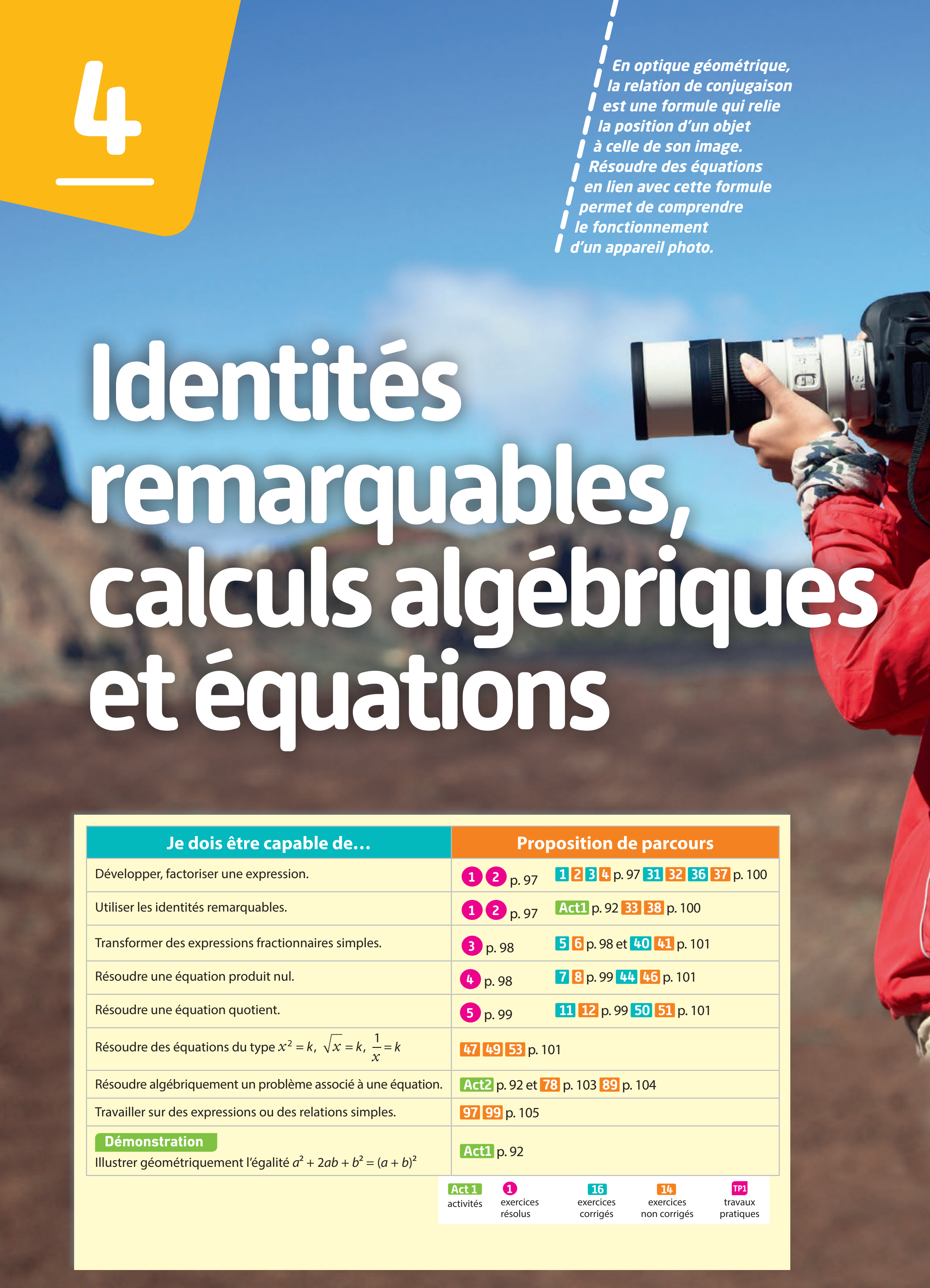


4

En optique géométrique, la relation de conjugaison est une formule qui relie la position d'un objet à celle de son image. Résoudre des équations en lien avec cette formule permet de comprendre le fonctionnement d'un appareil photo.

Identités remarquables, calculs algébriques et équations

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Développer, factoriser une expression.	1 2 p. 97 — 1 2 3 4 p. 97 31 32 36 37 p. 100
Utiliser les identités remarquables.	1 2 p. 97 — Act1 p. 92 33 38 p. 100
Transformer des expressions fractionnaires simples.	3 p. 98 — 5 6 p. 98 et 40 41 p. 101
Résoudre une équation produit nul.	4 p. 98 — 7 8 p. 99 44 46 p. 101
Résoudre une équation quotient.	5 p. 99 — 11 12 p. 99 50 51 p. 101
Résoudre des équations du type $x^2 = k$, $\sqrt{x} = k$, $\frac{1}{x} = k$	47 49 53 p. 101
Résoudre algébriquement un problème associé à une équation.	Act2 p. 92 et 78 p. 103 89 p. 104
Travailler sur des expressions ou des relations simples.	97 99 p. 105
Démonstration Illustrer géométriquement l'égalité $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	Act1 p. 92

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-07

1. Repérer des formes développées

Parmi les expressions suivantes, chercher celles qui sont écrites sous forme développée et réduite.

$A = 4 + 2(5x - 7)$ $B = 4x^2 + 3x - 2$ $C = (x + 1)(4 + x)$ $D = 1 + x + x^3$

2. Développer des expressions

Développer, réduire puis ordonner les expressions suivantes.

$A = 4(5x - 7)$ $B = -2x(3 - 5x)$ $C = (x + 3)(4 + x)$ $D = (-2x + 4)(5 - 3x)$

3. Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation

1. 5 est-il solution des équations suivantes ?

a) $-16 + 3x = -2x + 9$ **b)** $x^2 + 5 = 0$ **c)** $(x - 5)(x + 7) = 0$

2. -2 est-il solution des équations suivantes ?

a) $9 + 3x = -2x + 1$ **b)** $-2x^2 + 8 = 0$ **c)** $2x(6x - 4) = 0$

4. Résoudre des équations du 1er degré

Résoudre les équations suivantes.

a) $7x + 21 = 0$ **b)** $-3x + 5 = 9 - 5x$ **c)** $3x = 0$ **d)** $\frac{2}{3}x = 5$

5. Calculer avec des fractions

Sans calculatrice, exprimer sous la forme d'une seule fraction :

a) $5 + \frac{2}{3}$ **b)** $2 - \frac{1}{7}$

6. Chercher des antécédents

On considère une fonction f définie par $f(x) = 2x + 6$ pour tout nombre réel x. Déterminer les éventuels antécédents par la fonction f de :

a) 2 **b)** 0 **c)** $\frac{15}{2}$

7. Utiliser un tableur TICE

Sur tableur, on a obtenu la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D
1	x	3x	x^2-2	x^2+3x-2
2	0	0	-2	-2
3	1	3	-1	2
4	2	6	2	8
5	3	9	7	16
6	4	12	14	26
7	5	15	23	38
8	6	18	34	52
9	7	21	47	68

Remarque $x \wedge 2$ signifie x^2.

Pour obtenir cette feuille de calcul par recopie vers le bas, quelles formules peut-on saisir en :

a) B2 ? **b)** C2 ? **c)** D2 ?

Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 95, 96, 102, 104, 107

Algo & Prog
p. 92, 93, 103, 104, 106, 107, 108

TICE
p. 91, 102, 109

Les autres disciplines
p. 103, 105, 107

Problème ouvert
p. 92, 93, 104

Activités

1 Découvrir les identités remarquables

TICE — 40 min

Ethan doit développer l'expression $(x+3)^2$. Il écrit alors $(x+3)^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9$.
Voici une copie d'écran d'une feuille de tableur.

	A	B	C	D
1	x	(x+3)²	x²+9	(x+3)²-(x²+9)
2	-2	1	13	-12
3	-1	4	10	-6
4	0	9	9	0
5	1	16	10	6
6	2	25	13	12
7	3	36	18	18
8	4	49	25	24
9	5	64	34	30
10	6	81	45	36
11	7	100	58	42

1. En observant cette feuille de calcul, que peut-on dire du développement d'Ethan ?

2. Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B2, C2 et D2 pour obtenir cette feuille de calcul par recopie vers le bas ?

3. Conjecturer une relation entre x et $(x+3)^2 - (x^2+9)$ (c'est-à-dire entre les colonnes A et D) puis recopier et compléter la conjecture sur la forme développée de $(x+3)^2$:

$$(x+3)^2 = x^2 + 9 + \ldots.$$

4. Développer l'expression $(x+3)^2$ sachant que $(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$.

5. Cela valide-t-il votre conjecture ?

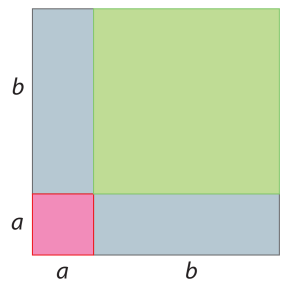
6. Développer l'expression $(a+b)^2$.

Remarque L'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ou dans l'autre sens $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ est une identité remarquable, c'est-à-dire une égalité qui est vraie pour n'importe quels nombres réels a et b et qui permet de développer ou factoriser facilement.

7. Développer l'expression $(a-b)^2$ pour obtenir une deuxième identité remarquable.

8. Développer l'expression $(a+b)(a-b)$ pour obtenir une troisième identité remarquable.

9. On considère la figure ci-contre.



a) Justifier que l'aire du grand carré est $(a+b)^2$.

b) Exprimer les aires de chacun des rectangles et carrés colorés en fonction de a et b.

c) Quelle identité remarquable vue plus haut vient-on d'expliquer graphiquement ?

↳ Cours 1 p. 94

2 Résoudre algébriquement un problème avec une équation

Problème ouvert — Algo & Prog — 45 min

Le professeur donne des programmes de calcul à étudier à ses élèves puis leur demande de tester des nombres mais Kader et Sophie n'en font qu'à leur tête !

```
Programme de Kader
▸ Choisir un nombre.
▸ Calculer son double.
▸ Additionner 4.
```

```
Programme de Sophie
▸ Choisir un nombre.
▸ Calculer son triple.
▸ Soustraire 7.
```

1. Ils veulent choisir le même nombre et obtenir le même résultat.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

2. Ils veulent choisir des nombres opposés (x et $-x$) et obtenir le même résultat.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

3. Ils veulent choisir le même nombre et que le produit de leurs résultats soit nul.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

4. Ils veulent choisir le même nombre et que les résultats de leurs programmes aient le même carré.
Quel(s) nombre(s) peuvent-ils choisir ?

↳ Cours 2 p. 95

Algo & Prog — 25 min

3 Travailler avec une expression fractionnaire

On considère l'expression $A = \dfrac{3x + 12}{x + 2}$.

1. Calculer A pour $x = 2$ et pour $x = -3$.

2. a) Peut-on calculer A pour $x = -2$?

b) D'après-vous, existe-t-il d'autres nombres pour lesquels on ne peut pas calculer A ?

3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir le résultat ci-contre.

simplifier(3+6/(x+2))	$\dfrac{3x+12}{x+2}$
simplifier(3+4/(x+2))	$\dfrac{3x+10}{x+2}$

a) Conjecturer une autre écriture de A pour tout nombre $x \neq -2$.

b) En utilisant une mise au même dénominateur, justifier que $3 + \dfrac{6}{x + 2} = A$ pour tout $x \neq -2$.

↪ Cours 1 p. 94

30 min

4 Résoudre des équations quotients

On considère les équations suivantes d'inconnue réelle.

① $(x - 2)(2x + 1) = 0$ ② $5x - 7 = 3x + 9$ ③ $5x^2 - 10x = 0$

④ $\dfrac{5x + 7}{2} = 0$ ⑤ $5(1 + x) - 3x = -2x + 3$ ⑥ $\dfrac{x + 2}{x - 1} = 0$

⑦ $x^2 - 9 = 0$ ⑧ $\dfrac{3x}{x + 2} = 2$ ⑨ $(2x + 3)^2 = 0$

1. Parmi les équations précédentes quelles sont celles qu'il est possible de résoudre ?

2. On veut résoudre l'équation ⑥.

a) Quelle valeur ne peut pas prendre x ?

b) À quoi doit-être égal le numérateur d'une fraction pour qu'elle soit égale à 0 ?

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$.

3. En trouvant un moyen de se ramener au cas précédent, résoudre l'équation ⑧.

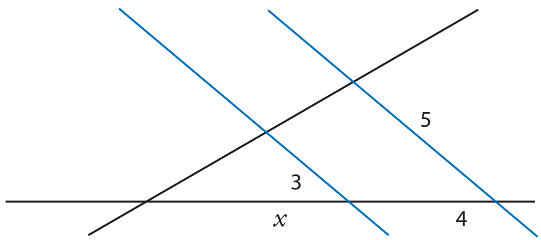
↪ Cours 2 p. 95

Problème ouvert — 25 min

5 Modéliser un problème avec une équation

On considère le schéma ci-contre.

Quelle valeur faut-il donner à x pour que les deux droites bleues soient parallèles ?



↪ Cours 2 p. 95

Cours

1 Calcul algébrique et identités remarquables

Propriété Distributivité

- Pour tous nombres réels a, b et k on a : $k(a+b)=ka+kb$.
- Pour tous nombres réels a, b, c et d on a : $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Remarque Ces règles permettent généralement de **développer** une expression.
La règle de distributivité permet aussi de **factoriser** si un facteur commun est apparent dans une somme, en l'utilisant de la manière : $ka+kb=k(a+b)$.

Exercices résolus 1 et 2 p. 97

Propriété Identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $(a+b)^2 \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} a^2-b^2$

Remarques

- Dans le sens ①, les identités remarquables permettent de **développer** des expressions.
- Dans le sens ②, les identités remarquables permettent de **factoriser** des expressions.

Démonstration

Pour tous nombres réels a et b, on a :

- $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)\,(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

Exemples

① Pour développer : $(x-3)^2=x^2-2\times x\times 3+3^2=x^2-6x+9$ d'après la 2e identité remarquable.

② Pour factoriser : $x^2+2x+1=x^2+2\times x\times 1+1^2=(x+1)^2$ en remplaçant a par x et b par 1 dans l'égalité $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

Exercices résolus 1 et 2 p. 97

Règle Écriture fractionnaire

Les règles de calcul habituelles des quotients comme la mise au même dénominateur peuvent être utilisées pour transformer des expressions fractionnaires si le(s) dénominateur(s) présent(s) dans l'expression est (sont) non nul(s).

Exemple

Pour $x\neq 2$, on a : $2x+\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{2x}{1}+\dfrac{x+1}{x-2}$

$$=\frac{2x(x-2)}{x-2}+\frac{x+1}{x-2}=\frac{2x(x-2)+(x+1)}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-4x+x+1}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-3x+1}{x-2}$$

Exercice résolu 3 p. 98

Remarque on signale au départ que $x\neq 2$. En effet, si on prend $x=2$ le dénominateur $x-2$ du quotient $\dfrac{x+1}{x-2}$ dans le calcul s'annulerait, ce qui n'est pas possible car on ne peut pas diviser par 0.

2 Quelques résolutions algébriques d'équations

Propriété Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est égal à 0.

Exemple

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+1)(x-7)=0$.

$(2x+1)(x-7)=0$ si et seulement si au moins l'un des facteurs vaut 0.

C'est-à-dire : $2x+1=0$ ou $x-7=0 \Leftrightarrow 2x=-1$ ou $x=7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=7$. Donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;7\right\}$.

↪ Exercice résolu 4 p. 98

Propriété Résolution de l'équation $x^2 = k$

On considère l'équation $x^2=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.
- **Si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k=0$, l'équation $x^2=k$ a une seule solution réelle $x=0$.**
- **Si $k>0$, l'équation $x^2=k$ a deux solutions réelles $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$.**

Démonstration

$x^2=k \Leftrightarrow x^2-k=0$.
- Si $k<0$, l'équation $x^2=k$ n'a pas de solution car le carré de tout nombre réel est positif.
- Si $k=0$, on obtient $x^2=0 \Leftrightarrow x\times x=0 \Leftrightarrow x=0$. Il n'y a donc qu'une seule solution : $x=0$.
- Si $k>0$ alors $k=(\sqrt{k})^2$. L'équation est alors équivalente à $x^2-(\sqrt{k})^2=0$.

Par factorisation en utilisant l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, on obtient :

$$\begin{aligned} x^2=k &\Leftrightarrow (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0 \\ &\Leftrightarrow x+\sqrt{k}=0 \text{ ou } x-\sqrt{k}=0 \\ &\Leftrightarrow x=-\sqrt{k} \text{ ou } x=\sqrt{k}. \end{aligned}$$

Donc si $k>0$, l'équation $x^2=k$ a deux solutions : $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$.

Exemples

① $x^2=64 \Leftrightarrow x=\sqrt{64}$ ou $x=-\sqrt{64} \Leftrightarrow x=8$ ou $x=-8$. Donc $\mathcal{S}=\{-8\,;8\}$.

② Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+4)^2=9$, on utilise la propriété précédente de la manière suivante :

$(2x+4)^2=9 \Leftrightarrow 2x+4=\sqrt{9}$ ou $2x+4=-\sqrt{9}$.

$\Leftrightarrow 2x+4=3$ ou $2x+4=-3 \Leftrightarrow 2x=-1$ ou $2x=-7 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{7}{2}$. Donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{2}\right\}$.

Remarque On peut aussi utiliser une factorisation pour résoudre ce type d'équations.

Propriété Résolution de l'équation $\sqrt{x}=k$

On considère l'équation $\sqrt{x}=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$.
- **Si $k<0$ l'équation $\sqrt{x}=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k\geqslant 0$ l'équation $\sqrt{x}=k$ a une seule solution réelle $x=k^2$.**

Exemple

L'équation $\sqrt{x}=4$ a pour solution $x=4^2=16$.

Cours

Propriété Quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est égal à 0 et son dénominateur est non nul.

Remarque La (les) valeurs pour la(les)quelle(s) le dénominateur s'annule est (sont) appelée(s) **valeurs interdites**. En effet, comme nous ne pouvons pas diviser par 0, le calcul ne peut pas être effectué.

Exemple

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{2x+8}{x-2}=0$, on utilise la propriété : $\dfrac{2x+8}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2x+8=0$ et $x-2 \neq 0$.

Déterminons tout d'abord la (ou les) valeurs interdites.

Pour cela, on résout $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

La valeur interdite est 2 : le dénominateur ne s'annule pas si $x \neq 2$.

$2x+8=0 \Leftrightarrow 2x=-8 \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{2} \Leftrightarrow x=-4$.

Comme -4 n'est pas une valeur interdite, c'est la solution de l'équation : $\mathscr{S}=\{-4\}$.

Exercice résolu 5 p. 99

Remarques

- Dans le cas d'une équation mettant en jeu plusieurs fractions, une mise au même dénominateur peut être utilisée pour obtenir une équation quotient-nul équivalente.
- Une équation du type $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ où A, B, C, et D sont des nombres ou expressions avec x est équivalente à $A \times D = B \times C$ avec B et D différents de 0.

  Cela permet parfois de réécrire l'équation sous condition de valeurs interdites.

Propriété Résolution de l'équation $\dfrac{1}{x}=k$

On considère l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ avec k appartenant à $\mathbb{R}$:

- **Si $k=0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ n'a aucune solution réelle.**
- **Si $k \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=k$ a une seule solution réelle $x=\dfrac{1}{k}$.**

Démonstration

La valeur interdite est 0 : le dénominateur ne s'annule pas si $x \neq 0$.

- Si $k=0$, l'équation $\dfrac{1}{x}=0$ n'a pas de solution car le numérateur 1 ne peut pas s'annuler.
- Si $k \neq 0$ on a : $\dfrac{1}{x}=k \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-k=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}-\dfrac{kx}{x}=0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{1-kx}{x}=0 \Leftrightarrow 1-kx=0$ et $x \neq 0$.

$1-kx=0 \Leftrightarrow 1=kx \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{k}$ car k est non nul.

Exemple

L'équation $\dfrac{1}{x}=6$ a pour solution $x=\dfrac{1}{6}$.