7

Les fils du métier à tisser peuvent être considérés comme des droites parallèles. Le tissu est fabriqué en entrelaçant des fils colorés perpendiculairement à ceux du métier à tisser.

Droites du plan et systèmes d'équations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Représenter une droite donnée par son équation cartésienne ou réduite.	1 p.170 3 p.171	1 2 p.170 27 28 p.174 5 6 p.171 38 39 p.175
Déterminer une équation cartésienne ou réduite d'une droite par le calcul.	2 p.170 5 p.172	3 4 p.170 9 10 p.172 32 33 p.174 48 49 p.175
Déterminer le coefficient directeur d'une droite par le calcul ou graphiquement.	4 p.171	7 8 p.171 41 42 p.175
Déterminer si deux droites sont parallèles ou non.	6 p.172	12 13 p.172 52 53 p.176
Résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues.	7 8 p.173	14 15 p.173 56 57 p.176 16 17 p.173 62 63 p.176
Démonstration En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite. **Algo & Prog** Étudier l'alignement de trois points dans le plan Déterminer une équation cartésienne de droite passant par deux points donnés.	Cours p.166	75 p.177 76 p.177

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-13

1. Calculer des coordonnées de vecteurs

On considère les points A(– 1 ; 1), B(3 ; – 1), C(0 ; – 2), D(2 ; 2), E(– 3 ; – 2) et F(– 5 ; 4) dans un repère.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$.

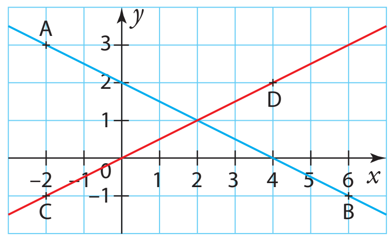
2. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ADBC ?

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FE}$.

4. Que peut-on en déduire pour les quadrilatères ACEF et BDFE ?

2. Déterminer les coordonnées de points d'intersection

On donne les droites (AB) et (CD) représentées ci-contre.



1. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère ?

2. Donner trois points à coordonnées entières appartenant à la droite (CD).

3. Par lecture graphique, donner les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

3. Compléter un tableau de valeurs

Compléter le tableau suivant sachant que $y = -3x + 2$.

x	2		$\frac{1}{2}$	
y		-2		$-\frac{2}{3}$

4. Identifier des droites particulières

1. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (3 ; – 2), (5 ; – 2) et (– 3 ; – 2) ?

2. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (– 2 ; – 2), (3 ; 3) et (8 ; 8) ?

3. Que peut-on dire de la droite passant par les points de coordonnées (1 ; – 2), (1 ; 3) et (1 ; 5) ?

5. Alignement

On considère les points A(–3 ; –2), B(–1 ; 2) et C(0 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2. En déduire si les points A, B et C sont alignés ou non.

6. Parallélisme

On considère les points A(–1 ; –2), B(1 ; 2), C(2 ; –3) et D(3 ; –1).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

2. En déduire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 167, 168, 183

Algo & Prog
p. 177

TICE
p. 164, 182, 183, 185

Les autres disciplines
p. 179, 180

Problèmes ouverts
p. 178

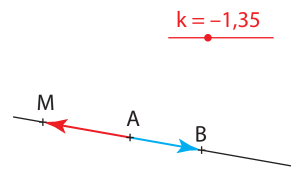
Activités

10 min TICE

1 Effectuer des paramétrages sur une droite

On considère deux points A et B distincts et le point M défini par $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ où k est un réel.

1. Sur GeoGebra, construire une droite (AB), créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$, un curseur k et le vecteur $k\overrightarrow{AB}$, puis son représentant d'origine A pour créer le point M.



2. Pour quelle valeur de k le point M est-il confondu avec le point A ?

3. Pour quelle valeur de k le point M est-il confondu avec le point B ?

4. Pour quelle valeur de k le point M est-il au milieu C du segment [AB] ?

5. Où se situent tous les points M pour lesquels k est un réel compris entre 0 et 1 ?

6. Pour quelle valeur de k le point M est-il le symétrique D du point B par rapport au point A ?

Remarque k s'appelle un paramètre et dans ce cas il donne la position du point M sur la droite (AB).

7. On considère maintenant les points N tels que $\overrightarrow{BN} = h\overrightarrow{BC}$ où h est un réel.
Où se situent tous les points N ?

8. Quelles sont alors les valeurs du paramètre h correspondantes aux points A, B, C et D ?

↪ Cours 1 et 2 p. 166

10 min TICE

2 Étudier les positions relatives de droites

On considère la droite d d'équation cartésienne : $2x - 3y - 4 = 0$

1. Représenter la droite d à l'aide de GeoGebra.

2. Créer trois curseurs a, b et c. Représenter la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

3. Faire varier les curseurs et proposer des valeurs de a, b et c pour que les droites obtenues soient strictement parallèles à d.

4. Faire varier les curseurs et proposer des valeurs de a, b et c pour que les droites obtenues soient confondues avec d.

5. Calculer dans chacun des cas précédents la valeur du quotient $-\frac{a}{b}$. Conclure.

↪ Cours 4 p. 168

20 min TICE

3 Trapèze complet

1. À l'aide de Geogebra, placer les points A(–3 ; –1) , B(6 ;2) , C(3 ;5) et D(–3;3).

2. Faire construire les points F et H, milieux respectifs des segments [CD] et [AB].

3. Construire les droites (AD) et (BC) et leur point d'intersection E.

4. De même, construire les droites (BD) et (AC) et leur point d'intersection G.

5. Construire la droite (EF) et vérifier qu'elle passe par les points G et H

6. Faire varier les points A, B, C et D. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ?

Remarque Tous les calculs seront fait dans l'exercice 134 p. 185.

↪ Cours 2 p. 166 et 5 p. 169

15 min

4 Résoudre un système par combinaison

On cherche à étudier le point d'intersection, s'il existe, des droites suivantes :

- d_1 d'équation cartésienne $20x + 30y - 219 = 0$ et
- d_2 d'équation cartésienne $15x + 25y - 174 = 0$.

1. Dans un repère, représenter ces deux droites.

2. Graphiquement, quelles semblent être les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites ?

3. Vérifier par le calcul si ce point appartient à l'une des deux droites ou bien au deux.
Le point d'intersection a des coordonnées $(x ; y)$ qui vérifient donc les deux équations en même temps, on dit qu'elles sont solutions d'un système (S) que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{cases} 20x + 30y - 219 = 0 \\ 15x + 25y - 174 = 0 \end{cases}$$

4. Mon professeur propose de transformer ce système sous la forme :

$$\begin{cases} 60x + 90y - 657 = 0 \\ -60x - 100y + 696 = 0 \end{cases}$$

a) Quelles opérations a-t-il effectuées ? Quels avantages y voyez-vous ?

b) En déduire alors la valeur de y.

c) Remplacer cette valeur dans les deux équations pour vérifier que vous obtenez la même valeur de x.
Donner alors les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

5. Essayer d'effectuer des opérations sur les équations pour éliminer y en partant du système (S) de départ.
Retrouver alors la même valeur de x précédente.

↪ Cours 5 p. 169

15 min

5 Mettre un problème en équation et résoudre un système par substitution

Au café « Chez Jules », des professeurs de Maths et de Physique Chimie se retrouvent après les cours.

Ils commandent 2 cafés et 3 chocolats. Le serveur leur réclame 10,10 euros.

Puis quatre autres collègues arrivent et commandent 3 cafés et 1 chocolat.

Cette fois-ci, le serveur leur réclame 7,10 euros. Pour obtenir un partage équitable, déterminer le prix d'un café et d'un chocolat.

On notera x le prix d'un café et y celui d'un chocolat.

1. Donner l'équation qui traduit le total de 10,10 euros.

2. De même, donner l'équation qui traduit le total de 7,10 euros.

3. Vérifier qu'on obtient le système $\begin{cases} 2x + 3y - 10{,}1 = 0 \\ 3x + y - 7{,}1 = 0 \end{cases}$

4. Dans la deuxième équation, isoler l'inconnue y pour l'exprimer en fonction de l'inconnue x.

5. Dans la première équation, remplacer l'inconnue y par le résultat de la question précédente.

Remarque Ainsi, on obtient une nouvelle équation dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue x.

6. Résoudre cette dernière équation pour trouver la valeur de x.

7. Remplacer alors cette valeur dans l'équation de la question **4.** pour trouver la valeur de y.

8. Rédiger une conclusion au problème proposé.

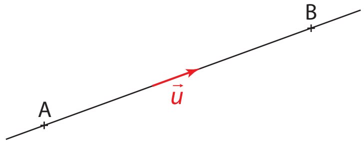
↪ Cours 5 p. 169

Cours

1 Vecteur directeur d'une droite

Définition Vecteur directeur d'une droite

Soient A et B deux points distincts d'une droite *d* alors tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite *d*.



Remarque Le vecteur $\vec{u}$ peut être remplacé par n'importe quel autre vecteur non nul qui lui est colinéaire, il n'est donc pas unique.

Exemple

Soient A(−2 ; 4) et B(6 ; 2) alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$ et donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Exercice résolu 1 p. 170

2 Équation cartésienne d'une droite

Définition Équation cartésienne d'une droite

Une équation cartésienne de la droite passant par le point A(x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration

Un point M(x ; y) appartient à cette droite si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire si leur déterminant est nul. Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ donc on obtient $a(x - x_A) - (-b)(y - y_A) = 0$ qui peut s'écrire $ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$ qui est bien de la forme annoncée.

Remarques

- Si **$a = 0$** alors la droite est **horizontale** et donc parallèle à l'axe des abscisses.
- Si **$b = 0$** alors la droite est **verticale** et donc parallèle à l'axe des ordonnées.
- Une équation cartésienne peut aussi s'écrire sous la forme $ax + by = c$.

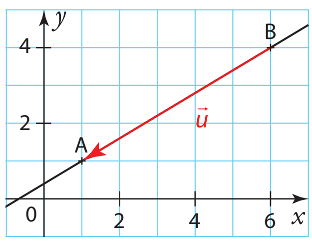
Propriété Condition d'appartenance d'un point à une droite

Si les coordonnées (x ; y) d'un point M vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ alors il appartient à la droite dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Exemples

① Un point M(x ; y) appartient à la droite passant par le point A(2 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$ don $2(x-2) - (-3)(y+1) = 0$ soit $2x + 3y - 1 = 0$

② On cherche à tracer une droite dont une équation cartésienne est $-3x + 5y - 2 = 0$:
- soit on trouve deux points dont les coordonnées vérifient l'équation : A(1 ; 1) et B(6 ; 4), par exemple.
- soit on trouve un point A(1 ; 1) et on utilise un vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$, par exemple.



Exercices résolus 1 et 2 p. 170

3 Équation réduite d'une droite

Définition Équations réduites d'une droite non verticale et d'une droite verticale

• Toute droite **non verticale** a une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m s'appelle le **coefficient directeur** et p **l'ordonnée à l'origine.**

• Toute droite **verticale** a une équation réduite de la forme $x = k$.

Démonstration

Étant donné une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$:

• si $b = 0$ alors l'équation cartésienne devient : $x = -\dfrac{c}{a}$

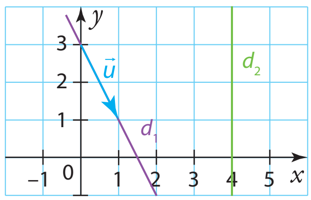
• si $b \neq 0$ alors l'équation cartésienne devient : $y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$ où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = \dfrac{-c}{b}$

Remarques

• Toutes les droites ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation cartésienne.
• Seules les droites non verticales ont une équation qui peut s'écrire sous forme d'une équation réduite.

Exemple

Sur la figure ci-contre on a représenté les droites d_1 d'équation réduite $y = -2x + 3$ et d_2 d'équation réduite $x = 4$.



Exercices résolus 3 et 4 p. 171

Propriétés Lectures graphiques

On considère la droite d'équation réduite : $y = mx + p$

• Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

• Le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0\,;p)$.

Démonstration

• $y = mx + p$ équivaut à $mx - y + p = 0$ dont un vecteur directeur est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.
• Pour $x = 0$ alors $y = p$.

Exemple

Pour la droite d_1 de l'exemple précédent, on lit le point A(0 ; 3), intersection de la droite avec l'axe des ordonnées donc on retrouve : $p = 3$.
À partir de ce point si on se déplace selon le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ on trouve le coefficient du vecteur $m = -2$.

Propriétés Signe du coefficient directeur

Soit m le coefficient directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$

• Si $m > 0$ alors la droite « **monte** ».

• Si $m < 0$ alors la droite « **descend** ».

• Si $m = 0$ alors la droite **est horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses).

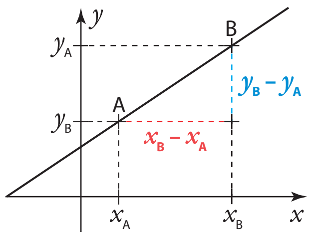
Propriété Droites parallèles

Deux droites non verticales sont **parallèles** si et seulement si elles ont le **même coefficient directeur**

Définition **Coefficient directeur ou pente**

Le coefficient directeur ou pente d'une droite (AB) avec A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) est donné par :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ si } x_A \neq x_B$$



Remarques

- Si $x_A = x_B$ alors la droite est verticale d'équation réduite $x = x_A$.
- m est donc le quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal pour aller d'un point à un autre point de la droite.

Exemples

① Soit la droite ci-contre avec les points A(3 ; 4) et B(6 ; 6).

On calcule le coefficient directeur m, ce qui donne :

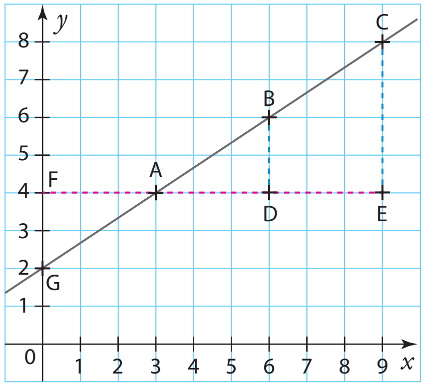
$$m = \frac{6-4}{6-3} = \frac{2}{3}$$

② Par le calcul on sait déjà que : $y = \frac{2}{3}x + p$

Et comme la droite passe par le point A(3 ; 4) on obtient l'égalité :

$y_A = \frac{2}{3}x_A + p$ soit $4 = \frac{2}{3} \times 3 + p$

qui permet de trouver $p = 2$.



Exercices résolus 4 p. 171 et 5 p. 172

4 Positions relatives de deux droites

Règle **Droites sécantes, droites parallèles et droites confondues**

Deux droites du plan peuvent être soit sécantes, soit parallèles ou soit confondues.

Propriété **Droites parallèles avec équations réduites**

Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$. Si, de plus, $p = p'$ alors elles sont confondues.

Propriété **Droites parallèles avec équations cartésiennes**

Deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.

Démonstration

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs des deux droites.

Elles sont parallèles si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires c'est-à-dire si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

Exercice résolu 6 p. 172

5 Résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues

Définition — Système linéaire de deux équations à deux inconnues

On dit qu'un couple $(x\,;y)$ vérifie le système suivant de deux équations linéaires du 1er degré à deux inconnues $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ où a, b, c, a', b', c' sont des constantes, si ce couple vérifie les deux équations.

Remarques Résoudre un système revient à chercher les coordonnées du point d'intersection des droites dont les équations sont celles du système, quand il existe, donc à étudier d'abord la position relative des deux droites.

- Si elles sont **sécantes** le système admet **un seul couple solution.**
- Si elles sont **strictement parallèles** le système n'admet **aucune solution.**
- Si elles sont **confondues** le système a **un nombre infini de solutions**.

Règle — Résolution d'un système par substitution

Cette méthode consiste à isoler une inconnue à partir d'une équation et à la remplacer dans l'autre équation afin d'obtenir une nouvelle équation avec une seule inconnue.
On résout alors cette nouvelle équation puis on remplace l'inconnue trouvée dans la première équation afin de trouver la seconde inconnue.

Remarque Cette méthode présente l'inconvénient que si la résolution de la première équation est fausse alors celle de la seconde le sera également.

Exemple

Pour résoudre le système $\begin{cases} -2x+y+3=0 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$ à l'aide de la première équation, on isole, on a : $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5y-2=0 \end{cases}$

Puis on remplace y dans la deuxième équation pour obtenir $\begin{cases} y=2x-3 \\ 3x-5(2x-3)-2=0 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} y=2x-3 \\ x=\dfrac{13}{7} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} y=2\times\dfrac{13}{7}-3 \\ x=\dfrac{13}{7} \end{cases}$ Et donc la solution du système est le couple $\left(\dfrac{13}{7};\dfrac{5}{7}\right)$.

Exercice résolu 7 p. 173

Règle — Résolution par combinaison

Cette méthode consiste à multiplier les deux équations par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations membre à membre, une inconnue s'élimine. Ainsi, il n'y a plus qu'à résoudre une équation à une seule inconnue. Pour trouver la deuxième inconnue, on peut renouveler la même méthode pour éviter l'inconvénient de la méthode précédente.

Exemple

On souhaite résoudre le système $\begin{cases} 2x+3y+1=0 & (L_1) \\ 3x-4y-2=0 & (L_2) \end{cases}$ constitué des lignes L_1 et L_2.

$\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases} \begin{pmatrix} \times 3 \\ \times(-2) \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{cases} \begin{pmatrix} \times 4 \\ \times 3 \end{pmatrix}$ ce qui donne

$\begin{cases} (6x+9y+3)+(-6x+8y+4)=0 \\ (8x+12y+4)+(9x-12y-6)=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 17y+7=0 \\ 17x-2=0 \end{cases}$ Donc la solution est le couple $\left(\dfrac{2}{17}\,;\dfrac{-7}{17}\right)$

Exercice résolu 8 p. 173

Remarque Si les équations du système ne sont pas écrites sous la forme d'équations cartésiennes de droites il suffit de les transformer pour s'y ramener.

Par exemple : $\begin{cases} 5x=7y-3 \\ 2x+3y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-7y+3=0 \\ 2x+3y-4=0 \end{cases}$