3

Intervalles et inégalités

Suivant la durée d'immersion dans l'eau et la profondeur atteinte, une plongeuse sous-marine doit généralement prévoir des paliers de décompression, c'est-à-dire un découpage de sa remontée vers la surface en intervalles de temps de durées variables à différentes profondeurs afin de réduire le taux d'azote dans les tissus humains.

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Utiliser les intervalles.	1 2 p. 75 1 2 3 4 p. 75 30 31 36 37 p. 78
Utiliser des inégalités.	3 p. 76 5 6 p. 76 39 41 p. 79
Résoudre une inéquation du 1er degré.	4 p. 76 7 8 p. 76 49 52 p. 79
Comparer deux quantités en utilisant leur différence.	5 p. 77 10 11 p. 77 55 56 p. 79
Modéliser un problème par une inéquation.	6 p. 77 12 13 p. 77 61 63 p. 80
Calculer et interpréter des valeurs absolues.	65 67 70 p. 80

Act 1 activités — 1 exercices résolus — 16 exercices corrigés — 14 exercices non corrigés — TP1 travaux pratiques

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 74, 81, 83, 85

Algo & Prog
p. 71, 81, 82, 84

TICE
p. 84, 86, 87

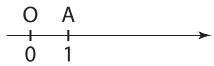
Les autres disciplines
p. 77, 81, 85

Pour prendre un bon départ

Exo — Parcours différenciés Lienmini.fr/maths2-05

1. Placer des nombres sur une droite graduée

Sur la droite graduée ci-contre A a pour abscisse 1. Reproduire cette droite graduée et placer sur celle-ci les nombres suivants.



a) -6 **b)** $3{,}3$ **c)** $-\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$

2. Connaître les symboles liés aux inégalités

Recopier et compléter les phrases suivantes.

a) $2 < 3$ signifie que 2 est **...** à 3.
b) $a \geqslant 0$ signifie que a est **...** à 0.
c) $3 < x$ signifie que 3 est **...** à x.
d) $10 > x$ signifie que x est **...** à 10.
e) $-2 \leqslant x$ signifie que x est **...** à -2.

3. Comparer des nombres

Recopier et compléter par $>$ ou $<$.

a) -4 ... -5 **b)** $5{,}5$ ... -2 **c)** $3{,}142\,5$ ... $3{,}132\,6$
d) $\frac{1}{2}$ ... $\frac{1}{3}$ **e)** $\frac{9}{4}$ ... $\frac{37}{16}$ **f)** $1{,}01$ ... $1{,}005$
g) $2{,}5 \times 10^{-1}$ ... 0 **h)** $-a$ ... a avec $a > 0$ **i)** $-a$ ... a avec $a < 0$.

4. Résoudre des équations

Résoudre les équations suivantes.

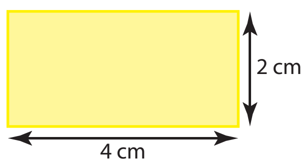
a) $-2x + 6 = 19$ **b)** $4x - 5 = x + 10$

5. Évaluer et comparer

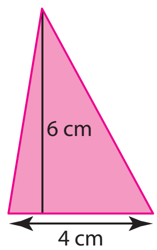
On considère l'expression $A = 5x - 3$.
Peut-on dire que le résultat de A est supérieur ou égal à 2 si on remplace x :
a) par 2 ? **b)** par 0 ? **c)** par -3 ?

6. Calculer des aires et des périmètres

1. Donner le périmètre et l'aire d'un rectangle de longueur 4 cm et de largeur 2 cm.



2. Donner l'aire d'un triangle de base 4 cm et de hauteur 6 cm.



7. Développer une expression

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

$A = 5(2x + 3) - 2x$ $B = -3(x + 6)$ $C = -4(6 - 2x) + 2x + 7$

Doc — Corrigés Lienmini.fr/maths2-27

Activités

1 Introduire la notation d'intervalle

15 min

Observer les deux exemples de notation suivants.

① x est compris entre 3 exclu et 5 inclus.	3 5	$3 < x \leqslant 5$	$x \in]3 ; 5]$

② x est supérieur ou égal à 2.	2	$x \geqslant 2$	$x \in [2 ; +\infty[$

Notation On appelle intervalle les ensembles de nombres notés $]3 ; 5]$ et $[2 ; +\infty[$.

Regrouper ensemble les éléments du tableau qui représentent un même intervalle.

Coup de pouce Il y a 5 intervalles. Chacun est représenté par une combinaison de 4 numéros (un orange, un vert, un bleu, un rouge).

Inégalité	Schéma	Phrase	Notation d'intervalle
1 $0 < x \leqslant 6$	6 ; −5	11 x est compris entre 0,5 exclu et 10 exclu	16 $x \in [0 ; 6]$
2 $0 \leqslant x \leqslant 6$	7 ; 0 ; 6	12 x est compris entre 0 exclu et 6 inclus	17 $x \in]-\infty ; 3]$
3 $0{,}5 < x < 10$	8 ; 3	13 x est supérieur à −5	18 $x \in]0 ; 6]$
4 $x > -5$	9 ; 0 ; 6	14 x est compris entre 0 inclus et 6 inclus	19 $x \in]-5 ; +\infty[$
5 $x \leqslant 3$	10 ; 0,5 ; 10	15 x est inférieur ou égal à 3	20 $x \in]0{,}5 ; 10[$

Cours 1 p. 78

2 Manipuler des inégalités

20 min

1. Recopier et compléter les pointillés noirs avec les résultats des calculs puis les pointillés colorés avec les symboles $<$ ou $>$.

a) $3 < 6$; +2 ; +2 ; 5 ... 8

b) $1 < 3$; −4 ; −4 ; ... ...

c) $4 > -2$; +10 ; +10 ; ... ...

2. Écrire une conjecture en recopiant et en choisissant la bonne expression dans la phrase ci-contre.

Si on additionne ou soustrait un même nombre réel à chacun des membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.

3. Utiliser cette règle pour recopier et compléter les schémas suivants.

a) $x \geqslant 4$; +5 ; +5 ; $x + 5$ ... ...

b) $t > 1$; −2 ; −2 ; $t - 2$ ... ...

c) $0 \leqslant x \leqslant 2$; +... ; +... ; ... ... $x + 7$ ... ...

4. a) Selma dit que si elle choisit un nombre supérieur ou égal à 3 et qu'elle le multiplie par 2 alors le résultat sera supérieur ou égal à 6. Hari dit que s'il choisit un nombre supérieur à 4 et qu'il le multiplie par −3 alors le résultat est supérieur à −12. Qui semble avoir raison ? Qui semble avoir tort ?

b) Écrire une conjecture en recopiant et en choisissant les bonnes expressions dans les phrases ci-contre.

- Si on multiplie par un même nombre strictement positif les membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.
- Si on multiplie par un même nombre strictement négatif les membres d'une inégalité alors le sens de l'inégalité *change/ne change pas*.

Cours 2 p. 73

3 Résoudre une inéquation

40 min

1. On considère l'inéquation $2x + 3 \geqslant 10$ d'inconnue réelle x.
Cette inéquation est une inéquation du 1^er^ degré.

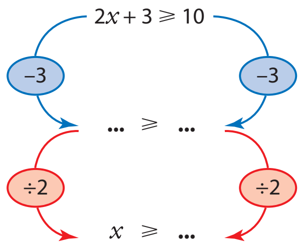
a) Montrer que 5 est solution de l'inéquation $2x + 3 \geqslant 5$.

b) Trouver trois autres nombres solutions de cette inéquation.

c) Recopier et compléter la résolution ci-contre.

d) Quelles sont les solutions ? Proposer plusieurs écritures.

e) Vérifier que les trois nombres proposés à la question **b)** appartiennent bien à cet ensemble des solutions.



2. De la même façon, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $4x - 6 \leqslant -26$

b) $-3x + 5 \geqslant 32$

c) $2x + 17 < x - 1$

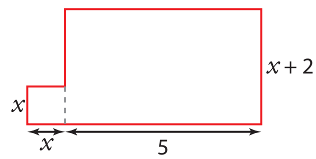
Coup de pouce Pour résoudre une inéquation de degré 1, on s'appuie sur les techniques de résolution d'une équation du 1^er^ degré en utilisant les règles de manipulation des inégalités.

Cours 2 p. 73

4 Modéliser par une inéquation

25 min

On considère la figure ci-contre. Les longueurs sont exprimées en cm.



1. On veut que le périmètre de la figure soit supérieur ou égal à 32 cm. Écrire une inéquation caractérisant cette contrainte.

2. Résoudre cette inéquation et donner l'ensemble des valeurs de x pour que le périmètre soit supérieur ou égal à 32 cm.

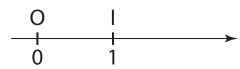
Cours 2 p. 74

5 Découvrir la valeur absolue

Algo & Prog

25 min

1. Tracer un axe muni d'une origine O et d'une graduation comme ci-contre.



Placer dans ce repère les points A(3), B(–2), $C\left(\frac{7}{2}\right)$ et D(–1,3).

2. Déterminer les distances OA, OB, OC et OD.

3. Recopier et compléter le programme ci-contre pour qu'il demande l'abscisse d'un point M, calcule et affiche la valeur de la distance OM.

```
x=float(input("Saisir l'abscisse de M:"))
if x>=...:
    distance = ...
    print("La distance OM est égale à", distance)
else:
    distance = ...
    print("La distance OM est égale à", distance)
```

4. Pour toute valeur de x saisie, la valeur égale à la distance OM affichée est appelée la valeur absolue de x et est notée $|x|$. Déterminer $|5|$, $|-3,4|$ et $|2 - \pi|$.

Cours 3 p. 74

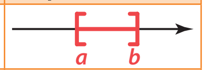
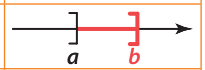
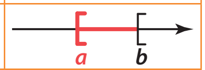
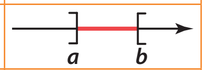
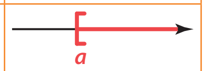
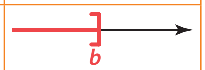
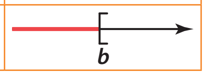
Cours

1 Intervalles

Définition Intervalle

L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé intervalle et se note [a ; b]. a et b sont les bornes de l'intervalle.

Notation On peut définir d'autres types d'intervalles à l'aide du tableau suivant.

Ensemble des réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty; b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty; b[$	

Remarques

- $-\infty$ et $+\infty$ se disent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». Le crochet est toujours vers l'extérieur en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\,;+\infty[$. L'ensemble des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\,;+\infty[$ et l'ensemble des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty; 0]$.

Exemples

L'ensemble des nombres réels :

- compris entre 2 (inclus) et 5 (inclus) est noté [2 ; 5].
- inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty; 10]$.
- supérieurs (strictement) à 4 s'écrit $]4\,;+\infty[$.
- compris entre –6 (exclu) et 2 (inclus) s'écrit]–6 ; 2].

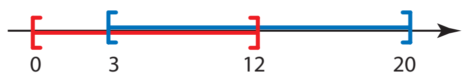
Exercice résolu 1 p. 75

Définition Intersection et réunion de deux intervalles

- **L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∩ J qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J.**
- **La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∪ J qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J.**

Exemple

En prenant I = [0 ; 12] et J = [3 ; 20] :



- l'intersection de I et J est I ∩ J = [3 ; 12] (c'est l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I et à J, ici l'endroit où se superposent le bleu et le rouge).
- la réunion de I et J est I ∪ J = [0 ; 20] (c'est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J, ici l'endroit où l'on a de la couleur : du rouge d'abord, puis du bleu et du rouge superposés, et enfin du bleu).

Exercice résolu 2 p. 75

Remarque On a $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0\,;+\infty[$.

2 Inégalités, inéquations et modélisation

Règle Manipulation des inégalités

a, b, c et k sont des nombres réels.

• Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a + c < b + c \text{ et } a - c < b - c.$$

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k > 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka < kb \text{ et } \frac{a}{k} < \frac{b}{k}.$$

• Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.

$$\text{Si } k < 0 \text{ et } a < b \text{ alors } ka > kb \text{ et } \frac{a}{k} > \frac{b}{k}.$$

Remarque Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou des encadrements.

Exemple

Si $a < 10$ alors $-6a > (-6) \times 10$ en multipliant par (-6) (qui est strictement négatif) donc $-6a > -60$.

Exercice résolu 3 p. 76

Propriété Inégalité et somme

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$.

Définition Inéquation

**Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues).
Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.**

Remarque Une inéquation de la forme $ax + b < cx + d$ (où x est l'inconnue et a, b, c et d sont des nombres réels avec a et b non tous deux nuls) est appelée **inéquation du 1er degré**.

Exemple

$3x + 4 < 7x + 9$ ou $2x + 6 \geqslant x - 5$ sont des exemples d'inéquations d'inconnue x (qui font partie de la famille des inéquations du 1er degré).

Règles Résolution d'une inéquation du 1er degré

Si on applique l'une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a le même ensemble des solutions.

Remarque On se sert du symbole $\Leftrightarrow$ pour signifier « est équivalent à ».

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x + 2 \geqslant 8 \Leftrightarrow -3x \geqslant 6$ (en soustrayant 2) $\Leftrightarrow x \leqslant -2$ (en divisant par -3).
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\,; -2]$.

Exercice résolu 4 p. 76

Remarque La résolution d'inéquation permet par exemple de comparer des expressions.

Exercice résolu 5 p. 77

Définition Modélisation d'un problème

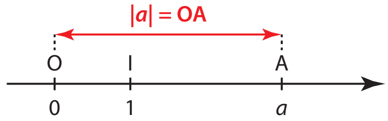
Modéliser un problème par une inéquation, c'est écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème.

Exercice résolu 6 p. 77

3 Valeur absolue d'un nombre réel

Définition Valeur absolue et distance

Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une graduation, on considère un point A d'abscisse a.
La valeur absolue de a, notée $|a|$ est le nombre égal à la distance OA.



Propriété Valeur absolue et signe

La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre $|a|$ tel que $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$

Exemple

On a : $|3| = 3$ et $|-2{,}8| = -(-2{,}8) = 2{,}8$.

Propriété Valeur absolue et racine carrée

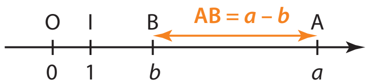
Pour tout nombre réel a, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.

Définition Distance entre deux points

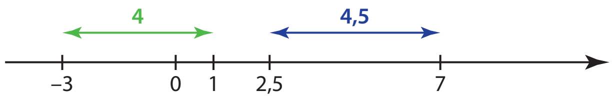
Soit A et B les points d'abscisses a et b sur une droite munie d'une origine et d'une graduation.
On appelle distance entre les réels a et b et la distance AB.

Propriété Distance et abcisses

• Si $a \geqslant b$ alors AB $= a - b$. • Si $a < b$ alors AB $= b - a$.



Exemples



① La distance entre 7 et 2,5 (ou entre 2,5 et 7) est égale à $7 - 2{,}5 = 4{,}5$.

② La distance entre 1 et –3 est égale à $1 - (-3) = 1 + 3 = 4$.

Propriété Distance et valeur absolue

La distance entre a et b est égale à $|a - b|$.

Démonstration

Si $a \geqslant b$ alors AB $= a - b$. De plus $a - b \geqslant 0$ donc $|a - b| = a - b$ et alors AB $= |a - b|$.
Si $a < b$ alors AB $= b - a$. De plus $a - b < 0$, donc $|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$ et alors AB $= |a - b|$.

Propriété Intervalle et valeur absolue

Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[a - r\,;a + r]$ où a est un nombre réel et r un nombre réel strictement positif, alors on a :

$$x \in [a - r\,;a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leqslant r.$$

Dans ce cas le nombre a est appelé centre de l'intervalle et le nombre r rayon de l'intervalle.