9

Variations et extremums

Trajectoire d'un saut effectué par le skieur acrobatique Candide Thovex

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Décrire les variations d'une fonction.	1 p. 223	1 2 p. 223 15 16 p. 226
Comparer des images en utilisant un tableau de variations.	2 p. 224	3 4 p. 224 21 22 p. 227
Déterminer le minimum ou le maximum de fonctions à l'aide d'un tableau de variations ou d'une représentation graphique.	4 p. 225	7 8 p. 225 34 35 p. 228
Déterminer les variations des fonctions affines.	Act 2 p. 218	13 p. 226 74 p. 232
Utiliser les variations des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.	3 p. 225	5 6 p. 225 26 à 33 p. 227-228
Résoudre des inéquations à l'aide des variations.	2 p. 224	4 p. 224 22 à 25 p. 227
Résoudre un problème d'optimisation.	Act 4 p. 219	104 p. 235
Démonstration Démontrer les variations des fonctions carré, inverse et racine carrée.	Cours p. 222	
Algo & Prog Pour une fonction dont le tableau de variations est donné, utiliser des algorithmes d'approximation numérique d'un extremum.	103 p. 235	

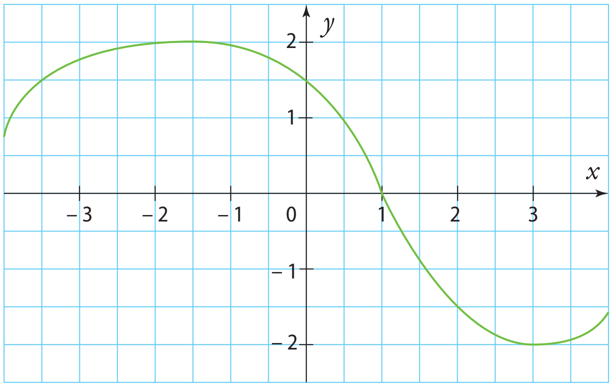
1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-17

1. Lire l'image d'un nombre par une fonction

La représentation graphique d'une fonction f est donnée ci-dessous.



1. Sur quel axe lit-on l'image d'un nombre par la fonction f ?

2. Lire :

a) $f(-1)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f(4)$ **d)** $f(-4)$

2. Calculer l'image d'un nombre par une fonction

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x - 4$.

Par la fonction g, quelle est l'image de :

a) 0 ? **b)** $\frac{2}{3}$? **c)** 2 ?

3. Reconnaître une fonction

1. Parmi les expressions suivantes, déterminer quelles sont celles de fonctions affines.

a) $f(x) = 2x$ **b)** $g(x) = \frac{5x - 7}{4}$

c) $h(x) = (4x - 1)^2$ **d)** $m(x) = (x + 5)^2 - x^2$

2. Parmi les expressions suivantes, reconnaître celles de fonctions de référence.

a) $n(x) = x(x - 3) + 3(x + 2) - 6$

b) $p(x) = \frac{x + 1}{x} - 1$

4. Donner un encadrement d'une fonction

1. Donner un encadrement de $3x - 5$ lorsque :

a) $1 \leqslant x \leqslant 7$ **b)** $-2 \leqslant x \leqslant 3$

2. Donner un encadrement de $-4x + 1$ lorsque :

a) $0 \leqslant x \leqslant 10$ **b)** $-3 \leqslant x \leqslant 1$

5. Connaître les fonctions de référence

Donner l'expression et tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions carré, inverse, racine carrée et cube.

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 221, 222, 234

Algo & Prog
p. 234, 235

TICE
p. 218, 219, 229, 234, 236, 237

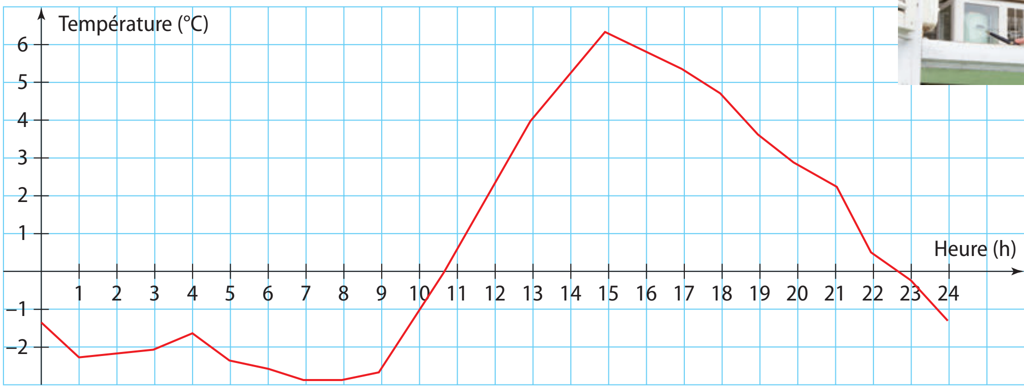
Les autres disciplines
p. 235, 236

Activités

1 Vers le tableau de variations

20 min

À partir de relevés de température réalisés chaque heure dans la station météorologique de Grenoble-Le Versoud, le 4 février 2018, on a obtenu le tracé suivant donnant la température $f(x)$ en fonction de l'heure x ce jour-là.



1. Déterminer la température à 11 h.

2. À quel moment la température augmente-elle ? diminue-t-elle ?

3. Les informations précédentes peuvent être regroupées dans un tableau appelé tableau de variations dont le début est tracé ci-dessous. Recopier et compléter le tableau.

x	0	1	4		…		
f	−1,3 ↘	−2,2	−1,6 ↘	… ↗	…	…	

↪ Cours 1 p. 220

2 Sens de variation des fonctions affines

TICE — 45 min

1. a) Ouvrir un logiciel de géométrie dynamique.

b) Créer un curseur pour un nombre a et un curseur pour un nombre b.

c) Dans la barre de saisie, écrire $f(x) = a*x+b$.

d) Faire varier les valeurs de a et de b, puis compléter.

Si … alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si … alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est ….

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 4$.

a) x_1 et x_2 sont deux nombres réels tels que $x_1 \leqslant x_2$. Recopier et compléter avec les symboles $\leqslant$ ou $\geqslant$.

$x_1 \ldots x_2$ $\qquad$ $3x_1 \ldots 3x_2$ $\qquad$ $3x_1 - 4 \ldots 3x_2 - 4$ $\qquad$ $f(x_1) \ldots f(x_2)$

b) Que peut-on en conclure pour f ?

3. Reprendre la question précédente pour g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 8$.

4. Soit a et b deux réels et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax + b$.

a) Démontrer que si $a > 0$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que si $a < 0$ alors h est décroissante sur $\mathbb{R}$.

↪ Cours 2 p. 221

3 Variations des fonctions de référence

25 min

Le but de cette activité est de tracer les tableaux de variations des fonctions de référence.

1. a) On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'une calculatrice, obtenir le tracé de la courbe de la fonction carré.

b) Compléter le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \to x^2$		…		…	

2. En procédant de la même manière, dresser le tableau de variations des fonctions suivantes.

a) Fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to \sqrt{x}$.

b) Fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $x \to x^3$.

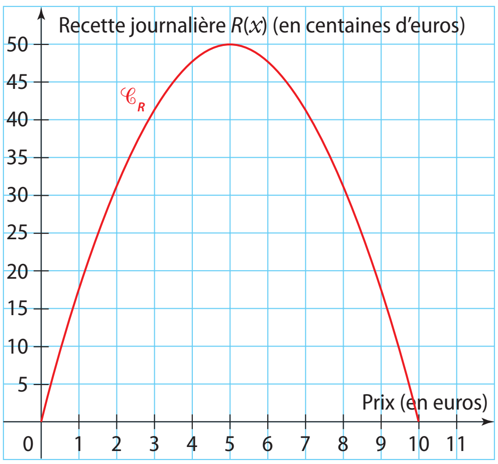
c) Fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \to \dfrac{1}{x}$.

Cours 2 p. 221

4 Minimum et maximum d'une fonction

25 min

Une entreprise produit et vend des boules de Noël. Le prix de vente unitaire peut être fixé entre 1 et 10 €. En fonction de celui-ci, le nombre de ventes, et donc la recette journalière, varient. Après une étude de marché, le gérant a modélisé la recette journalière en fonction du prix de vente par une fonction R dont voici la courbe représentative.



1. Quelle est la recette journalière pour un prix de vente de 9 € ?

2. a) Quelle est la recette maximale ? Pour quel prix est-elle atteinte ?

b) Compléter : f a pour maximum 50 car, pour tout $x \in [0 ; 10]$, on a $f(x) \leqslant$ ….

C'est ainsi que l'on définit le maximum d'une fonction.

3. Une fonction g définie sur $[-5 ; 5]$ a pour minimum 2 atteint en $x = a$.
Écrire la traduction mathématique de cet énoncé sur le modèle de la question précédente.

Cours 3 p. 222

Cours

1 Variations d'une fonction

Définition Fonction croissante et fonction décroissante

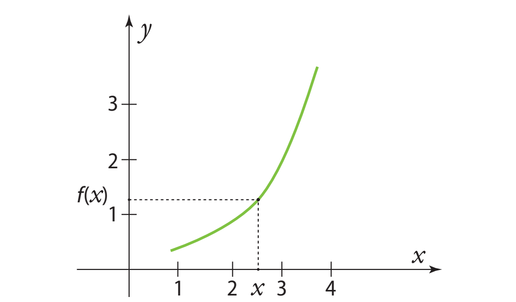
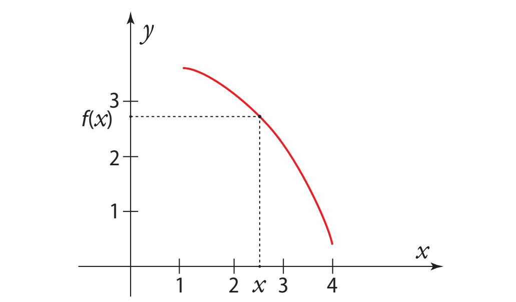
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que f est croissante sur I si lorsque x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.

Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

• On dit que f est décroissante sur I si lorsque x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.

Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Fonction croissante sur I	Fonction décroissante sur I
	

Remarques

- Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I, alors $\mathscr{C}_f$ « monte ».
  Inversement, si f est décroissante sur I, alors $\mathscr{C}_f$ « descend ».
- Si, sur un intervalle I, f garde la même valeur, on dit que f est constante sur cet intervalle.
  Alors sa courbe est horizontale sur cet intervalle.

Définition Fonction monotone

Si f ne change pas de variation sur I, on dit que f est monotone sur I.

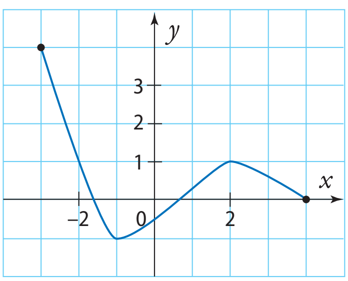
Remarque Si, sur un intervalle I, f est croissante (respectivement décroissante) sans être constante sur une partie de I, on dit que f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Propriété Tableau de variations

Un tableau de variations regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

Exemple

f est une fonction définie sur [–3 ; 4] dont voici la courbe ci-dessous.



Son tableau de variations est le suivant.

x	-3		-1		2		4
f	4	↘	-1	↗	1	↘	0

On peut lire que f est décroissante sur [–3 ; –1], croissante sur [–1 ; 2] et décroissante sur [2 ; 4].

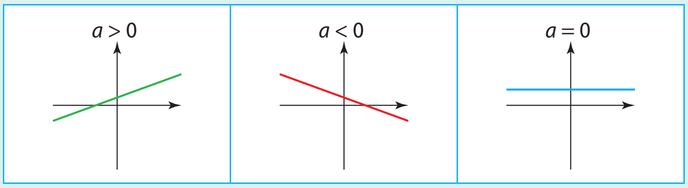
Exercices résolus 1 et 2 p. 223-224

2 Variations de fonctions de référence

Propriété Fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec a et b réels.

- **Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.**



Exemples

① $x \mapsto 4x - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 4 > 0$.

② $x \mapsto -2x + 8$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -2 < 0$.

Remarques

- Si $a > 0$, f est représentée par une droite avec une **pente positive**.
- Si $a < 0$, f est représentée par une droite avec une **pente négative**.

Démonstration

Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

- On suppose que $a < 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
  $a < 0$ donc $ax_1 \geqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \geqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- On suppose que $a > 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leqslant x_2$.
  $a > 0$ donc $ax_1 \leqslant ax_2$ puis $ax_1 + b \leqslant ax_2 + b$. Cela veut dire que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

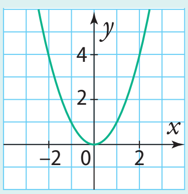
Propriétés Fonctions de référence

Fonction carré

$x \mapsto x^2$

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}-$ et croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	↘	0	↗

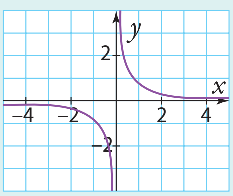


Fonction inverse

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^*+$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	↘	‖	↘

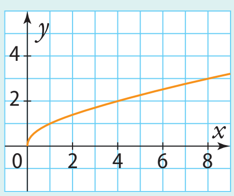


Fonction racine carrée

$x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	↗

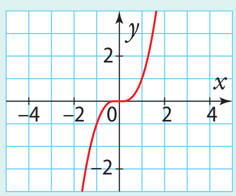


Fonction cube

$x \mapsto x^3$

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	↗	



Exemple

La fonction carré, comme la fonction racine carrée, admet 0 pour minimum et il est atteint pour $x = 0$.
Elle n'admet pas de maximum.

Démonstrations

① Soit x_1 et x_2 deux réels. Alors $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

- Sur $]-\infty\,;0]$, si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant 0$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \leqslant 0$ (somme de réels négatifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \leqslant 0$ par la règle des signes.
  On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \leqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$.
  La fonction carré est décroissante sur$]-\infty\,;0]$.
- Sur $[0\,;+\infty[$, si $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, alors $x_2 - x_1 \geqslant 0$ et $x_2 + x_1 \geqslant 0$ (somme de réels positifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geqslant 0$.
  On en déduit que $x_2^2 - x_1^2 \geqslant 0$ et donc que $x_1^2 \leqslant x_2^2$.
  La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

② Soit x_1 et x_2 deux réels non nuls. Alors $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1}{x_1x_2} - \dfrac{x_2}{x_1x_2} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2}$.

- Sur $]-\infty\,;0[$, si $x_1 \leqslant x_2 < 0$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2x_1 > 0$ (produit de réels strictement négatifs), donc $\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} \leqslant 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} \leqslant 0$ et donc que $\dfrac{1}{x_2} \leqslant \dfrac{1}{x_1}$.
  La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
- Sur $]0\,;+\infty[$, si $x_1 \leqslant x_2 < 0$, alors $x_1 - x_2 \leqslant 0$ et $x_2x_1 > 0$ (produit de réels strictement positifs), donc $\dfrac{x_1 - x_2}{x_1x_2} \leqslant 0$. On en déduit que et donc que $\dfrac{1}{x_2} \leqslant \dfrac{1}{x_1}$.
  La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

③ Soit x_1 et x_2 tels que $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
On a $x_1 = \sqrt{x_1}^2$ et $x_2 = \sqrt{x_2}^2$ donc $\sqrt{x_1}^2 \leqslant \sqrt{x_2}^2$.
Or $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$ sont positifs donc, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}+$, on déduit que $\sqrt{x_1} \leqslant \sqrt{x_2}$.
Autrement dit, la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}+$.

↪ Exercice résolu 3 p. 225

3 Extremum d'une fonction

Définition Maximum et minimum d'une fonction

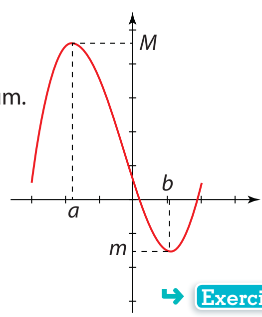
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

• On dit que *f* a pour maximum *M* sur I s'il existe *a* dans I tel que $f(a) = M$ et $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in$ I.
Autrement dit, *M* (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de *f* sur I.

• On dit que *f* a pour minimum *m* sur I s'il existe *b* dans I tel que $f(b) = m$ et $m \leqslant f(x)$ pour tout $x \in$ I.
Autrement dit, *m* (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe de *f* sur I.

Remarques

- Un extremum est un minimum ou un maximum.
- Une fonction peut ne pas avoir de minimum ou de maximum.



↪ Exercice résolu 4 p. 225