$.

3. On sait, de plus, que $f(3) = f(4{,}2) = 4$.

Résoudre :

a) $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$

x	0		2		4		5
f	4	↘	-2	↗	6	↘	0

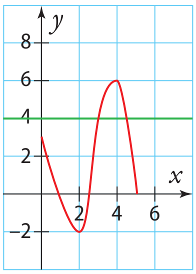
Solution

1. 0 et 1 sont des nombres de l'intervalle $[0 ; 2]$. f est décroissante sur cet intervalle et $0 \leqslant 1$ donc $f(0) \geqslant f(1)$. 1 2 3

2. 2 et 3 sont des nombres de l'intervalle $[2 ; 4]$. f est croissante sur cet intervalle et $2 \leqslant 3$ donc $f(2) \leqslant f(3)$.

3. a) D'après le tableau de variations, $f(0) = 4$. 4 5
De plus f est croissante sur $[2 ; 4]$ et $f(3) = 4$ donc $[2 ; 4]$.
$f(x) = 4$ a une solution qui est 3.
On trouve de même une unique solution 4,2 sur $[4 ; 5]$.
Finalement, les solutions sont 0 ; 3 et 4,2.

b) En utilisant le résultat de la question précédente et les variations de f, on trouve que les solutions de cette équation sont les nombres de l'intervalle $[3 ; 4{,}2]$.



Conseils & Méthodes

1 La première ligne du tableau de variations correspond à la variable x en abscisse.

2 La seconde ligne fait apparaître les images $f(x)$ en ordonnées.

3 Pour obtenir des informations concernant $f(a)$, on repère a dans la première ligne avant de lire par correspondance les informations sur $f(a)$ en dessous.

4 Attention à ne pas oublier des informations de l'énoncé.

5 On peut tracer une courbe représentative possible pour la fonction f et s'appuyer sur elle pour résoudre les équations et inéquations.

À vous de jouer !

3 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-2		-1		3
f	5	↘	-2	↗	4

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2. Comparer $f(0)$ et $f(2)$.

3. Comparer $f(-2)$ et $f(-1{,}5)$.

4 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		-1		1		3
f	1	↘	-1	↗	5	↘	4

On sait de plus que $f(0) = 1$ et $f(0{,}5) = 4$.
Résoudre les équation et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$

c) $f(x) \leqslant 1$ **d)** $f(x) > 1$

Exercices 21 à 25 p. 227

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-18

3 Utiliser les variations d'une fonction de référence

Cours 2 p. 221

1. **Comparer les nombres $2{,}1^2$ et 4^2 sans effectuer de calcul.**

2. **Résoudre $x^2 < 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.**

Solution

1. Il s'agit ici de comparer des nombres qui sont les images de 2,1 et de 4 par la fonction carré. **1**

2,1 et 4 sont des nombres de l'intervalle $[0 ; +\infty[$. **2**
Sur cet intervalle, la fonction carré est croissante et $2{,}1 < 4$ donc $2{,}1^2 < 4^2$.

2. $x^2 = 4$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = -2$. **3**

D'après les variations de la fonction carré, $x^2 < 4$ pour $x \in]-2 ; 2[$.

Conseils & Méthodes

1 On identifie les nombres à comparer comme images d'une fonction de référence. Ici, il s'agit de la fonction carré.

2 On utilise alors les variations de la fonction identifiée pour comparer les images.

3 On combine les informations liées à l'expression de la fonction de référence avec celles liées aux variations.

À vous de jouer !

5 Comparer les nombres suivants sans calcul.

a) 2^3 et 5^3 **b)** $(-3)^3$ et 11^3 **c)** $(-2{,}4)^3$ et $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^3$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ les inéquations suivantes.

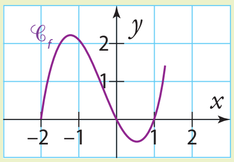
a) $\sqrt{x} < 4$ **b)** $\sqrt{x} > 7$

Exercices 26 à 33 p. 227-228

4 Déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction

Cours 3 p. 222

f et g sont deux fonctions dont on donne ci-contre respectivement la courbe représentative dans un repère et le tableau de variations.



x	−1		3		5		7
g	4	↘	−1	↗	4	↘	3

1. **Déterminer le minimum de f sur $[-2 ; 1{,}3]$ et la valeur de x pour laquelle il est atteint.**

2. **g admet-elle un maximum sur $[-1 ; 7]$? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?**

Solution

1. f admet un minimum qui vaut $-0{,}6$ et qui est atteint pour $x = 0{,}5$. **1**

2. g a un maximum qui vaut 4 ; il est atteint pour $x = -1$ et pour $x = 5$. **2**

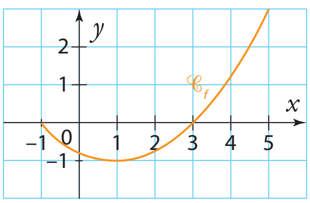
Conseils & Méthodes

1 On repère le ou les points de la courbe les plus bas. L'ordonnée correspond au minimum de la fonction, l'abscisse correspond aux valeurs de x pour lesquelles il est atteint.

2 On lit dans la deuxième ligne du tableau l'image la plus grande ; l'abscisse correspondante située dans la première ligne indique pour quelle valeur de x le maximum est atteint.

À vous de jouer !

7 f est une fonction dont voici la courbe.



f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

8 g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	0		1		3		4
g	2	↘	−1	↗	1	↘	0

g admet-elle un maximum ? Pour quelle(s) valeur(s) de x ?

Exercices 34 à 37 p. 228

Apprendre à apprendre

9 On suppose que l'on dispose de la courbe représentative d'une fonction.

1. Comment déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est croissante ? décroissante ?

2. En dressant son tableau de variations, quel axe va-t-on utiliser pour compléter la première ligne ?

10 **1.** Quel est le sens de variation possible d'une fonction affine ?

2. Comment le déterminer ?

11 **1.** Dresser l'allure de la courbe représentative des fonctions carré, inverse, cube et racine carrée.

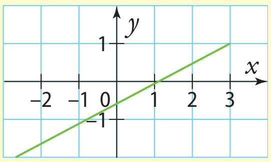
2. Dresser leurs tableaux de variations.

Questions - Flash

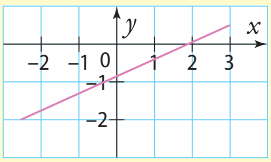
Diapo Diaporama Ressource professeur

12 Associer à chaque courbe son tableau de variations.

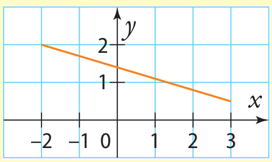
a)



b)



c)



①

x	−2		3
f	2	↘	0,5

②

x	−2,5		3
f	−2	↗	0,5

③

x	−2,5		3
f	−2	↗	1

13 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f_1(x) = 2x - 5$ **b)** $f_2(x) = 7x$ **c)** $f_3(x) = -0{,}9x + 1$

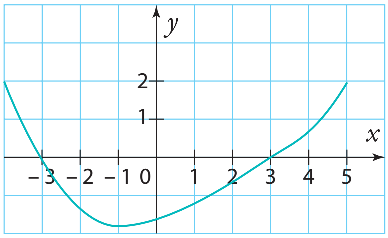
14 Tracer dans un repère une courbe possible d'une fonction ayant pour tableau de variations :

x	−2		−1		2
f	−3	↗	1	↘	0

Dresser un tableau de variations

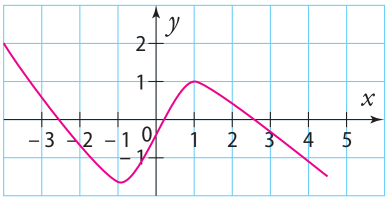
15 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	−4		…		5
f	2	↘	…	↗	2



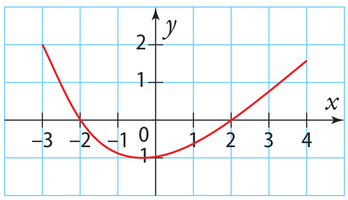
16 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	−4		…		…		…
f	…	↘	…	↗	1	↘	−1,5

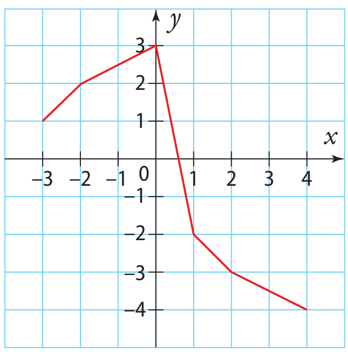


17 Recopier et compléter le tableau de variations proposé à partir de la représentation graphique suivante.

x	−3		…		…
f		↘	…	↗	



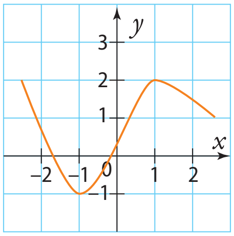
18 f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.

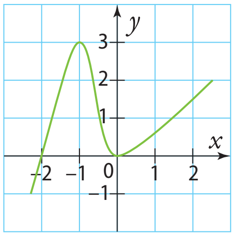


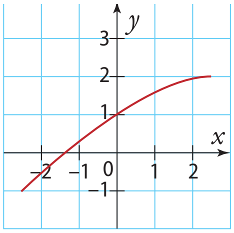
1. Décrire les variations de f à l'aide de phrases.

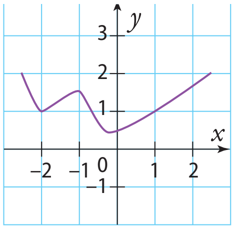
2. Dresser le tableau de variations à l'aide de phrases.

19 Pour chacune des courbes suivantes, établir le tableau de variations des fonctions représentées.

a)


b)


c)


d)


20 Une fonction f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 4]$ et croissante sur $[4\ ;\ +\infty[$. On sait de plus que $f(4) = -3$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Interpréter un tableau de variations

21 g est une fonction dont on connaît le tableau de variations.

x	-3		1		2		5
g	4	↘	3	↗	5	↘	-3

1. a) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.
b) En déduire quel est le nombre le plus grand entre $g(3)$ et $g(4)$.
2. Sur le modèle de la question précédente, comparer $g(1)$ et $g(1{,}5)$.
3. Même question pour $g(-2)$ et $g(0)$.

22 g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-2		1		2		10
g	8	↘	-3	↗	1	↘	-4

On sait de plus que $g(0) = 1$.
1. Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.
2. Résoudre l'inéquation $g(x) \leqslant 1$.
3. Comparer $g(3)$ et $g(5)$.

23 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-3		2		4
f	7	↘	-1	↗	2

Indiquer sur quel intervalle f est croissante et sur quel intervalle f est décroissante.

24 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-6		-1		2		4
f	-3	↗	2	↘	-1	↗	4

Comparer si possible les nombres suivants, en justifiant.
a) $f(-2)$ et $f(-1)$ **b)** $f(0)$ et $f(2)$ **c)** $f(3)$ et $f(3{,}5)$

25 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-2		0		1		7
f	5	↘	1	↗	4	↘	0

1. Comparer si possible les nombres suivants en justifiant.
a) $f(2)$ et $f(4)$
b) $f(-2)$ et $f(-1)$
2. Résoudre $f(x) \geqslant 0$.
3. On sait de plus que $f(-1{,}5) = 4$.
Résoudre $f(x) \leqslant 4$ et $f(x) > 4$.

Comparer des nombres avec les fonctions de référence

26 Soit f la fonction carré.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(1)$ et $f(4)$
b) $f(-3)$ et $f(-2)$

27 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction carré.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $3{,}2^2$ et $3{,}5^2$
b) $(-2)^2$ et $(-2{,}4)^2$

28 Soit f la fonction inverse.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(2)$ et $f(9)$
b) $f(-1)$ et $f(-0{,}5)$

29 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction inverse.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3{,}2}$
b) $\dfrac{1}{-2}$ et $\dfrac{1}{-1{,}5}$

30 Soit f la fonction racine carrée.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(1)$ et $f(4)$
b) $f\left(\dfrac{7}{2}\right)$ et $f(3{,}2)$

31 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction racine carrée.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.

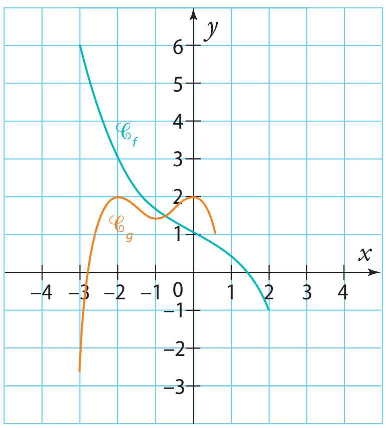
a) $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2{,}7}$ **b)** $\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{4}{3}}$

32 Soit f la fonction cube.
1. Rappeler son tableau de variations.
2. Comparer les nombres suivants.
a) $f(0)$ et $f(4)$ **b)** $f(-3)$ et $f(2)$

33 **1.** Tracer dans un repère l'allure de la fonction cube.
2. En s'appuyant sur la courbe, comparer les nombres suivants sans effectuer de calcul.
a) $4{,}015^2$ et $4{,}1^3$ **b)** $(-2)^2$ et $(-\sqrt{2})^2$

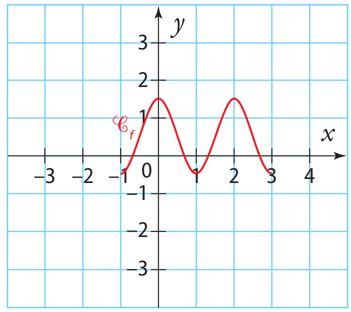
Déterminer un maximum ou un minimum

34 f et g sont des fonctions dont voici les courbes représentatives.



1. f admet-elle un maximum ? un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?
2. Même question pour la fonction g.

35 f est une fonction dont voici la courbe représentative dans un repère.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le maximum éventuel de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.
3. Déterminer le minimum éventuel de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x il est atteint.

36 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4	3	6
f	1 ↗	5	↘ -2

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. f admet-elle un maximum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?
3. f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

37 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4	1	3	6
f	0 ↘	-3 ↗	1 ↘	-5

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer le minimum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Calculs et automatismes

38 Développer et simplifier les expressions suivantes.
a) $(x+1)^2 - 5$
b) $-2(x+1)^2 + 3$

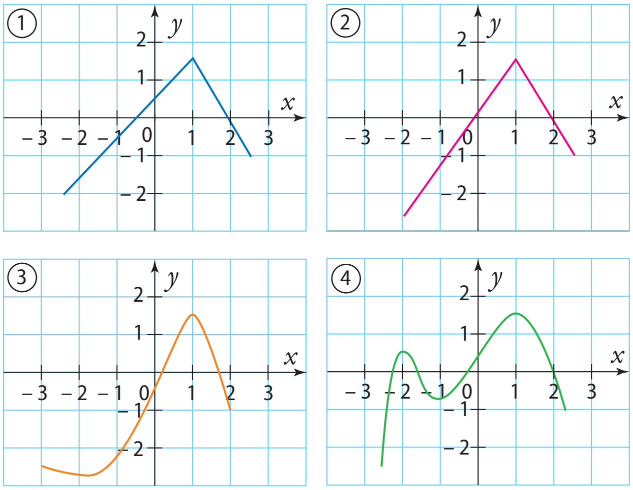
39 Donner les variations des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :
a) $f(x) = -3x + 5$
b) $g(x) = x^2$
c) $h(x) = 6x$

40 Résoudre dans $\mathbb{R}$.
a) $x^2 = 9$
b) $x^2 = 5$
c) $4x + 5 = 0$
d) $-3x + 2 = -7x + 4$

Courbe et tableau de variations

40 Voici le tableau de variations d'une fonction f.
Choisir la courbe correspondant à ce tableau.

x	$-2{,}5$		1		$2{,}5$
f	-2	↗	$1{,}5$	↘	-1



41 Une fonction f possède les propriétés suivantes :
- elle est définie sur $[-3 ; 5]$;
- elle est croissante sur $[-3 ; -1]$;
- elle est décroissante sur $[-1 ; 4]$;
- elle est croissante sur $[4 ; 5]$;
- sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, son maximum vaut 6 ;
- sur l'intervalle $[-1 ; 5]$, son minimum vaut -3 ;
- l'image de -3 est 1 ;
- 5 est un antécédent de 7.

Dresser le tableau de variations de cette fonction.

42 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		-1		1		3		7
f	-4	↗	4	↘	-5	↗	2	↘	-1

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ sur l'ensemble de définition de f.
3. L'équation $f(x) = 3$ peut-elle avoir trois solutions ?

43 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.

a) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2{,}5$ pour $x \in [-1 ; 2]$

b) $g(x) = \dfrac{3x-6}{x+2}$ pour $x \in [0 ; 6]$

44 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer une représentation graphique sur la calculatrice, puis décrire ses variations et dresser son tableau de variations le plus précisément possible.

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ pour $x \in [-2 ; 2]$

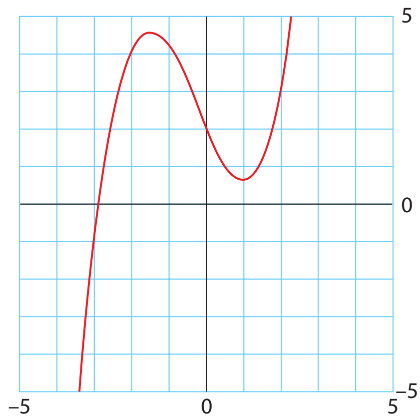
b) $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$ pour $x \in [0 ; 9]$

45 Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par $f(x) = x^3 + 0{,}75x^2 - 4{,}5x + 2$.

1. À l'aide du logiciel Xcas, on a entré la commande :

```
plotfunc(0.5x^3+0.375x^2-2.25x+2, x =-5..5)
```

Voici ce qui est affiché.



Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. En vous appuyant sur Xcas, ou sur une courbe obtenue à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

a) f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ pour $x \in [-3 ; 3]$

b) g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$ pour $x \in [0 ; 5]$

c) h définie par $h(x) = 0{,}001x^5 + 4x - 2$ pour $x \in [-5 ; 4]$

46 Associer à chaque fonction son tableau de variations parmi les suivants.

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 4$
b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$
c) h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$
d) k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \sqrt{x} + 1$

x	0		$+\infty$
u_1	1	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u_2		↘	0	↗	

x	$-\infty$		$+\infty$
u_3		↘	

x	$-\infty$		$+\infty$
u_4		↗	

Exercices d'entraînement

47 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;6]$ tels que :
- f est croissante sur $]-\infty\,;4]$ et décroissante sur $[4\,;6]$;
- $f(4)=-2$ et l'image de 6 est -6.

48 **1.** f est une fonction paire définie sur $[-3\,;3]$ dont voici l'ébauche de son tableau de variations.

x	-3		-2		0		…
f	2	↘	-1	↗	4		

Le recopier et le compléter.

2. g est une fonction impaire définie sur $[-5\,;5]$ dont voici l'ébauche de son tableau de variations.

x	-5		-1		0		…
f	-1	↘	-3	↗	0		

Le recopier et le compléter.

49 f est une fonction non monotone définie sur $[-3\,;4]$ telle que $f(-3)=4$ et $f(2)=0$.
Dresser un tableau de variations possible pour cette fonction.

50 Proposer un tableau de variations et une courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
- décroissante sur $]-\infty\,;5[$ et sur $]9\,;+\infty[$;
- croissante sinon ;
- qui coupe l'axe des abscisses en 4 et 11.

51 Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f dont voici le tableau de variations.

x	-7		0		1		3
f	2	↘	0	↗	1	↘	-3

52 f est une fonction dont voici le tableau de variations.
Dans un repère, tracer une courbe représentative possible pour cette fonction.

x	-5		-1		5
f	2	↘	0	↗	3

Variations et extremums

53 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

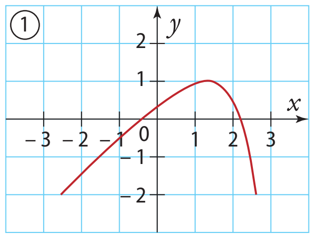
x	-4		-1		1		3		$3{,}5$
f	-4	↗	-2	↘	-5	↗	0	↘	-1

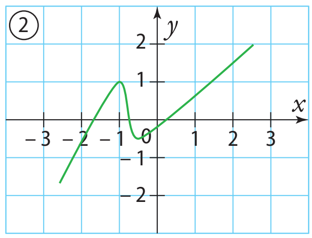
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
2. Décrire par des phrases le sens de variation de la fonction f.
3. Préciser les extremums éventuels de la fonction f et les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.
4. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.

54 Voici des informations concernant une fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;5]$:
- $f(-1)=f(5)=0$; $f(2)=3$; $f(4)=-2$;
- f est croissante sur $[-1\,;2]$ et sur $[4\,;5]$;
- f est décroissante sur $[2\,;4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer deux courbes différentes susceptibles de représenter graphiquement la fonction f.
3. Préciser les extremums éventuels de la fonction f et les valeurs pour lesquelles ils sont atteints.

55 Pour chacune des courbes suivantes :
a) déterminer si la fonction représentée admet un maximum.
b) dresser le tableau de variations correspondant.





56 Pour chaque tableau de variations, déterminer si la fonction représentée admet un maximum et/ou un minimum avec les informations disponibles.

a)

x	$-\infty$		0		9
f		↘	8	↗	

b)

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
g		↘	-10	↗	8	↘	

c)

x	$-\infty$		-2		7		10
h		↗	0	↘	-30	↗	7

d)

x	$-\infty$		15		30
m		↗	25	↘	0

e)

x	1		$+\infty$
p	-5	↗	

57 Les tableaux de variations suivants comportent des incohérences. Lesquelles ? Justifier.

x	-10		-2		0		7,5
f		↗	2	↘	$\frac{10}{3}$	↗	8

x	-10		-5		2
g	7	↗	25	↗	9

x	-3		-4		2
h	0	↘	-1	↗	4

Comparer deux images

58 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-5		-3		1		4
f	-4	↗	3	↘	1	↗	7

1. Donner son ensemble de définition.

2. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-5\ ;-3]$.

3. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [-3\ ;4]$.

4. Comparer si possible, les nombres suivants.

a) $f(-4)$ et $f(-3)$ **b)** $f(-2)$ et $f(3)$

59 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	3		5		6		10
f	4	↗	9	↘	-4	↗	8

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie, fausse ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

a) $f(3) < f(4)$

b) $f(4{,}9) > f(5{,}9)$

c) $f(5{,}1) < f(5{,}9)$

d) $f(10) > f(3)$

e) f est définie sur $[-2\ ;10]$.

f) 5 est le maximum de f sur $[3\ ;10]$.

g) f admet un minimum en 3 sur $[3\ ;10]$.

h) Si $x \in [3\ ;6]$, alors $4 \leqslant f(x) \leqslant 9$.

60 Voici le tableau de variations d'une fonction f.

x	-10		-2		0		7,5
f	-1	↗	$\frac{5}{2}$	↘	-1	↗	6

Comparer si possible les nombres suivants en justifiant.

a) $f(-2)$ et $f(-1)$ **b)** $f\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f\left(\frac{3}{2}\right)$ **c)** $f(-1)$ et $f(1)$

d) $f(3{,}6)$ et $f(3{,}7)$ **e)** $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(4)$ **f)** $f(-5)$ et $f(-3)$

61 Soit f une fonction définie sur $[-2\ ;5]$ telle que :

- $f(-2) = 2$ • $f(2) = -3$ • $f(5) = 0$
- f est décroissante sur $[-2\ ;2]$ et croissante sinon.

1. Encadrer $f(x)$ quand :

a) $x \in [-2\ ;2]$ **b)** $x \in [2\ ;5]$

2. Si $x \in [-2\ ;5]$, donner un encadrement de $f(x)$.

3. Quels sont les extremums de f ?

Variations des fonctions de référence

62 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction carré.

2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $1{,}5^2$ et 6^2 **b)** $(-0{,}7)^2$ et $(-0{,}082)^2$

c) $(\pi - 1)^2$ et 16 **d)** $(-1{,}25)^2$ et $2{,}25^2$

63 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

a) $3{,}5^2$ et $4{,}2^2$ **b)** $(-4{,}5)^2$ et $(-2{,}5)^2$

c) π^2 et $(3{,}2)^2$ **d)** $\frac{1}{5^2}$ et $\frac{1}{3^2}$ **e)** $(-5)^2$ et $(3{,}5)^2$

64 Encadrer x^2 quand :

a) $2 < x < 5$ **b)** $-7 < x < -1$

c) $0 < x < 3$ **d)** $x \in [-2\ ;0[\cup]0\ ;3[$

65 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.

2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $-\frac{1}{2{,}05}$ et $-\frac{1}{1{,}95}$ **b)** $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1}{3}$ et 0,5

66 Sans utiliser de calculatrice, comparer :

a) $\frac{1}{2^2}$ et $\frac{1}{3^2}$ **b)** $-\frac{1}{41}$ et $-\frac{1}{92}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $-\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{3}$

67 Encadrer $\dfrac{1}{x}$ quand :

a) $2 \leqslant x \leqslant 5$ **b)** $-7 < x < -1$
c) $0 < x < 3$ **d)** $x \in [-2\,;-0{,}1]$

68 Donner un encadrement de x quand :

a) $1 < \dfrac{1}{x} < 3$ **b)** $-4 < \dfrac{1}{x} < -2$
c) $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{7}{6}$ **d)** $-2 < \dfrac{1}{x} < 0$

69 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction cube.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $2{,}5^3$ et 4^3 **b)** $(-4)^3$ et $(-7)^3$
c) $3{,}5^3$ et 27 **d)** $\left(\dfrac{5}{9}\right)^3$ et $\left(\dfrac{8}{7}\right)^3$

70 Donner un encadrement de x^3 quand :

a) $0 \leqslant x \leqslant 2$ **b)** $-1 \leqslant x < 0$
c) $-3 < x < 6$ **d)** $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1{,}5$

71 **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.
2. Comparer les nombres suivants sans les calculer.

a) $\sqrt{5}$ et $\sqrt{5{,}7}$ **b)** $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$
c) $\sqrt{50}$ et 7 **d)** $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ et $\sqrt{2{,}7}$

72 Résoudre les inéquations suivantes pour $x \in [0\,;+\infty[$.

a) $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 3$ **b)** $4 < \sqrt{x} \leqslant 5$
c) $\sqrt{x} < 9$ **d)** $\sqrt{x} > 1$

73 Déterminer le sens de variations de chacune des fonctions affines définies ci-dessous.

a) $f_1(x) = -3x + 10$ **b)** $f_2(x) = \dfrac{x}{2} - 4$
c) $f_3(x) = -3 + 2x$ **d)** $f_4(x) = -\dfrac{2x}{7} + \dfrac{3}{5}$

74 Décrire les variations des fonctions suivantes.

a) $f(x) = -2x + 13$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 4$
c) $l(x) = (\sqrt{5} - 3)x + 4$ **d)** $j(x) = \dfrac{-7x - 5}{3}$
e) $m(x) = (2x + 3)^2 - (5 - 2x)^2$

75 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 3$.
1. Montrer que $f(x) = (x - 4)^2 - 13$.
2. Calculer que $f(5)$ et $f(1)$.
3. Montrer que $f(x) \geqslant -13$ pour x réel.
4. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.
5. Pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

76 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
1. Montrer que $f(x) = -(x - 3)^2 + 4$ pour tout réel x.
2. Montrer que $f(x) \leqslant 4$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$.
Préciser le nombre x pour lequel il est atteint.

77 On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;4]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x} + 5$.
1. Déterminer l'image de 4 par f.
2. Montrer que f a pour minimum 5.
Préciser pour quelle valeur de x ce minimum est atteint.

78 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2$.
1. Calculer $f(1)$ et $f(-3)$.
2. Déterminer le minimum de f et en quelle valeur il est atteint.

79 f est une fonction affine décroissante définie sur $\mathbb{R}$ dont la droite représentative passe par le point A(– 3 ; 2).
Donner une expression possible pour f.

80 f est une fonction linéaire dont la droite représentative passe par le point A(– 6 ; – 1).
Déterminer son sens de variation.

81 f est une fonction affine telle que $f(2) = -4$ et $f(5) = -\dfrac{5}{2}$.
Déterminer son sens de variation.

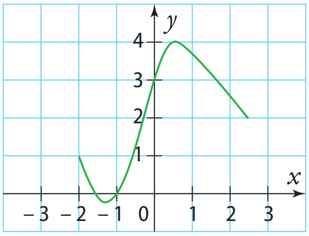
Travailler autrement

82 En groupe — Dans un repère orthonormé, on considère la droite d d'équation $y = 2x + 1$ et le point A(3 ; 0). Pour quel point M de d la distance AM est-elle minimale ?

83 À l'oral — f est une fonction affine décroissante sur $\mathbb{R}$ telle que sa droite représentative passe par le point B(–1 ; 2).
Donner trois expressions possible pour $f(x)$.

84 Tableaux de variations

Déterminer les variations des fonctions suivantes.



a) f est une fonction dont voici la courbe représentative.

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x + 3$.

c) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.

d) k est une fonction qui donne la note obtenue par Jonas à un devoir en fonction de son temps de révision, en heures, durant la journée précédente.

85 Variations, comparaisons et tracés

f est une fonction définie sur $[-3\,;4]$ telle que :

- f est croissante sur $[-3\,;-1]$;
- f est décroissante sur $[-1\,;0]$;
- f est croissante sur $[0\,;4]$.

On sait de plus que $f(-3) = f(0) = -2$ et $f(-1) = 3$.
Le maximum de f est 6.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. Quel est le minimum de la fonction f ?
Pour quelle(s) valeur(s) est-il atteint ?
3. Comparer $f(2)$ et $f(3)$. Justifier.
4. Comparer $f(-2)$ et $f(4)$.
5. Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

86 Résolution d'inéquations

f et g sont des fonctions dont voici les tableaux de variations.

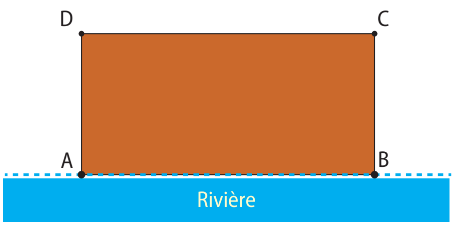
x	-1		0		3		5
f	3	↗	5	↘	4	↗	6

x	-1		$-0{,}5$		4		5
g	0	↗	1	↘	-2	↗	4

1. Donner leurs ensembles de définition.
2. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0\,;5]$.
3. Donner un encadrement de $g(x)$ lorsque $x \in [-0{,}5\,;5]$.
4. Comparer, si possible, les nombres suivants.
a) $f(-0{,}5)$ et $f(4)$
b) $g(-0{,}75)$ et $g(4)$
5. Résoudre $f(x) > g(x)$ pour $x \in [-1\,;5]$.

87

Aya dispose d'une clôture de longueur 40 m. Elle souhaite construire pour ses lamas un enclos rectangulaire, adossé à une rivière. Ainsi, seuls les côtés [AD], [DC] et [CB] nécessiteront une clôture.



Aya se demande comment laisser le plus d'espace possible à ses animaux.
On note $x = \text{AD}$ et $f(x)$ l'aire du rectangle ABCD.

1. Déterminer l'aire du rectangle si $x = 5$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
3. Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une estimation de l'aire maximale qu'Aya pourrait obtenir.
5. a) Montrer que $f(x) = -(x - 20)^2 + 400$.
b) Retrouver le résultat de la question **4.** par le calcul.

88 Vrai ou faux ?

On considère le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[-5\,;8]$.

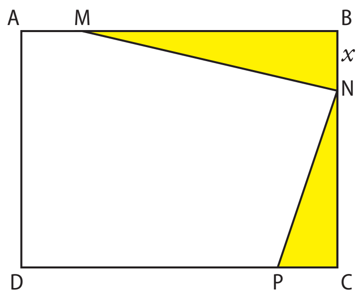
x	-5		0		1		3		8
g	1	↘	0	↗	4	↘	0	↘	-5

Dire si chacune des affirmations suivantes est vraie, fausse ou si l'on ne peut pas conclure.

a) 0 a pour image 3.
b) 0 a deux antécédents.
c) $g(-4) \geqslant g(-3)$
d) $g(-2) \geqslant g(0{,}5)$
e) Le maximum de g sur $\left[-5\,;\dfrac{1}{2}\right]$ est 1.
f) Si $a \in [-5\,;1]$ alors $g(a) \geqslant 0$.
g) Si $g(a) \geqslant 0$ alors $a \in [-5\,;1]$.

89 Surface maximale

ABCD est un rectangle tel que AB = 10 cm et BC = 8 cm.
N est un point mobile sur le segment [BC]. On note x la longueur en centimètres de [BN].
M et P sont les points respectifs de [AB] et [CD] tels que AM = BN = CP = x.



Le but de cet exercice est de déterminer où placer N sur le segment [BC] pour que l'aire de la surface jaune, la somme des aires des triangles BMN et CNP, soit maximale.

1. Justifier que $x \in [0\,;8]$.
2. Exprimer BM en fonction de x.
3. Exprimer CN en fonction de x.
4. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\dfrac{10x - x^2}{2}$.
5. On note f la fonction qui à la longueur x associe l'aire totale de la surface jaune.
Vérifier que l'on a $f(x) = 9x - x^2$.
6. a) Montrer que $f(x) = -(x - 4{,}5)^2 + 20{,}25$.
b) En déduire la solution au problème posé.

90 Reconnaissance de fonctions

f, g, h et k sont quatre fonctions.

On sait que :

- g est croissante sur son ensemble de définition ;
- 0 n'a pas d'antécédent par k ;
- 4 a plusieurs antécédents par f.

Associer chacune de ces fonctions à leur expression parmi les suivantes.

① $3x-2$ ② $-2x+6$. ③ x^2 ④ $\frac{1}{x}$

Démonstrations

91 Variations de la fonction carré

1. Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.

Recopier et compléter.

a) $a \leqslant b$ donc $a^2 \ldots ab$.

b) $a \leqslant b$ donc $ab \ldots b^2$.

c) Soit $a^2 \ldots b^2$.

d) Donc la fonction carré est … sur $[0\,;+\infty[$.

2. Démontrer de même, les variations de la fonction carré sur $]-\infty\,;0]$ en prenant cette fois a et b deux réels négatifs tels que $a \leqslant b \leqslant 0$.

3. Établir le tableau de variations de la fonction carré.

92 Variations de la fonction inverse

1. Soit a et b avec $0 < a \leqslant b$.

a) Montrer que $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$.

b) Quel est le signe de $b-a$?

c) Quel est le signe de ab ?

d) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit a et b avec $a \leqslant b < 0$.

a) Quel est le signe de $b-a$?

b) Quel est le signe de ab ?

c) En déduire le sens de variation de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.

93 Enchaînement de fonctions (1)

Algo & Prog

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

1. Conjecturer les variations de la fonction f.

2. a) Recopier et compléter le programme de calcul suivant.

$$x \to \ldots \to \ldots \to \frac{1}{x^2+4}$$

b) Recopier et compléter le raisonnement suivant.

Soit a et b deux nombres positifs tels que $a < b$.

$a < b$	$\Rightarrow$	$a^2 \ldots b^2$	car …
	$\Rightarrow$	$a^2+4 \ldots b^2+4$	car …
	$\Rightarrow$	$\frac{1}{a^2+4} \ldots \frac{1}{b^2+4}$	car …

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

94 Enchaînement de fonctions (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x)=\frac{3x-5}{-x+2}$.

1. Conjecturer les variations de la fonction f sur $]-\infty\,;2[$ puis sur $]2\,;+\infty[$.

2. a) Vérifier que, pour $x \neq 2$, $f(x)=-3+\frac{1}{-x+2}$.

b) Recopier et compléter le programme de calcul.

$$x \to -x+2 \to \ldots \to \ldots$$

c) Justifier que la fonction affine $x \mapsto -x+2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) Démontrer que f est croissante sur $]2\,;+\infty[$.

3. Démontrer que f est croissante sur $]-\infty\,;2[$.

95 Sûr ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x+1$.

Que penser des affirmations suivantes ? Argumenter.

1. Émilie affirme que f est croissante sur $[-3\,;-1]$.

2. Paul calcule $f(0)$ et $f(3)$ et vérifie que $f(3) > f(0)$. Il conclut alors que f est croissante sur $[0\,;3]$.

3. Zohra affirme que 4 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$.

96 Maximum de fonction

TICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x+2$.

1. Conjecturer la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $f(x)-6$.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

factoriser(−x^2+4x−4)
−(x−2)^2

Justifier que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est bien 6.

Démonstrations

97 Démontrer l'inégalité $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$

Soit a et b deux réels positifs.

1. Développer $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

2. Justifier que $\sqrt{a+b}^2 \leqslant (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

3. Conclure.

98 Comparer deux moyennes

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels positifs.

La moyenne arithmétique de ces nombres est $x_A=\frac{x_1+x_2}{2}$.

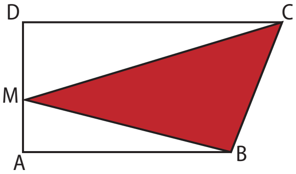
La moyenne géométrique de ces deux nombres réels est donnée par $x_G=\sqrt{x_1x_2}$.

1. Montrer que $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\sqrt{x_1x_2}^2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2$.

2. Justifier que $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{x_1x_2}^2$.

3. Comparer les deux moyennes.

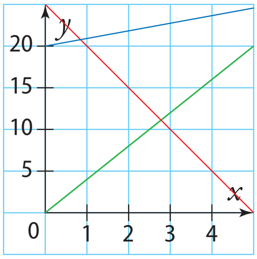
99 Aire et trapèze



On considère un trapèze rectangle ABCD, comme sur la figure ci-contre. On place un point libre M sur le segment [AD].

La distance AM en cm est notée x.

On a représenté les courbes des trois fonctions donnant, en fonction de x, l'aire des triangles ABM, BCM et DCM.



1. À quelle aire correspond chacun des graphiques ? Justifier.

2. Retrouver les expressions des fonctions représentées.

3. En déduire les longueurs de chaque côté du trapèze.

100 Aires

On considère un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et BC = 3 cm. On place un point M libre sur [AB].

À l'intérieur du rectangle, on construit le demi-cercle de diamètre [AM] et le triangle MBC.

1. Comment varie l'aire de la figure composée du demi-cercle et du triangle en fonction de la position de M ?

2. a) L'aire atteint-elle un maximum ? Si oui, préciser pour quelle position de M.

b) L'aire atteint-elle un minimum ? Si oui, préciser pour quelle position de M.

101 Variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de f.

1. Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.

Montrer que $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2)$.

2. a) Montrer que si $-1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$.

b) Que peut-on en déduire pour f sur $[-1 ; +\infty[$?

3. Montrer que f est décroissante sur$]-\infty ; -1]$.

102 Balayage

Algo & Prog

On considère la fonction f définie par $f(x) = -7x^2 + 3x + 1$ pour $x \in [-1 ; 2]$ dont on donne le tableau de variations.

x	-1	...	2
f	-9 ↗	↘	-21

On considère l'algorithme suivant.

```
x←-1
a←-7*x*x+3*x+1
b←-7*(x+0,1)^2*(x+0,1)^2+3*(x+0,1)+1
Tant que a<b :
    x←x+0,1
    a←b
    b←-7*(a+0,1)^2*(a+0,1)^2+3*(a+1)+1
Fin Tant que
Afficher x
```

1. Que renvoie cet algorithme ?

2. Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie une valeur approchée au millième de la valeur de x pour laquelle f est maximale.

3. Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie également une valeur approchée du maximum de la fonction.

103 Trajectoire d'une balle

Une joueuse de handball lance une balle devant elle.

Au bout de x mètres parcourus, la hauteur de la balle (en mètres) avant qu'elle ne touche le sol est donnée par :

$h(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}9x + 2$.

1. Quelle est la hauteur de la balle après 20 mètres parcourus ? Que peut-on en déduire pour la balle ?

2. a) Montrer que $h(x) = -0{,}05(x - 9)^2 + 6{,}05$.

b) Que peut-on dire du signe de $(x - 9)^2$?

c) En déduire la hauteur maximale atteinte par la balle.

Vers la 1re

Orientation

104 Spécialité Maths

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 2)^2$.

1. Conjecturer le sens de variation de la fonction f à l'aide de la calculatrice.

2. Démontrer que $f(b) - f(a) = (b - a)(a + b - 4)$.

3. On suppose que $a < b < 2$.

a) Quel est le signe de $b - a$?

b) Comparer $a + b$ et 4 puis $f(b)$ et $f(a)$.

c) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty ; 2[$.

4. On suppose que $2 < a < b$.

Quel est le sens de variation de la fonction f ?

5. La fonction f admet-elle un extremum ? Lequel ?

105 STMG SES

Un fabricant produit dans une usine des tee-shirts. Après la fabrication et la vente de x centaines de tee-shirts en un mois, le bénéfice net réalisé en centaines d'euros est donné par la fonction :

$B(x) = -0{,}5x^2 + 50x - 800$ pour $x \geqslant 0$.

1. Déterminer le bénéfice obtenu pour 4 000 tee-shirts produits et vendus.

2. Montrer que $B(x) = -0{,}5(x - 50)^2 + 450$.

3. En déduire le bénéfice maximal que peut obtenir le fabricant. Pour combien de tee-shirts fabriqués et vendus est-il atteint ?

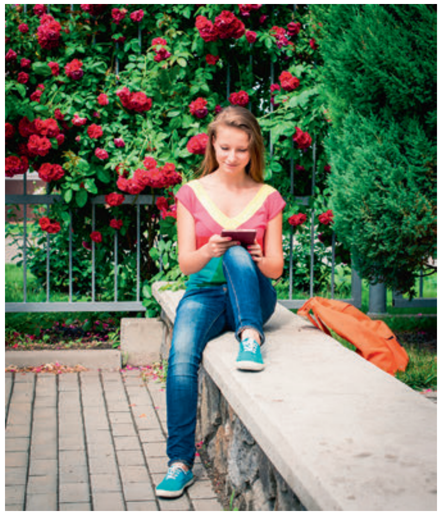
Français TICE Modéliser, conjecturer, démontrer 50 min

1 Roméo et Juliette

Roméo et Juliette sont tombés amoureux.

Juliette est assise sur un banc dans le jardin des Capulet à l'ombre d'un mur couvert d'un rosier grimpant.

Roméo l'aperçoit au loin et voudrait la rejoindre le plus rapidement possible tout en lui cueillant une rose en chemin.



A ▸ Modélisation en géométrie dynamique

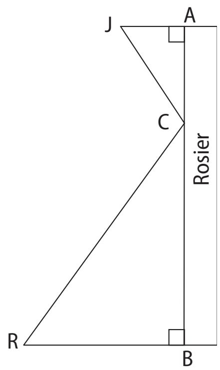
1. Reproduire la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le point J représente Juliette et le point R Roméo.

Le segment [AB] représente le mur couvert du rosier grimpant.

Le point C, mobile sur ce segment, représente l'endroit où Roméo devra cueillir la rose.

- AB = 6
- JA = 2
- RB = 5
- (JA) et (RB) sont perpendiculaires à (AB).
- C est un point libre sur le segment [AB].



2. Grâce aux fonctionnalités du logiciel, décrire comment varie la longueur du trajet RC + CJ en fonction de la position du point C sur le segment [AB].

3. Conjecturer où doit être situé le point C pour que ce trajet soit le plus court possible.

B ▸ Étude mathématique

Dans cette partie, on pose x = AC et on étudie la fonction f qui à x associe le chemin parcouru par Roméo, c'est-à-dire la longueur RC + CJ sur le schéma.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

3. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un tableur, déterminer une approximation à 10^{-2} près de la position du point C qui minimise le trajet RC + CJ.

4. Comparer avec le résultat conjecturé dans la partie **A**.

C ▸ Recherche de la valeur exacte

Dans cette partie, on détermine géométriquement la position du point C.

1. Reproduire la figure et y placer le point R′, symétrique du point R par rapport au point B.
On appelle I l'intersection des segments [AB] et [R′J].

2. Justifier que RI + IJ = R′I + IJ.

3. Expliquer pourquoi, si C ∈ [AB], la longueur RC + CJ est minimale lorsque C est en I.

4. Quel théorème étudié au collège peut s'utiliser dans les triangles AIJ et BIR′ ?

5. Calculer AC et comparer avec la valeur trouvée dans la partie **B**.

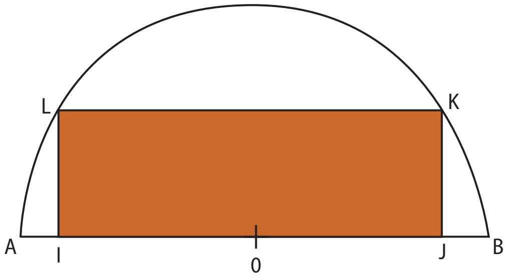
TICE Modéliser, conjecturer 45 min

2 Pour construire une salle de spectacle

Monsieur Sphéro, architecte, souhaite répondre à un appel d'offres pour construire une salle de spectacle. Il propose une salle sphérique et voudrait une approximation de la taille maximale possible d'un écran de cinéma dans ce type de salle.

Voici ci-dessous le schéma qu'il fournit à Matéo son assistant.

- [AB] est un segment tel que AB = 10 m ;
- O est le milieu de [AB], I un point mobile sur [OA] ;
- IJKL est un rectangle tel que OJ = OI et que K et L soient sur le cercle de diamètre [AB].



A ▶ À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. Lancer un logiciel de géométrie dynamique et réaliser la figure précédente.
2. Conjecturer la position du point I pour que l'aire du rectangle IJKL soit maximale.

B ▶ Avec la calculatrice

On pose $x = \text{OI}$ et on appelle $f(x)$ l'aire du rectangle IJKL.

1. Expliquer pourquoi x varie dans $[0 ; 5]$.
2. Déterminer, en fonction de x, la longueur IL.
3. En déduire l'aire du rectangle IJKL en fonction de x.
4. En utilisant une calculatrice, compléter le tableau suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$											

5. Observer la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice.
6. Donner une valeur approchée au dixième près de l'aire maximale, ainsi que la valeur de x pour laquelle cette aire semble être maximale.

C ▶ Affinage numérique

Pour être plus précis, il vaut mieux utiliser la table en fixant la valeur initiale de x ainsi que son pas d'avancement.

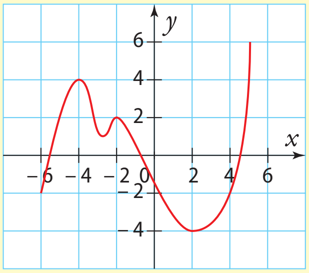
1. En utilisant la table, dresser un nouveau tableau qui doit permettre de donner une valeur approchée au centimètre près de la valeur de x pour laquelle l'aire semble être maximale.
2. Donner cette valeur ainsi que celle de l'aire correspondante.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au millième près de la valeur pour laquelle l'aire semble être maximale.

En autonomie

1 Décrire des variations de fonctions

QCM

Pour les exercices 107 et 108, on considère la courbe représentative d'une fonction f donnée ci-contre.



107 La fonction f est croissante sur :

a $[-4\,;-2]$ b $[-6\,;-4]$ c $[3\,;4]$ d $[0\,;1]$

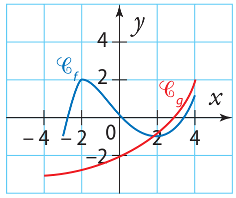
108 Par quelles valeurs compléter le tableau de variations pour qu'il corresponde à cette courbe ?

a $a = 2$ et $b = -4$ b $a = 3{,}5$ et $b = 0$

x	−6		−4		−2,8		−2		a		5
f	−2	↗	4	↘	1,2	↗	2	↘	b	↗	6

109 ✶ **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction racine carrée.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction inverse.

110 ✶ Dresser les tableaux de variations des fonctions représentées par les courbes ci-contre.



111 ✶✶ Dans un repère, tracer une courbe pouvant représenter la fonction dont voici le tableau de variations.

x	0		3		4
f	0	↗	2	↘	−1

112 ✶✶ Étudier les variations des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

a) $f(x) = 4x - 2$ **b)** $g(x) = x(x-1) + x$

c) $h(x) = x(3 - 2x) + 2(x^2 - x - 1)$

113 ✶✶ À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie dynamique, déterminer la valeur du maximum de la fonction f définie sur $[-10\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 4x + 6}$.

2 Utiliser les variations de fonctions

QCM

Pour les exercices 114 à 117, on considère la fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	−6		−2		−1		3		7
f	7	↘	−5	↗	2	↘	−4	↗	0

114 Sur l'intervalle $[-5\,;-3]$, la fonction est :

a monotone b croissante
c décroissante d On ne peut pas savoir.

115 La fonction f est croissante sur :

a $[3\,;7]$ b $[0\,;1]$
c $[2{,}1\,;2{,}5]$ d $[-1{,}5\,;-1]$ et sur $[4{,}5\,;7]$

116 $f(-2)$ est :

a supérieur ou égal à $f(-5)$
b inférieur ou égal à $f(-5)$

117 Si $x \in [-6\,;3]$, alors :

a $6 \leqslant f(x) \leqslant 3$ b $2 \leqslant f(x) \leqslant -4$
c $-5 \leqslant f(x) \leqslant 7$ d $-4 \leqslant f(x) \leqslant 7$

118 ✶ **1.** Dresser le tableau de variations de la fonction carré.
2. Comparer les nombres suivants sans aucun calcul.
a) $2{,}5^2$ et $2{,}5015^2$ **b)** $(-3{,}1)^2$ et $(-2{,}75)^2$
3. Donner un encadrement de x^2 si :
a) $x \in [1\,;4]$ **b)** $x \in\,]-1\,;2]$

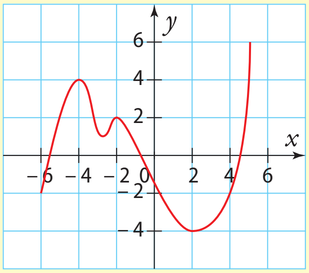
119 ✶✶ Donner un encadrement de $\sqrt{x}$ lorsque :

a) $x \in [1\,;3]$ **b)** $x > 2$ **c)** $x \in\,]0\,;3]$

3 Déterminer un minimum ou un maximum

QCM

Pour les exercices 120 à 123, on considère la courbe représentative d'une fonction donnée ci-dessous.



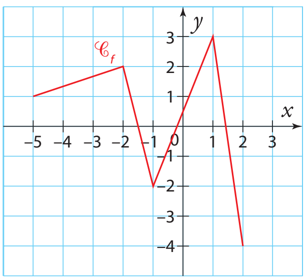
120 Sur [–6 ; 2], le maximum de f est :
a 4 b 1 c 2 d 6

121 Sur [–6 ; 5], –4 est :
a un minimum
b un maximum
c un extremum

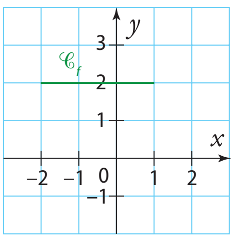
122 f a un minimum qui est atteint pour :
a $x = -4{,}5$ b $x = 2$ c $x = -4$ d $x = 6$

123 Si $x \in [-2 ; 2]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle :
a [–2 ; 2] b [–4 ; 4] c [–4 ; 2]

124 ✶ La courbe représentative d'une fonction f est tracée dans le repère ci-contre.
Déterminer le maximum et le minimum de f et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x ils sont atteints.



125 ✶ La courbe représentative d'une fonction f est tracée dans le repère ci-contre.
Déterminer le maximum et le minimum de f.



126 ✶ f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	–2		5		6
f	–3	↗	3	↘	–2

1. Déterminer le maximum de f et indiquer pour quelle valeur de x il est atteint.
2. Déterminer le minimum de f.

127 ✶ g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	–4		3		6		7		7,5
g	1	↗	5	↘	–2	↗	5	↘	–2

1. g admet-elle un maximum ?
Si oui, pour quelles valeurs de x est-il atteint ?
2. g admet-elle un minimum ?
Si oui, pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

128 ✶ La fonction carré admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

129 ✶ La fonction racine carrée admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

130 ✶ La fonction inverse admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

131 ✶ La fonction cube admet-elle un maximum ? un minimum ?
Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x sont-ils atteints ?

132 ✶✶ f est la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$.
Justifier que f a pour minimum –3.

133 ✶✶ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.
1. Montrer que $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$.
2. Démontrer que f a un maximum.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x ce maximum est-il atteint ?