6

Le kitesurf est un sport dans lequel on glisse sur l'eau avec une planche sous les pieds en étant tracté par une aile (cerf-volant ou kite en anglais). La traction s'effectue grâce à la force exercée par le vent sur l'aile. Le mouvement le plus simple est la traction orientée en glissade : une translation !

Vecteurs du plan

Je dois être capable de…	Proposition de parcours	
Représenter géométriquement des vecteurs et construire leur somme.	2 p. 145	5 6 p. 145 40 41 p. 151
Construire le produit d'un vecteur par un réel.	3 p. 146	9 10 p. 146 45 46 p. 152
Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit d'un vecteur par un nombre réel.	4 p. 147 5 p. 148	13 14 p. 147 16 17 p. 148 48 56 p. 152
Caractériser l'alignement et le parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	6 p. 149	22 23 p. 149 68 70 71 p. 153
Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée.	1 p. 144	1 2 p. 144 35 39 p. 151
Démonstration Montrer que deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.	Cours p. 143	84 p. 154 85 p. 155

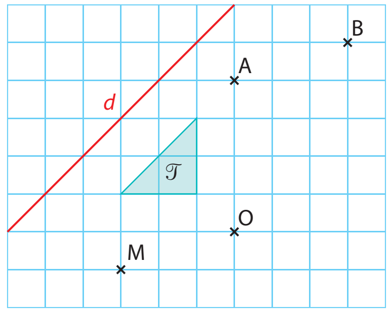
Act 1 Activités — 1 exercices résolus — 4 exercices corrigés — 5 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-11

1. Compléter une figure en faisant des constructions

Reproduire puis compléter la figure ci-contre.



1. a) Construire M_1, le symétrique du point M par rapport à la droite *d*.

b) Construire M_2, le symétrique du point M par rapport au point O.

c) Construire M_3, l'image du point M par la translation qui transforme A en B.

2. De même, construire les images $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$ du triangle $\mathcal{T}$ par les mêmes transformations.

2. Effectuer des calculs

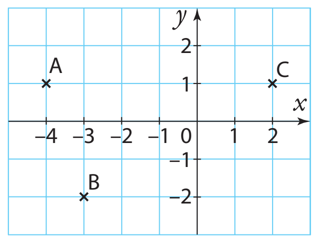
Calculer les nombres suivants.

a) $-3-5$ **b)** $-3-(-5)$ **c)** $3\times(-5)-2\times 4$ **d)** $\dfrac{8+(-5)}{2}$

e) $-6\times 3-(-2)\times 9$ **f)** 7^2-4^2 **g)** $(2-1)^2+(3-(-5))^2$ **h)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$

3. Calculer des longueurs et des milieux à partir de coordonnées

Soit le repère orthonormé ci-contre.



1. Lire les coordonnées des points A, B et C.

2. Soit M le milieu du segment [AC]. Calculer ses coordonnées.

3. Soit N le milieu du segment [BC]. Calculer ses coordonnées.

4. Calculer la longueur AC.

5. Calculer la longueur BC.

4. Identifier un parallélogramme

Dans chacun des cas suivants, peut-on affirmer que ABCD est un parallélogramme ?

a) AB = CD

b) AB = CD et AD = BC.

c) AB = CD et (AB) // (CD)

d) [AC] et [BD] ont le même milieu.

5. Reconnaitre des tableaux de proportionnalité

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ? Si oui, préciser le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la 1^re^ ligne à la 2^e^ ligne.

a)

-2	3
3	$-4{,}5$

b)

$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{3}$

c)

$\sqrt{2}$	2
1	$\sqrt{2}$

d)

-6	3
1	$0{,}5$

Doc Corrigés Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 151, 154

Algo & Prog
p. 155, 158

TICE
p. 137, 156, 157, 159

Les autres disciplines
p. 154, 157

Problème ouvert
p. 155

Activités

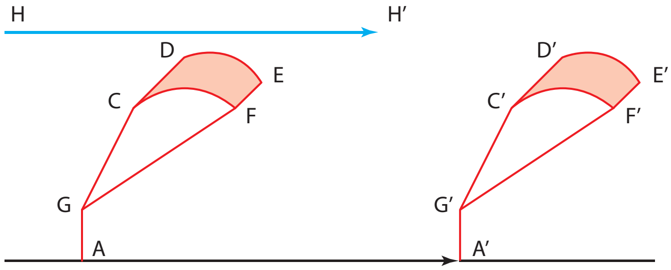
10 min

1 Découvrir les vecteurs

Julia est en train d'observer un kitesurfeur sur l'océan depuis la plage. Elle observe qu'en à peine quelques secondes, celui-ci se déplace du point A au point A′ grâce à la force du vent, représentée par la flèche bleue.

1. a) Décrire le mouvement du kitesurfeur et de son cerf-volant.

b) Quelle transformation reconnait-on ?



2. a) Quelle est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$?

b) Quelle est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{HH'}$?

c) On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{HH'}$ sont égaux.
Citer d'autres couples de vecteurs égaux.

3. a) Comparer les longueurs des segments [AA′], [CC′], [DD′] et [HH′].

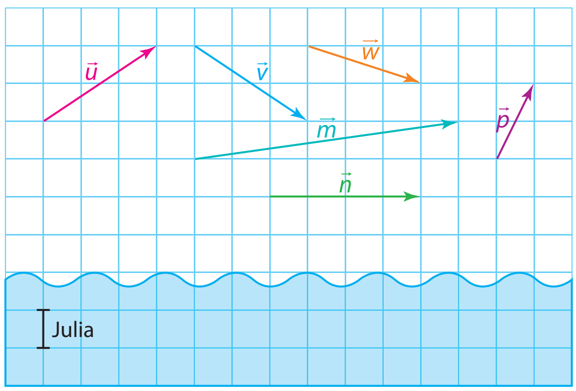
b) Quelle semble être la nature du quadrilatère CC′D′D ?

↪ Cours 1 p. 138

20 min

2 Enchaîner deux translations

Julia décide de tester le kitesurf. Il est représenté par le segment vertical. Le but est de déterminer les nouvelles positions de Julia suite aux différentes bourrasques de vent auxquelles elle fait face, représentées par les vecteurs.



1. a) Sur votre cahier, recopier le segment représentant Julia puis construire son image par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{w}$.

Remarque On dit que l'on a trouvé l'image du segment par l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{w}$.

c) L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est également une translation dont le vecteur est noté $\vec{u} + \vec{w}$.
À quel vecteur représenté sur cette figure correspond le vecteur $\vec{u} + \vec{w}$?

2. a) Julia poursuit ses essais. Construire l'image du nouveau segment obtenu par la translation de vecteur $\vec{p}$.

b) Construire l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$.

c) Émettre une conjecture sur $\vec{p} + \vec{v}$.

↪ Cours 2 p. 139

TICE 15 min

3 Multiplier un vecteur par un nombre réel

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

a) créer un vecteur $\vec{u}$.

b) créer un curseur k de –5 à 5 et d'incrément 0.2.

Remarque Le logiciel note le vecteur $\vec{u}$ sans la flèche mais il apparaît bien dans la catégorie vecteur.

2. Dans la barre de saisie, taper k*u. Vous obtenez alors un nouveau vecteur nommé $\vec{v}$ par défaut.

3. Comparer le sens, la direction et la norme du $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsque :

a) $k = 1$ **b)** $k > 1$ **c)** $k < -1$ **d)** $0 < k < 1$ **e)** $-1 < k < 0$

Cours 3 p. 140

TICE 10 min

4 Découvrir le lien entre coordonnées de points et coordonnées de vecteurs

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, faire apparaître la grille et les axes puis placer six points A,B,C,D,E et F dans ce repère.

2. Construire les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ en reliant les points deux à deux à l'aide de l'outil vecteur.

3. Dans la fenêtre algèbre, comparer les coordonnées des points A et B et du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (faire de même pour $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$) puis conjecturer la formule liant les coordonnées de deux points et les coordonnées du vecteur ayant ces points pour origine et extrémité.

4. Déplacer les points et vérifier que votre conjecture est toujours vérifiée.

Cours 4 p. 140

15 min

5 La colinéarité, à quoi ça sert ?

1. Dans un repère orthonormé, placer les points :
A(–2 ; 6), B(–8 ; –3), C(–3 ; –2), D(–1 ; 1), E(–6 ; 0), F(1 ; 4), G(3 ; 2), H(1 ; –1) et K(–2 ; –1).

2. a) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$, et $\overrightarrow{GK}$.

b) Parmi eux, lesquels semblent avoir la même direction que $\overrightarrow{CD}$?

c) Recopier le tableau suivant. Écrire le nom des vecteurs trouvés dans la première ligne du tableau puis le compléter en calculant leurs coordonnées.

Vecteur	$\overrightarrow{CD}$				
Première coordonnée					
Deuxième coordonnée					

3. Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ? Vérifier en calculant le produit en croix entre la première colonne et les autres colonnes, les unes après les autres.

4. Exprimer les vecteurs du tableau en fonction du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sous la forme $k\overrightarrow{CD}$ où k est un réel.

5. Observer la position relative des droites (AB) et (CD), (CD) et (CF) ainsi que (GH) et (GK). Faire une conjecture liant la position relative des droites avec la colinéarité potentielle des vecteurs.

Cours 5 p. 142

Cours

1 Translations et vecteurs associés

Définition Translation

On considère deux points A et B du plan.

La translation qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Si les points A et B sont confondus, on parle alors de **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.

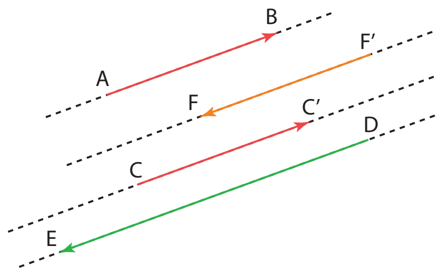
▶ **Notation** Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une flèche **d'origine A et d'extrémité B.**

Définition Caractéristiques d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :
• sa **direction** (celle de la droite (AB)), • son **sens** (de A vers B), • sa **norme** (la longueur du segment [AB]).

Exemple

Sur la figure ci-contre, les points sont placés sur des droites parallèles, donc tous les vecteurs ont la même direction.
Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, les points C et F ont pour images respectives C′ et F′.
Les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{F'F}$ ont des sens opposés mais ont la même norme, tandis que les vecteurs $\overrightarrow{F'F}$ et $\overrightarrow{DE}$ ont le même sens mais pas la même norme.



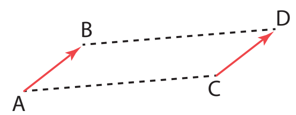
Définition Vecteurs égaux

Deux vecteurs ayant même direction, même sens et même longueur sont égaux.

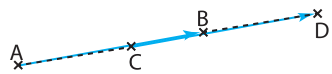
Propriété Caractérisation du parallélogramme

ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

▶ **Remarque** Il faut bien faire attention à l'ordre des points dans lequel on nomme le parallélogramme : ici ABDC (et non ABCD).



Parallélogramme non aplati



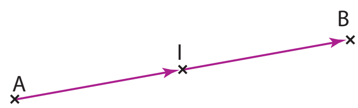
Parallélogramme aplati

Démonstration

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.
Ce qui se traduit par les droites (AB) et (CD) sont parallèles, le quadrilatère ABDC est non croisé et AB = CD.
C'est-à-dire si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

Propriété Caractérisation du milieu d'un segment

I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

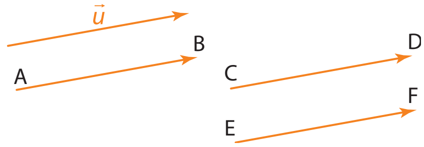


Démonstration

I est le milieu de [AB] si et seulement si I appartient à [AB] et AI = IB.
Ce qui se traduit par les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont la même direction, le même sens (car les points A, I et B sont alignés dans cet ordre) et la même norme.
C'est-à-dire si et seulement les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont égaux soit $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

Définition Le vecteur $\vec{u}$ et ses représentants

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont **des représentants** d'un même vecteur que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\vec{u}$, $\vec{v}$, …, indépendamment des deux points. D'où : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.



Remarque La norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. On peut aussi utiliser cette notation pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Dans ce cas, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

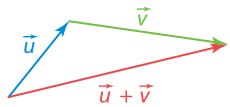
Exercice résolu 1 p. 144

2 Somme de deux vecteurs

Remarque On admet que l'enchaînement de deux translations est une translation.

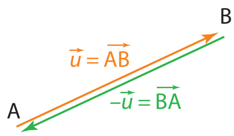
Définition Vecteur somme

La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, est le vecteur associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.



Définition Vecteur opposé

Le vecteur opposé du vecteur $\vec{u}$, noté $-\vec{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même norme que $\vec{u}$ mais un sens opposé.



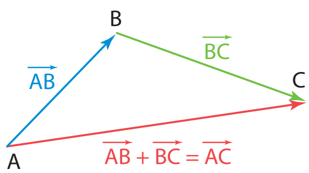
Conséquence $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Propriété Généralités

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:
- la somme est commutative.
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$, que l'on peut donc aussi écrire $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, la somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Propriété Relation de Chasles

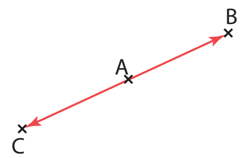
Soit A, B, C trois points. L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Remarques
- Ici le point **B** est à la fois l'extrémité de $\overrightarrow{AB}$ et l'origine de $\overrightarrow{BC}$.
- Attention, l'égalité vectorielle n'implique pas l'égalité des longueurs, en effet, généralement **AB + BC ⩾ AC** : c'est l'inégalité triangulaire.

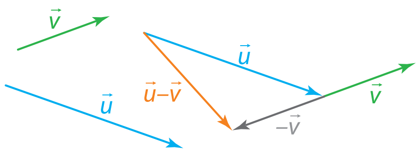
Propriété Somme nulle de deux vecteurs et milieu

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ si et seulement si A est le milieu du segment [BC].



Définition Différence de deux vecteurs

Le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ce qui signifie que soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.



Exercice résolu 2 p. 145

Cours

3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

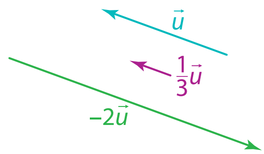
Définition Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul, alors le vecteur $k\vec{u}$ résultant de la multiplication de $\vec{u}$ par k, est défini par :

- **sa direction : la même que celle de $\vec{u}$,**
- **son sens : celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, l'opposé de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$,**
- **sa norme : $||k\vec{u}|| = |k| \times |\vec{u}|$**
  - **si $k > 0$ alors $||k\vec{u}|| = k \times ||\vec{u}||$,**
  - **si $k < 0$ alors $||k\vec{u}|| = -k \times ||\vec{u}||$**

Exemple

À partir de $\vec{u}$, on représente les deux vecteurs $\frac{1}{3}\vec{u}$ et $-2\vec{u}$.



Remarque Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété Distributivité entre vecteurs et réels

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels k et k' :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Exemples

- $2(\vec{u} + \vec{w}) = 2\vec{u} + 2\vec{w}$
- $3\vec{v} - 4\vec{v} = (3 - 4)\vec{v} = -1\vec{v} = -\vec{v}$
- $\frac{1}{2} \times 4\vec{u} = \frac{4}{2}\vec{u} = 2\vec{u}$

Exercice résolu 3 p. 146

4 Base, repère et coordonnées

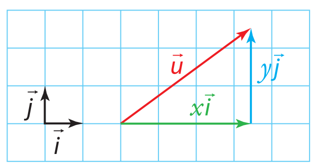
Définition Base orthonormée

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan dont les directions sont perpendiculaires et tels que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$. Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est appelé base orthonormée des vecteurs du plan.

Propriété Décomposition d'un vecteur

Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont deux nombres réels.

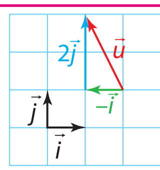
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.



Remarque Parfois, lorsqu'on veut préciser les notations, on note $x_{\vec{u}}$ l'abscisse de $\vec{u}$ et $y_{\vec{u}}$ l'ordonnée de $\vec{u}$.

Exemple

Dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ce que l'on peut aussi noter $\vec{u}(-1\,;\,2)$ ou encore $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.



Propriété Égalité de vecteurs

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

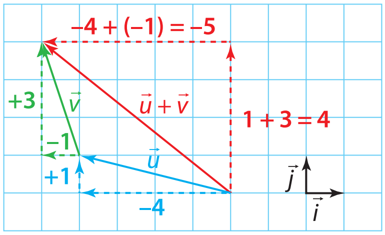
Propriété Somme et différence de deux vecteurs, opposé d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtiennent en faisant la somme des coordonnées : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$. De même : $-\vec{u}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ et $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$

Exemple

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -4 + (-1) \\ 1 + 3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$



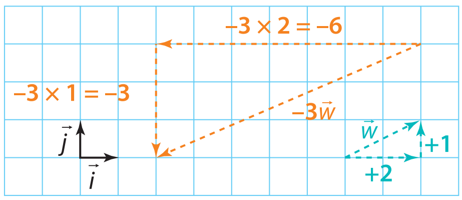
Propriété Multiplication d'un vecteur par un réel

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ si on multiplie un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par un nombre réel k, alors ses coordonnées sont multipliées par k. On a : $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exemple

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ soit $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

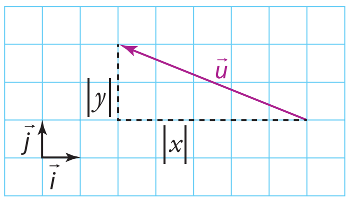
Alors $-3\vec{w}\begin{pmatrix} -3 \times 2 \\ -3 \times 1 \end{pmatrix}$ d'où $-3\vec{w}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$



Propriété Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Remarque Pour justifier, il suffira d'appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $|x|$ et $|y|$.

Définition Repère orthonormé

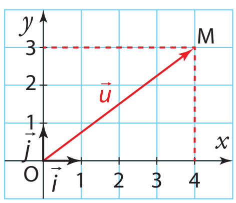
On appelle **repère orthonormé** du plan le triplet $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ constitué par un point O du plan appelé **origine** et par les vecteurs d'une **base orthonormée** $(\vec{i}, \vec{j})$

Remarque Soit M un point quelconque du plan. M a pour coordonnées $(x ; y)$ dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donc $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exemple

Le vecteur $\vec{u}$ représenté ci-contre a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ donc M(4 ; 3).



Propriété Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2 + y_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB$

On retrouve la formule vue dans le chapitre précédent.

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, on a

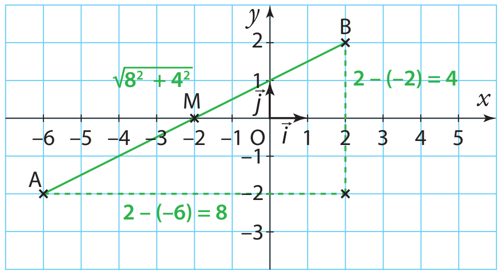
$A(-6\,;-2)$ et $B(2\,;2)$. On calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-6) \\ 2-(-2) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculons la distance AB à partir des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:

$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16}$

$= \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}9$ unités de longueur.



Exercices résolus 4 p. 147 et 5 p. 148

5 Colinéarité de vecteurs

Définition Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. S'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. k est appelé coefficient de colinéarité.
De manière analogue, on considère que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur puisque $\vec{0} = 0\vec{u}$.

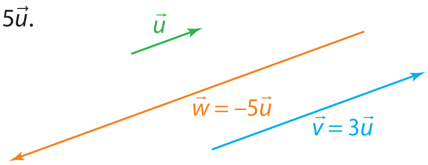
Remarque On en déduit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Exemple

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls tels que : $\vec{v} = 3\vec{u}$ et $\vec{w} = -5\vec{u}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et l'on a $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$.

De même $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, ainsi ils ont tous les trois la même direction donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.



Définition Déterminant de deux vecteurs

On appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$

Exemple

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = 1 \times (-4) - 3 \times (-2) = 2$

Propriété Condition de colinéarité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$. Ce qui signifie que $x = kx'$ et $y = ky'$ si et seulement si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles, c'est-à-dire que les produits en croix sont égaux, ce qui équivaut à $xy' = x'y$ ou à $xy' - x'y = 0$.

Remarque Dans la démonstration, nous avons vu que deux vecteurs colinéaires ont des coordonnées proportionnelles.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 18 \end{pmatrix}$. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4 \times 18 - 6 \times 12 = 72 - 72 = 0$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

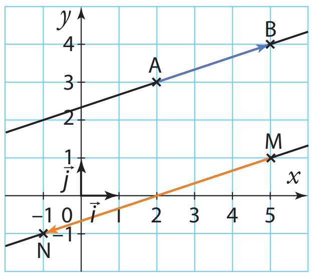
Remarque Le calcul du déterminant ne permet pas/ ne nécessite pas de trouver le coefficient de colinéarité. Ci-dessus, le coefficient de colinéarité s'obtient en faisant : $k = \frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Propriété Parallélisme de deux droites

Deux droites (AB) et (MN) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires (si et seulement si leur déterminant est nul).

Exemple

Soit A(2 ; 3), B(5 ; 4), M(5 ; 1) et N(–1 ; –1). On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ puis leur déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = 3 \times (-2) - (-6) \times 1 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (MN) sont parallèles.



Propriété Alignement de trois points

Trois points distincts A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (si et seulement si leur déterminant est nul).

Remarque Cette propriété se justifie ainsi : si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les deux droites (AB) et (AC) seront parallèles. Mais comme elles ont un point en commun, elles seront confondues, donc les points A, B et C seront alignés.

Exemple

Soit A(–4 ; 3), B(7 ; 0) et C(0 ; 2). On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ puis leur déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 11 \times (-1) - 4 \times (-3) = 1 \neq 0$.
Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.