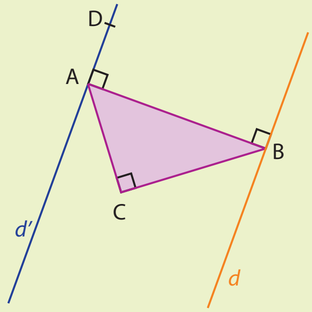
Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-10

1 Utiliser le projeté orthogonal

Cours 1 p. 118

On considère un triangle ABC rectangle en C tel que AB = 5 cm, BC = 4 cm et AC = 3 cm. On trace deux droites *d* et *d'* perpendiculaires à [AB] et on place un point D sur la droite *d'*.
Déterminer les distances :
a) du point A à la droite (BC).
b) du point B à la droite (AC).
c) du point D à la droite *d*.



Solution

a) Le triangle ABC est rectangle en C donc le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) est le point C **1** et **2**.
Par conséquent, la distance de A à (BC) est égale à la longueur AC soit 3 cm. **3**

b) Le triangle ABC est rectangle en C donc le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) est le point C **1** et **2**.
Par conséquent, la distance de B à (AC) est égale à la longueur BC soit 4 cm. **3**

c) Pour déterminer la distance du point D à la droite *d*, il faut construire le projeté orthogonal E de D sur la droite *d*, mais alors (DE) est perpendiculaire à d et par conséquent ABDE est un rectangle.
Donc AB = DE et la distance cherchée est la longueur AB soit 5 cm. **3**

Conseils & Méthodes

1 Repérer les angles droits de la figure.

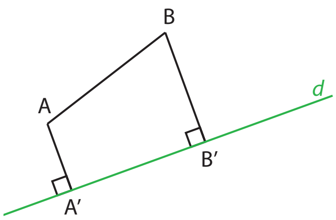
2 Déterminer les projetés orthogonaux nécessaires.

3 Utiliser le fait que la distance est la plus courte avec le projeté orthogonal.

À vous de jouer !

1 Tracer une droite *d* et placer un point M n'appartenant pas à *d*.
1. Construire le point H tel que la distance de M à la droite *d* soit la longueur MH.
2. Soit un point N de la droite *d*, tracer la hauteur issue de H dans le triangle MNH, elle coupe le segment [MN] en un point I.
3. Dans le triangle MNH, quelle sera la hauteur issue de N ?
4. Quelle est la distance du point H à la droite (MN) ?

2 On considère deux points A et B situés du même côté par rapport à une droite *d*, et on construit les projetés A' et B' des points A et B sur la droite *d*.



Donner la nature du quadrilatère AA'B'B. Justifier.

3 Tracer un cercle de centre O et de rayon 3 cm.
Soit A un point quelconque sur le cercle, tracer la droite *d* perpendiculaire à (OA) en A.
On place un point M quelconque sur la droite *d*.
Comparer, en justifiant, les distances OA et OM.

4 On considère un parallélogramme ABCD d'aire 24 cm^2 et tel que AB = 8 cm.
On appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB).
1. Déterminer la distance du point D à la droite (AB).
2. Construire un parallélogramme ABCD vérifiant les hypothèses et tel que H soit le milieu du segment [AB].
3. En déduire que DA = DB
4. En déduire que le cercle de centre B passant par D passe aussi par C.

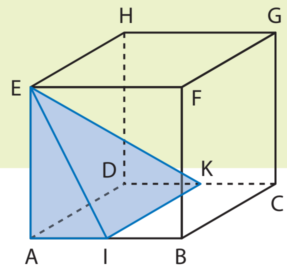
5 On considère un carré ABCD de côté 6 cm.
1. Construire l'ensemble des points M qui sont situés à 2 cm de la droite (AD).
2. Quelles sont les valeurs possibles pour la distance du point B à cet ensemble ?
3. De la même manière, construire l'ensemble des points qui sont situés à 2 cm de la droite (AB).
4. Combien y a-t-il de points qui sont dans les deux ensembles précédents ?

Exercices 28 à 31 p. 123

2 Calculer des longueurs, des aires ou des volumes

↪ Cours 1 p. 118

Dans le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 2 cm, les points I et K sont les milieux des arêtes [AB] et [CD] du carré ABCD.
Calculer le volume de la pyramide AIKDE.



Solution

Cette pyramide a pour base AIKD qui est un rectangle car c'est un quadrilatère avec deux angles droits et deux côtés opposés de même longueur 1.

La hauteur de cette pyramide est la plus courte distance entre son sommet E et sa base AIKD donc c'est la longueur AE 2.
Le volume de cette pyramide est donc :
$\frac{1}{3} \times \text{AD} \times \text{AI} \times \text{AE} = \frac{1}{3} \times 2 \times 1 \times 2 = \frac{4}{3}\ \text{cm}^3$ 3

Conseils & Méthodes

1 Déterminer la base et le sommet de la pyramide
2 Déterminer quelle est sa hauteur.
3 Rechercher la formule à utiliser, reconnaitre les longueurs à calculer puis appliquer la formule.

À vous de jouer !

6 Dans le cube ABCDEFGH de côté 4, calculer le volume du tétraèdre ABDE.
Quel est son rapport avec le volume du cube ?

7 Dans le cube ABCDEFGH, de côté 3, on admet que la diagonale [AC] du carré ABCD mesure $3\sqrt{2}$.
Déterminer la longueur de la diagonale [AG] de ce cube.

↪ Exercices 26 et 27 p. 123

3 Utiliser des coordonnées dans un repère

↪ Cours 2 p. 119

On considère les points A (1 ; –3), B (–4 ; –1), C (3 ; 3) et D (–1 ; 2)
1. Déterminer par le calcul les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [AC] et [BD].
2. Calculer les longueurs AC et BD.

Solution

1. Le milieu I du segment [AC] a pour coordonnées $\left(\frac{3+1}{2} ; \frac{3+(-3)}{2}\right)$ soit I(2 ; 0) et le milieu J de [BD] a pour coordonnées $\left(\frac{-4+(-1)}{2} ; \frac{-1+2}{2}\right)$ soit $\text{J}\left(-\frac{5}{2} ; \frac{1}{2}\right)$. 1 3

2. On calcule : $\text{AC} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
et $\text{BD} = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 2 3 4

Conseils & Méthodes

1 Reconnaitre la formule qu'il faut utiliser.
2 Vérifier que le repère est orthonormé pour calculer une longueur.
3 Attention dans les calculs aux soustractions de nombres négatifs.
4 On peut simplifier l'écriture et la mettre sous la forme $a\sqrt{b}$.

À vous de jouer !

8 On considère les points A (1 ; 5), B (–1 ; 1) et C (3 ; 4).
Calculer les longueurs AB, AC et BC.

9 On considère les points A (–2, 1), B (1 ; 3) et C.
Calculer les coordonnées des milieux des segments [AB], [AC] et [BC].

↪ Exercices 32 et 36 p. 123

Apprendre à apprendre

10 Reconnaitre la formule qui donne les coordonnées du milieu d'un segment [AB] et celle qui donne la distance AB. Recopier ces deux formules et demander à l'un de vos camarades de vous les faire réciter.

a) $\left(\dfrac{x_B - x_A}{2}\,;\,\dfrac{y_B - y_A}{2}\right)$ **b)** $\sqrt{(x_A + x_B)^2 + (y_A + y_B)^2}$

c) $\left(\dfrac{x_B + x_A}{2}\,;\,\dfrac{y_B + y_A}{2}\right)$ **d)** $\dfrac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$

e) $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ **f)** $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

11 Sur un tableau ou une feuille, tracer deux colonnes : l'une « Vrai » et l'autre « Faux ».

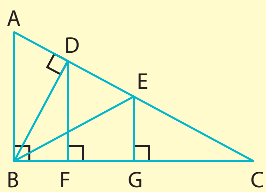
Recopier dans l'une ou l'autre des colonnes chacune des phrases suivantes puis corriger les phrases qui se trouvent dans la colonne « Faux ».

① Le milieu de [AB] est aligné avec A et B.
② Si un point M vérifie MA = MB alors M est le milieu du segment [AB].
③ L'ensemble des points M tels que AM = 3 est le cercle de centre A et de rayon 3.
④ Un quadrilatère qui a deux angles droits est un rectangle.
⑤ L'ensemble des points M à la distance 2 d'une droite d est le cercle de centre M et de rayon 2.
⑥ Un triangle qui a deux côtés de même longueur est un triangle rectangle.
⑦ L'ensemble des points à égale distance de deux droites parallèles s'appelle une médiatrice.

Questions - Flash

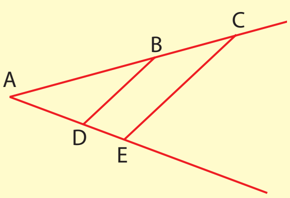
Diapo Diaporama Ressource professeur

12 Dans la figure ci-contre, déterminer les projetés suivants :
a) du point A sur la droite (BD).
b) du point E sur la droite (BC).
c) du point F sur la droite (AB).



13 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a BC = 10 et AB = 6. Quelle est la longueur du côté AC ?

14 On considère trois points A, B et C alignés tels que : AB = 8 et AC = 12. On place les points D et E sur une même droite passant par A et tels que AD = 5 et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Quelle est la valeur de la longueur AE ?



15 On considère les points A (–2 ; 3) et B (–4 ; –1). Déterminer la longueur AB.

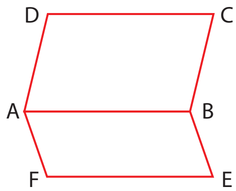
16 On considère les points A (–3 ; 1) et B (–2 ; –4). Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

17 Dans un triangle ABC rectangle en A, on a : AB = 4, AC = 3 et BC = 5. Déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

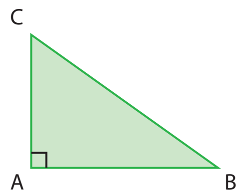
18 Dans le même triangle que l'exercice précédent, déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$.

Géométrie plane AP

19 On considère les parallélogrammes ABCD et ABEF. Montrer que le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.



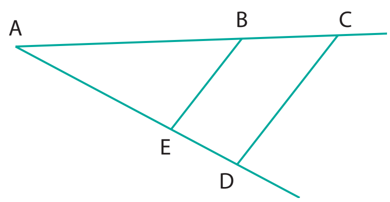
20 On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que AC = 15 et BC = 25.



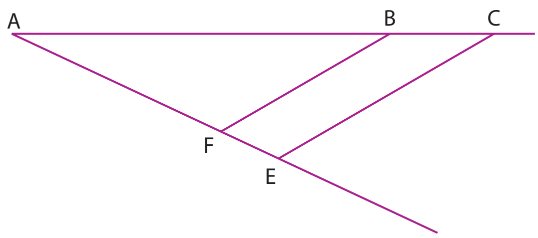
Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [AB].

21 Un triangle BCD est tel que BC = 25, BD = 24 et CD = 7. Déterminer si le triangle BCD est rectangle ou non.

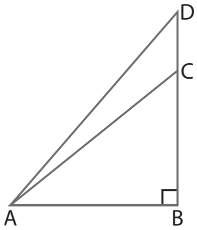
22 On considère trois points A, B et C alignés sur une même demi-droite d'origine A tels que AB = 8 et AC = 12. Sur une autre demi-droite d'origine A, on place les points D et E tels que (BE) est parallèle à (CD) et AD = 9.
Calculer la longueur AE.



23 Sur deux demi-droites de même origine A, on place les points B, C, E et F tels que AB = 8, BC = 4, AF = 4 et EF = 2. Déterminer si les droites (BF) et (CE) sont parallèles.



24 Le triangle ABD est rectangle en B et le point C est un point appartenant au segment [BD].
De plus on a AB = 6, AC = 8 et AD = 10.
1. Calculer la longueur BC.
2. Calculer la longueur BD.



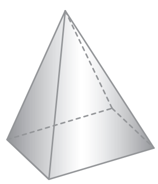
25 Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point M et les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
De plus on a AD = 3, BC = 2 et AM = 3,5.
1. Calculer la longueur BM.
2. On donne CM = 1,8, calculer DM.
3. Soit I et J les milieux respectifs de [MB] et [MC], montrer de (IJ) et (BC) sont parallèles.

Calculer des longueurs, des aires et des volumes

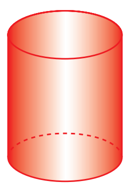
26 Dans un triangle ABC, on a : AB = 9, BC = 12 et AC = 15.
1. Montrer que ABC est un triangle rectangle.
2. Calculer son aire.

27 On considère les quatre solides suivants.

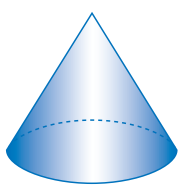
① Une pyramide de base rectangulaire de longueur 6 cm et de largeur 3 cm, et de hauteur 6 cm.



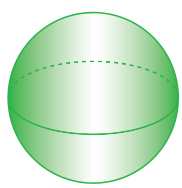
② Un cylindre de rayon 2 cm et de hauteur 3 cm.



③ Un cône de rayon 3 cm et de hauteur 3 cm.



④ Une boule de rayon 2 cm.

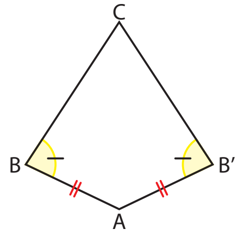


Classer ces quatre solides dans l'ordre croissant de leurs volumes.

Utiliser le projeté orthogonal

28 ABC est un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal de A sur [BC].
1. Montrer que les triangles ABC et AHC sont semblables.
2. De même, montrer que les triangles ABC et AHB sont également semblables.

29 Sur la figure ci-contre, AB = AB′ et $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C}$. On appelle H et H′ les projetés orthogonaux du point A respectivement sur (BC) et (B′C). Démontrer que les triangles ABH et AB′H′ sont semblables, puis égaux.



30 1. Tracer une droite *d* et placer un point A n'appartenant pas à *d*.
2. Construire l'ensemble des points situés à 2 cm de *d*.
3. Déterminer les points qui sont à la fois à 2 cm de *d* et à 4 cm de A.
4. Discuter selon la distance du point A à la droite *d*, le nombre de solutions à la question 3.

31 On considère un parallélogramme ABCD tel que B et D ont le même projeté orthogonal sur la diagonale [AC].
1. Réaliser une figure correspondante.
2. Justifier qu'alors (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
3. Que peut-on en déduire de la nature de ABCD ?

Utiliser des coordonnées dans un repère

32 On donne les points A(2 ; 3) et B(–1 ; –4)
Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

33 On donne les points C (–1 ; –3) et D (3 ; 1).
Déterminer par le calcul la longueur CD.

34 On considère les points A (3 ; –1), B (5 ; 2) et C (7 ; –1).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. Donner la nature du triangle ABC.

35 On considère les points A (–2 ; 1), B (–4 ; 4) et C (0 ; –2).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

36 Dans un repère orthonormé, on place les points A (1 ; –1), B (–2 ; 0), C (0 ; 6) et D (3 ; 5).
1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AC].
2. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [BD].
3. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

Calculs et automatismes

37 Exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$.

a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt{32}$

38 Simplifier les fractions.

a) $\dfrac{3+4}{2}$ **b)** $\dfrac{-2+4}{2}$ **c)** $\dfrac{-3+(-5)}{2}$ **d)** $\dfrac{7+(-4)}{2}$

Utiliser le projeté orthogonal

39 Dans un triangle ABC isocèle en A, on construit les projetés orthogonaux H et K des points B et C respectivement sur les côtés [AC] et [AB].
1. Montrer que les triangles BCH et BCK sont égaux.
2. En déduire que AH = AK, puis que (HK) est parallèle à (BC).

40 On considère le triangle ABC tel que AB = 10,5 AC = 17,5 et BC = 14 et on appelle H le projeté orthogonal du point B sur le côté [AC].
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Exprimer l’aire de ce triangle de deux façons.
3. En déduire la longueur BH.

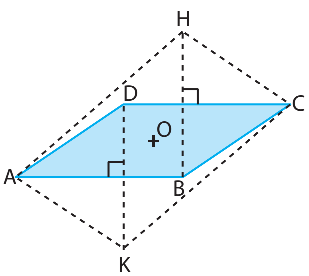
41 On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 et BC = 3. On projette orthogonalement le point B sur (AC) en un point H
1. Calculer l’aire du triangle ABC.
2. Déterminer la longueur de la diagonale [AC].
3. En déduire la longueur BH.

42 On considère deux droites *d* et d’ sécantes en un point O et un point A n’appartenant ni à *d*, ni à *d′*. On projette le point A sur la droite *d* en un point H et sur *d′* en un point K. La droite (AH) coupe *d′* en un point B et la droite (AK) coupe la droite d en un point C.
1. Réaliser la figure correspondante.
2. Démontrer que les droites (AO) et (BC) sont perpendiculaires.

Résoudre des problèmes de géométrie plane

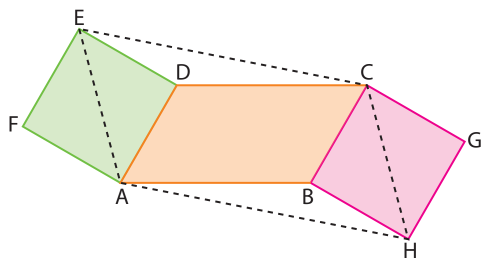
43 On considère un parallélogramme ABCD.

Le point H est le symétrique du point B par rapport à la droite (CD) et le point K est le symétrique du point D par rapport à la droite (AB).



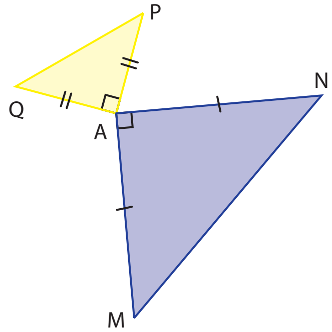
1. Montrer que le quadrilatère DHBK est un parallélogramme.
2. En déduire que le quadrilatère AKCH est aussi un parallélogramme

44 On considère un parallélogramme ABCD et on construit à l’extérieur les carrés ADEF et BCGH.



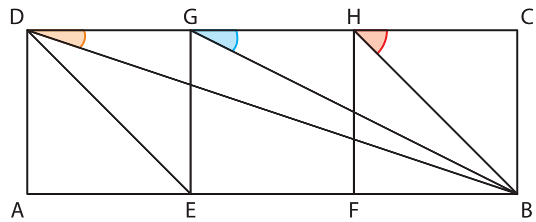
Démontrer que AECH est un parallélogramme.

45 Les deux triangles AMN et APQ sont rectangles et isocèles en A.
Démontrer que MP et NQ ont la même longueur par deux méthodes :
a) en comparant les triangles MAP et NAQ.
b) en utilisant une rotation de centre A.



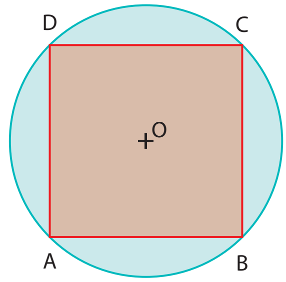
46 Soit un rectangle ABCD avec AB = 3AD = 3.
On le découpe en trois carrés AEGD, EFHG et FBCH tous de côté 1.

1. Calculer les rapports $\frac{ED}{HG}$, $\frac{DB}{GB}$ et $\frac{BE}{BH}$.
2. Comparer alors les triangles EDB et HGB.
3. Montrer que $\widehat{BDC} + \widehat{BGC} = \widehat{BHC}$.

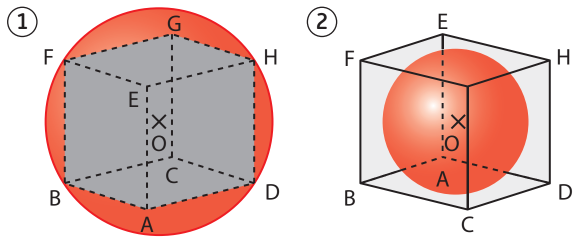


Calculer des longueurs, des aires et des volumes

47 On considère un carré ABCD de centre O et de côté 4 cm, et un disque de centre O passant par les quatre sommets du carré.
1. Calculer l’aire du carré.
2. Calculer le rayon du disque.
3. Calculer l’aire du disque.
4. En déduire l’aire turquoise comprise entre le disque et le carré.

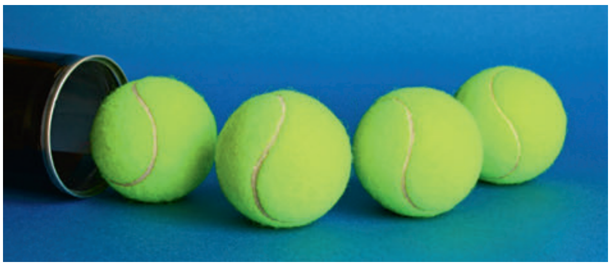


48 Soit un cube d'arête 2 cm.
1. Calculer le volume de la sphère circonscrite au cube.
2. Calculer le volume de la sphère inscrite dans le cube.



49 On dispose d´une sphère de diamètre 4 cm remplie d´eau dont on transvase le contenu dans un cylindre de révolution de diamètre de base 4 cm et de hauteur 4 cm. Quelle est la hauteur atteinte par l´eau dans le cylindre ?

50 Une boite de quatre balles de tennis est un cylindre de hauteur 26 cm. EPS
1. Calculer le diamètre d'une balle de tennis.
2. En déduire le rayon de la boîte.
3. Calculer le volume de la boîte.
4. Calculer le volume d'une balle de tennis.
5. En déduire le volume de l'espace vide.



Utiliser la trigonométrie

51 Dans un triangle ABC rectangle en C, on donne AB = 8 et AC = 4.
1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{CAB}$.
3. Calculer la longueur BC par deux méthodes différentes.

52 On considère un losange ABCD de centre le point O tel que AB = 5 et AC = 6.
1. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ADO}$.
2. Déterminer la longueur BO.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$.

53 Dans triangle ABC rectangle en A tel que AB = 5, on place un point D sur le segment [AB] tel que AD = 3 et $\widehat{ADC} = 60°$.
1. Calculer la longueur CD.
2. Calculer la longueur AC.
3. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

Utiliser les coordonnées

Pour les exercices suivants, on se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J)

54 On considère les points A(–2 ; 1), B(2 ; 3) et C(–3 ; 3).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

55 On considère les points A(6 ; 1), B(7 ; 5) et C(–2 ; 3).
1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$.

56 On considère les points A(2 ; –1), B(4 ; 5) et C(–7 ; 2).
1. Déterminer les coordonnées du milieu M du segment [BC].
2. Calculer les longueurs MA, MB et MC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

57 Déterminer la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants.
a) A(4 ; 1), B(–1 ; 5) et C(–2 ; –1).
b) A(6 ; –5), B(–1 ; –4) et C(–0,5 ; –0,5).
c) A(–2 ; 4), B(4 ; 0) et C(–3 ; –4).

58 On considère les points A(–2 ; –3), B(2 ; –2), C(–1 ; 1) et D(3 ; 2).
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

59 On considère les points A(5 ; 1), B(–1 ; 5), C(1 ; 8) et D(7 ; 4).
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.

60 On considère les points A(1 ; 2), B(–6 ; 3), C(6 ; 7) et D(–1 ; 8).
Déterminer la nature du quadrilatère BACD.

61 On donne les points A(2 ; –3) et B(–3 ; –1).
Déterminer les coordonnées du point C symétrique de A par rapport à B.

62 On considère les points A(1 ; 4), B(4 ; 6) et C(2 ; 3).
Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

63 Soit A(–2 ; 5), B(0 ; 9) et D(8 ; 0).
1. Déterminer les coordonnées du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
2. Montrer que ABCD est un rectangle.

64 On donne le point A (–3 ; 2). Déterminer la distance du point A aux deux axes du repère.

65 On considère les points A(–5 ; 0), B(3 ; –4) et C(2 ; 4).
1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. Calculer les longueurs OA et OB.
3. En déduire que la droite (OC) est la médiatrice du segment [AB].
4. En déduire la nature du triangle OAB.

66 On considère les points A(1 ; 2), B(3 ; –1) et C(–1 ; –1).
1. Calculer les longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment [BC].
4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D symétrique de A par rapport à I.
5. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? Justifier.

67 On considère les points A(0 ; 12), B(–9 ; 0) et C(16 ; 0)
1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [BC].
3. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABDC soit un rectangle.

68 On considère les points D(–2 ; –1), E(15 ; –1) et F(11 ; $2\sqrt{13}-1$).
1. Montrer que le triangle DEF est rectangle.
2. Donner une valeur approchée arrondie à l'unité de l'angle $\widehat{EDF}$.

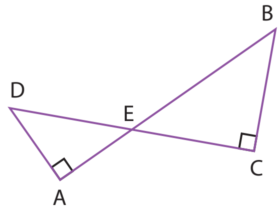
69 Que fait l'algorithme, **Algo & Prog**
écrit en PYTHON suivant ?

```
xa=float(input("xa="))
xb=float(input("xb="))
ya=float(input("ya="))
yb=float(input("yb="))
xm=(xa+xb)/2
ym=(ya+yb)/2
print(xm)
print(ym)
```

70 Que donne le programme **Algo & Prog**
écrit en PYTHON suivant ? Justifier.

```
import math
def D(xa,ya,xb,yb):
    d = math.sqrt((xb-xa)**2+(yb-ya)**2)
    return d
```

71 Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) se coupent en un point E. Les triangles EAD et BCE sont rectangles et de plus :
BC = 5, BE = 7 et AE = 4.



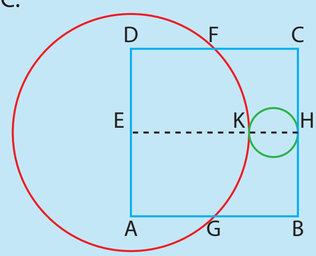
1. Calculer la valeur en degré, arrondie à 0,1, de l'angle $\widehat{BEC}$.
2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{AED}$.
3. Calculer la longueur DE, arrondie à 10^{-1}.

72 On considère les points A(–3 ; –1), B(1 ; –1), C(1 ; 3) et D(–3 ; 3).
1. Démontrer que ABCD est un carré.
2. Calculer les coordonnées des milieux E du segment [AD], F de [CD], G de [AB] et H de [BC].
3. Calculer le rayon du cercle de centre E passant par F et G.
4. On appelle K le point d'intersection du cercle et du segment [EH].
En déduire le rayon du cercle qui touche le carré et le cercle précédent.

Travailler autrement — Problèmes ouverts

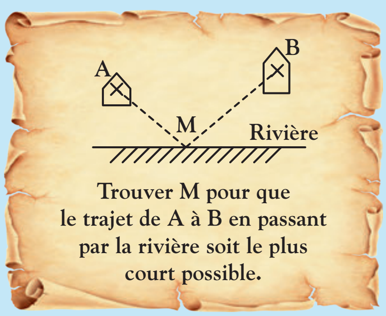
73 ABCDEFGH est un cube de 10 cm d'arête.
Combien de points sur les arêtes du cube sont situés à 15 cm du point A ?

74 On considère d et d' deux droites sécantes. Déterminer où placer trois points A, B et C de telle manière que d et d' soient deux hauteurs du triangle ABC.



75 On considère un triangle ABC et un point P fixe sur [AB]. Trouver Q sur [AC] et R sur [BC] tels que le périmètre du triangle PQR soit minimum.

76 Lire le parchemin et suivre la consigne.



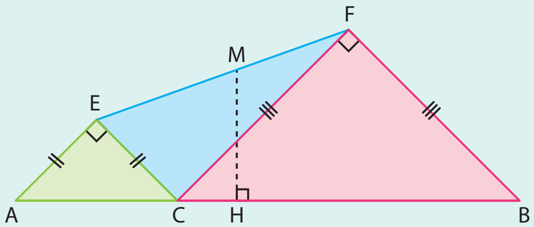
77 Longueur constante TICE

Dans un triangle ABC rectangle et isocèle en A, on construit le milieu I du segment [BC] et un point M quelconque et variable sur le segment [BC].
La droite parallèle à la droite (AI) passant par M coupe la droite (AB) en E et la droite (AC) en F.
1. Déterminer la nature des triangles MEB et MFC.
2. En déduire que la distance ME + MF est constante et donner sa valeur.

Démonstration

78 Encore une constante TICE

Sur un segment [AB], on place un point C variable, puis on construit deux triangles ACE et BCF qui sont isocèles et rectangles en E et F.
On place le point M milieu du segment [EF] et on construit le projeté orthogonal H de M sur la droite (AB).
1. Démontrer que le triangle CEF est rectangle.
2. On construit le point G intersection des droites (AE) et (BF), montrer que le quadrilatère ECFG est un rectangle.
3. En déduire que M est le milieu du segment [CG].
4. On appelle I et J les milieux respectifs des segments [AG] et [BG], démontrer que les points I, M et J sont toujours alignés sur une droite que l'on précisera.



Coup de pouce On pourra utiliser le théorème de Thalès.

5. En déduire que la distance MH est constante.
6. On appelle P et Q les projetés orthogonaux de E et F sur (AB), montrer que MH est la moyenne entre EI et FJ.

79 Cercle et triangle

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(2 ; 3), B(13 ; 1), C(5 ; 7) et D(4 ; –1)
1. Le point A appartient-il au cercle de centre C et de rayon 5 ?
2. Le point B appartient-il à la médiatrice du segment [OJ] ?
3. Quelle est la nature du triangle JAD ?

80 Triangle et rectangle

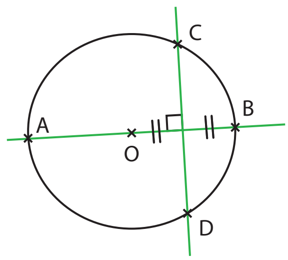
Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–2 ; 1), B(–1 ; 4) et C(5 ; 2).
1. Calculer les valeurs exactes des longueurs AB, AC et BC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.
3. Calculer les coordonnées du point M milieu de [AC].
4. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un rectangle.

81 Aires de triangles

Dans un repère orthonormé (O ; I, J), on considère les points A(–2 ; –1), B(–4 ; 3) et C(2 ; 6).
1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2. On appelle D le symétrique du point B par rapport au milieu du segment [AC].
Démontrer que ABCD est un rectangle.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. La droite perpendiculaire à (AC) passant par le point B coupe (AC) en H.
5. À l'aide de l'aire du triangle ABC, en déduire la longueur BH.
6. Calculer alors la longueur CH.

82 Dans un cercle

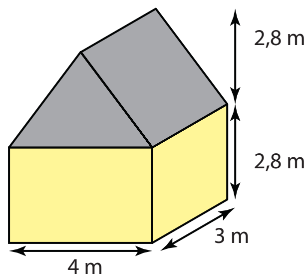
1. Quelle est la médiatrice du segment [OB] ?
Justifier.
2. Expliquer pourquoi OD = DB = OB.



3. Justifier la nature du quadrilatère ODBC.

83 Maquette d'un abri de jardin

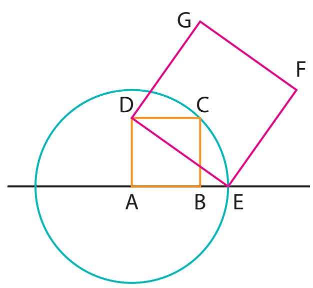
Un abri de jardin est représenté en perspective cavalière.



1. Construire le patron d'une maquette de cet abri à l'échelle 1/100^{e}.
2. Calculer son volume.

84

ABCD est un carré de côté 10.
On trace le cercle de centre A et passant par le point C.
Le point E est l'intersection du cercle avec la droite (AB).
On construit le carré DEFG.



1. Calculer la longueur AC.
2. En déduire la longueur DE.
3. Montrer que l'aire du carré DEFG est le triple de l'aire du carré ABCD.

Exercices d'approfondissement

85 Sur la piste…

On considère un segment [AB] de longueur 6 cm.
Déterminer l'ensemble des points M du plan qui sont à une distance de 3 cm du segment [AB]

86 Appartenance ou pas

1. Le point A(2 ; 3) appartient-il au cercle de centre C (5 ; 7) et de rayon 5 ?

2. Le point B(9 ; 1) appartient-il à la médiatrice du segment [AC] ?

3. Le point D(7 ; 4) est le milieu du segment [BC] ?

4. Le point E(–5 ; 5) appartient-il à la droite (AB) ?

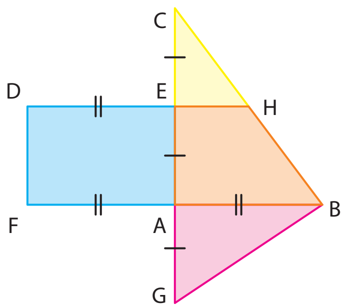
87 Repères non orthonormés

On considère un parallélogramme ABCD. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [AD]. On considère le repère (A ; B, D).
1. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Démontrer alors que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

Remarque Ce résultat est toujours vrai, il s'agit du théorème de Varignon.

88 Changement de repère

Sur la figure ci-contre, les segments de même longueur sont codés.
Déterminer les coordonnées de tous les points de la figure :
a) dans le repère (A ; B, C).
b) dans le repère (F ; D, A).



89 Une équivalence Logique

On considère trois points A, B et M non alignés.
Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- Le point I est le milieu du segment [AB].
- Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ dans le repère (M, A, B) quelle que soit la position du point M.

90 Enroulement cylindrique

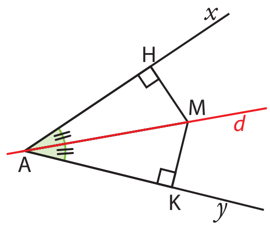
On considère une feuille de longueur L et de largeur ℓ. Déterminer lequel des deux cylindres a le plus grand volume : celui quand on enroule la feuille selon sa largeur ou bien celui où on enroule la feuille selon sa longueur.

91 Bissectrice

Soit deux demi-droites [Ax) et [Ay) de même origine A et une droite d qui coupe l'angle $\widehat{xAy}$ en deux angles égaux

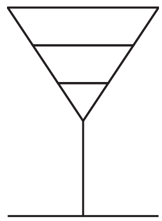
Remarque Cette droite s'appelle la bissectrice de l'angle $\widehat{xAy}$.

On place un point M sur cette droite d et on construit les projetés orthogonaux H et K de M sur les deux demi-droites.
1. Exprimer la longueur MH en fonction de la longueur AM et d'un angle
2. Exprimer la longueur MK en fonction de la longueur AM et d'un angle
3. Comparer alors les longueurs MH et MK
4. En déduire une caractérisation de la bissectrice d'un angle en tant qu'ensemble de points.



92 Masses volumiques Physique-Chimie

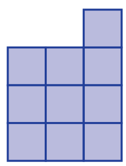
Dans un verre à pied de forme conique, on verse un volume de mercure, un volume d'eau et un volume d'huile de telle manière que l'épaisseur de chacun des liquides dans le verre soit la même.



1. Sachant que la masse volumique du mercure est 13,59 g/cm^3, celle de l'eau 1 g/ cm^3 et celle de l'huile 0,9 g/cm^3, déterminer la masse de chacun des trois liquides dans le verre.
2. Classer les trois liquides de la masse la plus importante à la masse la plus faible et schématiser la superposition obtenue. On représentera l'huile en jaune, le mercure en gris et l'eau incolore.

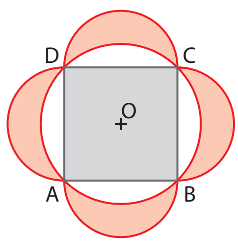
93 Découpage astucieux

Recopier la figure ci-contre sur du carton. Chaque carré a pour côté 1 cm.
Découper la figure obtenue en faisant seulement deux coups de ciseaux et recoller les morceaux pour obtenir un nouveau carré.



94 Surface de croissants

ABCD étant un carré de centre O et de côté a, calculer en fonction de a l'aire de la surface coloriée en rouge comprise entre le cercle de centre O et les demi-cercles de diamètres [AB], [BC], [CD] et [DA].



95 Coordonnées du symétrique d'un point

Les coordonnées des points M(x ; y) et I(x_I ; y_I) sont considérées comme données.
Démontrer que les coordonnées du point M′(x' ; y') symétrique du point M par rapport au point I sont données par :

$$\begin{cases} x' = 2x_I - x \\ y' = 2y_I - y \end{cases}$$

96 Somme constante

On place un point M quelconque à l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC. Démontrer que la somme des distances du point M aux côtés du triangle reste constante et est égale à la longueur de la hauteur du triangle ABC.

97 Identification d'un quadrilatère

On considère les points A(2 ; $\sqrt{2}$), B(1 ; –2), C($-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$) et D($-1-\sqrt{2}$; –1)

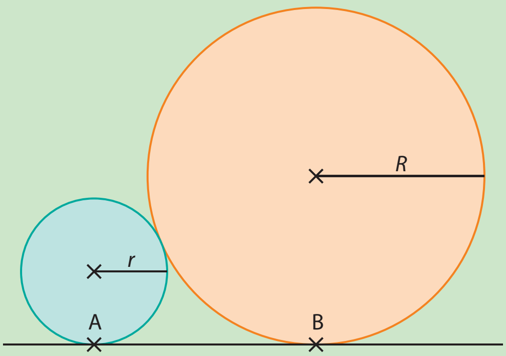
1. Faire une figure et conjecturer la nature du quadrilatère ABDC.
2. Calculer les longueurs AB, BD, CD et AD.
3. Peut-on alors conclure sur la nature du quadrilatère ABDC ?
4. Quelles sont les deux longueurs à calculer pour pouvoir conclure ?
Vérifier.
5. Déterminer les coordonnées du centre du quadrilatère ABCD.

Vers la 1re

Orientation

98 Spécialité Maths

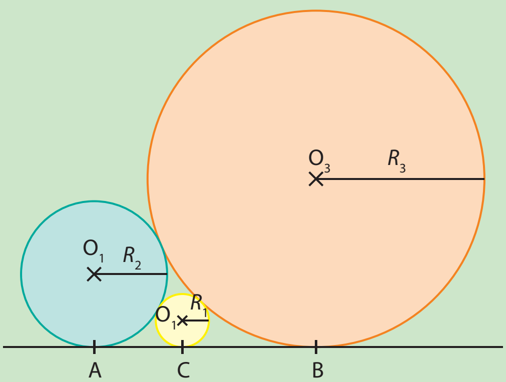
Deux cercles sont tangents à une droite (AB) et également entre eux. Leurs rayons respectifs sont r et R.
Montrer que $AB^2 = 4\,r\,R$



99 Spécialité Maths

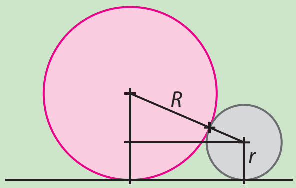
On insère un troisième cercle entre les deux premiers qui est aussi tangent à la droite et tangent aux deux premiers cercles. On note R_1, R_2 et R_3 les rayons des trois cercles de centres respectifs O_1, O_2 et O_3.
À l'aide de l'exercice précédent, montrer que :

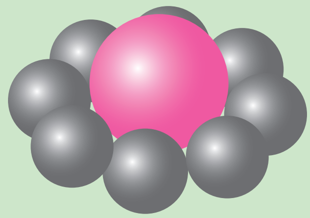
$$\frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$



100 Spécialité Maths

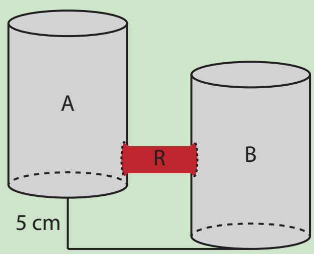
On dispose une sphère de rayon R et huit autres sphères de rayon r sur une table selon les figures suivantes.
Montrer que $\dfrac{R}{r} = 2 - \sqrt{2}$





101 STI

On considère deux vases A et B qui sont deux cylindres identiques de hauteur 25 cm. Le fond du vase A est situé 5 cm au-dessus de celui du vase B. Ces deux vases communiquent par un tuyau muni d'un robinet R. Le vase A est rempli d'eau, le vase B est vide et le robinet R est fermé.
On ouvre maintenant le robinet R. Une partie du liquide contenu dans le vase A vient donc remplir le vase B. Ce mouvement s'arrêtera lorsque les surfaces libres du liquide dans les deux vases seront sur un même plan horizontal.
Quelle sera alors la hauteur de l'eau contenue dans le vase B ?



Travaux pratiques

TICE Démonstration Raisonner, Communiquer 20 min

1 L'intersection des hauteurs d'un triangle

A ▶ Construction des hauteurs d'un triangle

1. À l'aide de GeoGebra, construire les trois hauteurs d'un triangle ABC.
2. Vérifier en faisant varier les points A, B et C que ces trois droites sont toujours concourantes.

B ▶ Concourance des hauteurs

Dans un triangle ABC, on admet que les hauteurs issues de A et de B se coupent en un point H.
1. Construire la droite d_1 parallèle à la droite (AC) passant par B, puis la droite d_2 parallèle à (BC) passant par A et la droite d_3 parallèle à (AB) passant par C.
On notera M le point d'intersection des droites d_1 et d_3, N le point d'intersection de d_2 et d_3 et P le point d'intersection de d_1 et d_2.
2. Démontrer que les droites (AH) et (BH) sont les médiatrices respectivement des segments [NP] et [MP].
3. En déduire que le point H est équidistant des points M, N et P.
4. En déduire que le point H appartient à la médiatrice du segment [MN].
5. En déduire que le point H appartient à la hauteur issue de C dans le triangle ABC.
6. Conclure.

Chercher, Communiquer 15 min

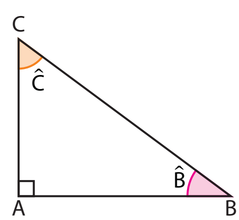
2 Formule d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC quelconque tel que le point H projeté orthogonal de A appartienne au segment [BC].
1. Dans le triangle rectangle ABH, exprimer BH^2 en fonction de AB et de AH.
2. Dans le triangle rectangle ACH, exprimer CH^2 en fonction de AC et de AH.
3. À l'aide d'une identité remarquable, montrer que : $CH^2 = BH^2 + BC^2 - 2 \times BH \times BC$.
4. En déduire l'expression de BH en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC à l'aide des questions **1.** et **2.**
5. Dans le triangle rectangle ABH, exprimer $\cos\hat{B}$ en fonction de BH et de AB.
6. En déduire la formule d'Al Kashi dans un triangle quelconque : $\cos\hat{B} = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BC \times AB}$
7. Cas particulier : quand le triangle est rectangle en B, en déduire la valeur de $\cos\hat{B}$.

Démonstration Chercher, Communiquer 10 min

3 Relation trigonométrique

On considère un triangle ABC rectangle en A .
1. Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle $\hat{B}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
2. Exprimer le cosinus et le sinus de l'angle $\hat{C}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
3. Quelles égalités remarque-t-on ? Et quelle relation a-t-on entre ces deux angles ?
4. Calculer $(\cos\hat{B})^2 + (\sin\hat{B})^2$ en fonction des longueurs des côtés du triangle
5. En utilisant le fait que le triangle est rectangle en A, simplifier cette expression.



Remarque Cette relation est vraie quelle que soit la valeur des angles.

Histoire des maths | TICE | Chercher Représenter | 30 min

4 Quadrature du cercle

Le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan (1887-1920) a proposé une solution approchée au problème (qui n'a pas de solution exacte) de la quadrature du cercle.
Selon ses instructions, réaliser les constructions qui suivent à l'aide de GeoGebra.

1. Placer un point nommé O.

2. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. Placer un diamètre [AB] de ce cercle.

3. Sur le segment [OB], placer le point C tel que : $OC = \frac{2}{3}OB$

4. D'un même côté de la droite (AB), placer les points suivants.
a) Le point D intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec la perpendiculaire en C à (AB).
b) Le point E du cercle $\mathscr{C}$ tel que BE = CD.
c) Les points O′ et C′ projetés orthogonaux des points O et C sur la droite (AE).

5. De l'autre côté de la droite (AB), placer les points suivants.
a) Le point F du cercle $\mathscr{C}$ tel que AF = AO′.
b) Le point G sur la perpendiculaire en A à (AB) tel que AG = O′C′.
c) Le point H milieu du segment [OA].
g) Le point I de [BF] tel que BI = BH.
h) Le point J intersection de (BG) avec la parallèle à (GF) passant par I.
i) Finir en traçant le carré de côté [BJ].

6. Quelle est l'aire du carré de côté [BJ] ?

7. Comparer ce nombre au nombre π.

TICE | Démonstration | Chercher Raisonner | 20 min

5 Intersection des médiatrices dans un triangle

A ▶ Construction des médiatrices d'un triangle

1. À l'aide de GeoGebra, construire un triangle ABC quelconque.
2. Construire les médiatrices de chacun des côtés du triangle.
3. Que remarque-t-on ?
Faire varier les points A, B et C pour confirmer cette conjecture.
4. Tracer le cercle passant par les trois sommets du triangle et faire afficher son centre.
5. Que peut-on conclure ?

B ▶ Concourance des médiatrices

1. Justifier que les médiatrices des côtés [AB] et [AC] sont sécantes en un point noté O.
2. Que peut-on en déduire pour les longueurs OA, OB et OC ?
3. En déduire que O appartient à la médiatrice du côté [BC].
4. Que peut-on conclure sur le cercle passant par les trois sommets du triangle ?

Remarque Ce cercle s'appelle le cercle circonscrit au triangle.

C ▶ Cas du triangle rectangle

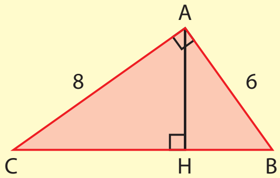
1. Faire varier les points pour que le triangle ABC soit rectangle.
2. Que peut-on conclure sur le centre du cercle circonscrit dans ce cas ?

En autonomie

1 Calculer des longueurs, des angles, des aires et des volumes

QCM

Pour les exercices 102 à 105, on utilise la figure suivante.



102 La longueur du côté [BC] vaut :

a 7 b 14 c 10 d 100

103 La longueur de la hauteur [AH] est :

a 2 b 4,8 c 2,4 d 4

104 Le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ vaut :

a 0,8 b 0,6 c $\frac{4}{3}$ d $\frac{3}{4}$

105 L'angle $\widehat{ABC}$ est égal à l'angle :

a $\widehat{BAC}$ b $\widehat{HAC}$ c $\widehat{HAB}$ d $\widehat{BAC}$

Pour les exercices 98 à 101, on utilise le cube suivant de côté 6 où J et K sont les milieux des arêtes [EH] et [GH].

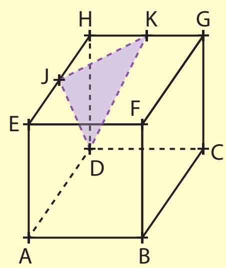
106 Le triangle DJK est :

a rectangle.

b isocèle.

c équilatéral.

d quelconque.



107 Dans la pyramide DJHK, si on prend comme base JHK alors la hauteur mesure :

a 3 b 2 c 6 d $\sqrt{6}$

108 Le volume de la pyramide DJHK vaut :

a 27 b 54 c 9 d 18

109 Les côtés du triangle DJK mesurent :

a 18 et 45 b $3\sqrt{2}$ et $3\sqrt{5}$

c 4, 5 et 6 d 3 et 6

110 ✶ On considère un triangle ABC quelconque et H le projeté orthogonal de A sur [BC] avec AH = 4, BH = 6 et CH = 3.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

2. Le triangle ABC est-il rectangle ?

111 ✶✶ On considère un parallélogramme ABCD et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).

1. Faire une figure avec AB = 8, AD = 4 et AH = 2.

2. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ADH}$.

3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{ADC}$.

4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

112 ✶✶ On considère un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que : AB = 10, BC = 3 et AE = 2.

1. Calculer le volume de la pyramide ABCDH de base ABCD et de sommet H.

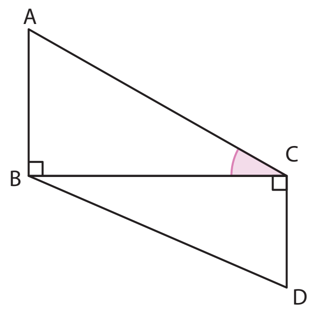
2. Calculer le volume de la pyramide ABDH de base ABD et de sommet H

113 ✶✶ ABCD est un rectangle de longueur AB = 8 et de largeur BC = 6. On appelle H le projeté orthogonal de B sur la diagonale [AC].

1. Calculer la longueur de la hauteur BH.

2. On construit le point K tel que AHBK soit un rectangle. Calculer son aire.

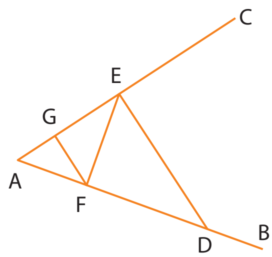
114 ✶✶ Le triangle ABC est rectangle en B et le triangle BCD est rectangle en C.
De plus, CD = 3,7, AC = 8 et $\widehat{CBD} = 32°$.



1. Déterminer la longueur BC.

2. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{BCA}$.

115 ✶✶ Sur deux segments [AB] et [AC], on place les points D, E, F et G tels que : AB = AC = 9, AD = 7, AE = 4,2, AF = 2,5 et DE = 6. De plus les droites (DE) et (FG) sont parallèles.



1. Le triangle ADE est-il rectangle ? Justifier.

2. Calculer la longueur FG.

2 Calculer avec des coordonnées

QCM

Pour les questions 116 à 123 les points A(3 ;–2), B(–2 ; –1), C(2 ; 6) et D(–1 ; 4).

116 Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées :

a $(1 ; -1)$ b $\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ c $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{2}\right)$ d $\frac{26}{4}$

117 La longueur du segment [CD] est :

a $\sqrt{101}$ b $\sqrt{13}$ c $\sqrt{5}$ d $\left(\frac{1}{2} ; 5\right)$

118 Le triangle ABC est :

a rectangle b équilatéral
c isocèle d quelconque

119 Le cercle de centre D passant par A a pour rayon :

a $2\sqrt{13}$ b $13\sqrt{2}$ c $2\sqrt{2}$ d 4

120 Le triangle ABD est :

a rectangle b isocèle
c équilatéral d quelconque

121 Les coordonnées du point E milieu du segment [BC] sont :

a $\left(0 ; \frac{5}{2}\right)$ b $(4 ;7)$ c $(-4 ; -7)$ d 2,5

122 Les points A, E et D vérifient :

a E milieu de [AD].
b E, A et D sont alignés.
c EAD est un triangle rectangle
d EAD est un triangle équilatéral

123 Le point G(1 ;1) est le centre d'un cercle passant par :

a A, B et C b B, C et D
c A, B et D d A, C et D.

Dans cette partie, on se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J)

124 ✶ On considère un triangle ABC tel que : A(–3 ; 1), B(7 ; 1) et C(1 ; 4).
Le point H a pour coordonnées (1 ; 1).

1. Montrer que les triangles ACH et BCH sont rectangles.

2. Calculer les valeurs des angles $\widehat{CAH}$ et $\widehat{CBH}$.

3. En déduire que le triangle ABC n'est pas rectangle.

125 ✶✶ On considère les points A(–2 ; 1), B(6 ; 1), C(9 ; 4) et H(–2 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2. Démontrer que le triangle ACH est rectangle.

3. En déduire que H appartient à la droite (CD).

4. Calculer l'aire du parallélogramme ABCD.

126 ✶✶ On considère les points A(3 ; –2) et B(0 ; 3). Déterminer les coordonnées du point C tel que B soit le milieu du segment [AC].

127 ✶✶ On donne les points D (–3 ; –1) et E (1 ; –2). Déterminer les coordonnées du point F symétrique du point D par rapport au point E.

128 ✶✶ On considère les points $M\left(\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4}\right)$, $A\left(\frac{4}{5} ; \frac{7}{3}\right)$ et $T\left(-\frac{5}{6} ; \frac{2}{3}\right)$.

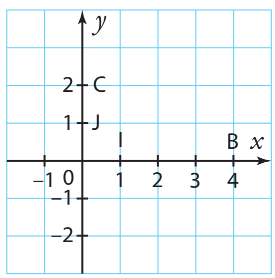
1. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [MT].

2. Déterminer les coordonnées du point H tel que MATH soit un parallélogramme.

129 ✶✶ On considère les points A(–3 ; –4), B(–1 ; 2), C(3 ; 2) et D(5 ; 0)

Démontrer que le cercle de diamètre [AD] passe par les points B et C.

130 ✶✶ On considère les points I(1 ; 0), B(4 ; 0) et C(0 ; 2). On appelle *d* la médiatrice du segment [IB]. La perpendiculaire à l'axe des ordonnées passant par C coupe la droite *d* en un point noté H.



1. Donner les coordonnées du point H.

2. On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre H passant par I. Montrer que B appartient au cercle.

3. Montrer que l'axe des ordonnées est tangent en C au cercle $\mathscr{C}$, c'est à dire que l'axe coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point et qu'il est perpendiculaire au rayon en ce point.