Exo Versions interactives Lienmini.fr/maths2-04

1 Utiliser les nombres premiers

Cours 1 p. 46

1. Parmi les nombres suivants, indiquer les nombres premiers et donner une décomposition en produit de facteurs premiers des nombres qui ne sont pas premiers.

a) 373

b) 4 312

c) 1 008

2. Rendre $\dfrac{4\,312}{1008}$ irréductible.

Solution

1. a) $\sqrt{373} \approx 19{,}3$ 1

373 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 qui sont les nombres premiers plus petit que 19,3.
373 est donc un nombre premier.

b) 4 312 est divisible par 2. 4 312 n'est pas un nombre premier.

4 312	2 (4 312 ÷ 2 = 2 156) ⟶ On réitère la procédure avec 2 156.
2 156	2 (2 156 ÷ 2 = 1 078) ⟶ 2 est un diviseur évident.
1 078	2 (1 078 ÷ 2 = 539)
539	7 (539 ÷ 7 = 77)
77	7 (77 = 7 × 11)
11	11 est premier, c'est la fin de la recherche.

$4\,312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

c) 1 008 est divisible par 2. 1 008 n'est pas un nombre premier.

1 008	2 (1 008 ÷ 2 = 504)
504	2 (504 ÷ 2 = 252)
252	2 (252 ÷ 2 = 126)
126	2 (126 ÷ 2 = 63)
63	3^2 ($63 = 3^2 \times 7$)
7	7 est un nombre premier.

$1\,008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$

2. $\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{2^3 \times 7^2 \times 11}{2^4 \times 3^2 \times 7}$ 2

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{7 \times 11}{2 \times 3^2}$

$\dfrac{4\,312}{1\,008} = \dfrac{77}{18}$

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer si un nombre N est premier :
- on utilise les critères de divisibilité pour déterminer les diviseurs évidents de N ;
- on teste si les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{N}$ divisent N.

Soit N n'a aucun diviseur autre que 1 et lui-même : N est premier.

Soit N admet un diviseur premier : N n'est pas premier.

2 Une fraction est irréductible si « elle ne se simplifie plus ». Pour rendre une fraction irréductible, on écrit la décomposition en facteurs premiers du numérateur et dénominateur, puis on utilise les règles de calculs des puissances pour simplifier la fraction. Ici on simplifie la fraction par 2^3 et 7.

À vous de jouer !

1 Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers : 821 ; 861 ; 762 ; 83 ; 1 023 ?

2 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 2 835 **b)** 1 323 **c)** 1 001 **d)** 45 600

3 Simplifier chaque fraction pour obtenir une fraction irréductible.

a) $\dfrac{540}{506}$ **b)** $\dfrac{45\,600}{7\,650}$ **c)** $\dfrac{12\,789}{5\,481}$

Exercices 32 à 38 p. 54

Exercices résolus

2 Calculer avec les puissances

Cours 2 p. 47

Effectuer les calculs suivants.

$A = 2^4 \times 2^{-3}$ $B = \dfrac{3^4}{3^{-7}}$ $C = \dfrac{(-4)^2}{(-4)^6}$

$D = \dfrac{5^{-2} \times 5^{-7}}{5^6}$ $E = \dfrac{(5-2\times 3)^4}{(2-3)^5}$ $F = \dfrac{12 \times 10^4 \times 5 \times 10^6}{15 \times 10^3 \times 2 \times 10^2}$

Solution

$A = 2^4 \times 2^{-3}$ **1**
$A = 2^{4-3}$
$A = 2^1$
$A = 2$

$B = \dfrac{3^4}{3^{-7}}$ **2**
$B = 3^{4-(-7)}$
$B = 3^{11}$

$C = \dfrac{(-4)^2}{(-4)^6}$ **3**
$C = (-4)^{2-6}$
$C = (-4)^4$

$D = \dfrac{5^{-2} \times 5^{-7}}{5^6}$
$D = 5^{-2+(-7)-6}$
$D = 5^{-15}$

$E = \dfrac{(5-2\times 3)^4}{(2-3)^5}$ **4**
$E = \dfrac{(-1)^4}{(-1)^5}$
$E = \dfrac{1}{-1}$ **5**
$E = -1$

$F = \dfrac{12 \times 5 \times 10^{-4+6}}{15 \times 2 \times 10^{3+2}}$ **6**
$F = \dfrac{60 \times 10^2}{30 \times 10^5}$
$F = \dfrac{60}{30} \times 10^{2-5}$
$F = 2 \times 10^{-3}$ **7**
$F = 0{,}002$ **8**

Conseils & Méthodes

1 Pour calculer A, on applique la règle du produit de deux puissances.

2 Pour calculer B, on applique la règle du quotient de deux puissances en faisant attention au signe négatif au dénominateur.

3 Il ne faut pas confondre le signe – de l'exposant (cas du calcul de B) et une puissance d'un nombre négatif (ici -4).

4 Pour calculer E, on commence par effectuer les calculs entre parenthèses en respectant les priorités opératoires.

5 $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$ et
$(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$.
Plus généralement :
- $(-1)^n = 1$ si le nombre de (-1) est pair ;
- $(-1)^n = -1$ si le nombre de (-1) est impair.

Le nombre de (-1) est donné par l'exposant.

6 Pour calculer F, on commence par calculer les produits d'entiers et les produits de puissances, puis on effectue le quotient des entiers et des puissances.

7 Il s'agit de l'écriture scientifique du nombre F.

8 Il s'agit de l'écriture décimale du nombre F.

À vous de jouer !

4 Effectuer les calculs suivants.

$A = 5^{-7} \times 5^{-3}$ $B = 6^{12} \times 6^{-10}$

$C = \dfrac{21^{-13}}{21^{10}}$ $D = \dfrac{-5^4}{5^{-3}}$ $E = (8^3)^2$

5 Effectuer les calculs suivants.

$E = \dfrac{2^{-4} \times 2^9}{2^5 \times 2^{-7}}$

$F = \dfrac{((-3)^4)^{-2} \times (-3)}{(-3)^{-3}}$

$G = \left(\dfrac{7^{13} \times 7^{-9}}{7^{-14} \times 7^{-8}}\right)^2$

6 Effectuer les calculs suivants.

$H = 45 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-26}$

$I = 9{,}35 \times 10^{-12} + 0{,}047 \times 10^{-10} - 51{,}3 \times 10^{-14}$

$J = 2\,500\,000\,000^2$

$K = \dfrac{14 \times 10^7 \times 27 \times 10^{-3}}{21 \times 10^2}$

$L = \dfrac{49 \times 10^{-7} \times 6 \times 10^5}{3 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-2}}$

Exercices 45 à 50 p. 55

Exo Versions interactives
Lienmini.fr/maths2-04

3 Calculer avec les quotients

Effectuer les calculs suivants.

$A=-\frac{13}{8}-\frac{5}{24}$ $B=\frac{24}{35}\times\frac{14}{36}$ $C=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}}$ $D=\frac{5}{4}-\frac{7}{4}\times\frac{7}{8}$

Solution

$A=-\frac{13}{8}-\frac{5}{24}$ **1**

$A=\frac{-13\times 3}{8\times 3}-\frac{5}{24}$

$A=\frac{-39}{24}-\frac{5}{24}$

$A=\frac{-39-5}{24}$

$A=\frac{-44}{24}$ **2**

$A=\frac{-11}{6}$

$B=\frac{24}{35}\times\frac{14}{36}$ **3**

$B=\frac{24\times 14}{35\times 36}$

$B=\frac{6\times 4\times 7\times 2}{7\times 5\times 6\times 3\times 2}$

$B=\frac{4}{5\times 3}$

$B=\frac{4}{15}$

$C=\frac{\frac{15}{4}}{\frac{21}{16}}$ **4**

$C=\frac{15}{4}\times\frac{16}{21}$

$C=\frac{15\times 16}{4\times 21}$

$C=\frac{5\times 3\times 4\times 4}{4\times 7\times 3}$

$C=\frac{20}{7}$

$D=\frac{5}{4}-\frac{7}{4}\times\frac{7}{8}$ **5**

$D=\frac{5}{4}-\frac{49}{32}$

$D=\frac{40}{32}-\frac{49}{32}$

$D=-\frac{9}{32}$

Conseils & Méthodes

1 Pour A, on reconnaît une somme. Pour additionner deux fractions, on réduit au même dénominateur, puis on applique la règle de l'addition de deux fractions.

2 Il faut penser à simplifier.

3 Pour B, on reconnaît un produit. On effectue le calcul puis on décompose chaque produit en vue de simplifier la fraction. On simplifie alors par $6\times 7\times 2$.

4 Pour C, on reconnaît une division de deux fractions et on effectue les calculs.

5 Dans un calcul sans parenthèses, comme pour D, on effectue d'abord les produits.

À vous de jouer !

7 Effectuer les sommes suivantes.

$A=-\frac{12}{7}+\frac{5}{14}$ $B=\frac{8}{35}+\frac{6}{15}$ $C=\frac{23}{26}-\frac{12}{39}$

8 Effectuer les produits suivants.

$D=-\frac{63}{30}\times\frac{60}{-4}$ $E=\frac{10}{15}\times\frac{7}{20}$ $F=-\frac{5}{12}\times\frac{18}{13}$

9 Effectuer les divisions suivantes.

$G=\frac{\frac{21}{-24}}{\frac{14}{-32}}$ $H=\frac{\frac{45}{18}}{12}$ $I=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}}$

10 Effectuer les calculs suivants.

$A=\frac{2}{3}-\frac{\frac{7}{3}\times 8}{21}$ $B=\frac{\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\times 3}{2}$

$C=\frac{\left(\frac{24}{15}+\frac{35}{25}\right)\times 20}{33}$ $D=\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$

Exercices 51 à 55 p. 55-56

4 Calculer avec les racines carrées

Cours 3 p. 48

1. Donner la valeur exacte de $E = \dfrac{\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt{7}}$ et $F = \sqrt{20}$.

2. Écrire $G = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

3. Écrire $H = \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

4. Écrire $I = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur.

Solution

1. $E = \dfrac{\sqrt{(-7)^2}}{\sqrt{7}}$ **1**

$E = \dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{7}}$

$E = \sqrt{\dfrac{49}{7}}$

$E = \sqrt{7}$

$F = \sqrt{20}$ **2**

$F = \sqrt{4 \times 5}$

$F = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$

$F = 2\sqrt{5}$

2. $G = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ **3**

$G = \sqrt{4 \times 3} \times \sqrt{3 \times 10}$

$G = \sqrt{4} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}$

$G = 2 \times 3 \times \sqrt{10}$

$G = 6\sqrt{10}$

3. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3}$ **4**

$\sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3}$

$\sqrt{48} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3}$

$\sqrt{75} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$H = \sqrt{48} + 2\sqrt{75}$

$H = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

$H = \sqrt{3}(4 + 5)$

$H = 9\sqrt{3}$

4. $I = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **5**

$I = \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

$I = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Conseils & Méthodes

1 Pour E, on utilise les règles de calculs sur le quotient de deux racines carrées.

2 Pour F, on décompose 20 en un produit où un facteur est un carré parfait (ici 4) et on utilise les règles de calculs sur le produit de deux racines carrées.

3 G est un produit de racines carrées : on commence par décomposer chacune des racines carrées dans l'objectif de faire apparaître des racines carrées identiques ou des carrées parfaits.

4 H est une somme de racines carrées : on décompose 48 et 75 sous la forme d'un produit d'un carré parfait par un entier puis on applique la définition d'une racine carrée.

5 Pour I, on multiplie par $\sqrt{3}$ le numérateur et le dénominateur.

À vous de jouer !

11 Calculer $G = \sqrt{\dfrac{15}{45}}$; $H = \dfrac{50}{2\sqrt{25}}$; $I = \sqrt{\dfrac{121}{49}}$.

12 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a est un entier et b un entier positif, le plus petit possible.

$A = \sqrt{12} \times \sqrt{30}$ $\quad B = \sqrt{7} \times \sqrt{28} \times \sqrt{63}$

$C = 5\sqrt{26} \times \sqrt{2}$ $\quad D = \dfrac{\sqrt{480}}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}}$

13 Écrire les nombres sans radical au dénominateur.

$M = \dfrac{2}{3\sqrt{6}}$ $\quad N = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad P = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

14 Écrire $E = \sqrt{12} + 5\sqrt{27} - \sqrt{3}$ et $F = \sqrt{180} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

Exercices 56 à 63 p. 56

Exercices d'application

Apprendre à apprendre

15 Choisir deux fractions composées d'au moins deux nombres négatifs. Les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser. Vérifier les résultats à la calculatrice.

16 Comment multiplier deux puissances d'un même nombre ? Par exemple, $2^5 \times 2^{-3}$.

17 Comment additionner deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} + \sqrt{40}$.

18 Comment multiplier deux racines carrées ? Par exemple, $\sqrt{8} \times \sqrt{40}$.

19 Comment écrire un quotient sans racines carrées au dénominateur ? Par exemple, $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$.

Questions - Flash

Diapo Diaporama Ressource professeur

20 Répondre aux questions suivantes en justifiant.

a) 4 est-il un diviseur de 28 ?
b) 32 est-il un multiple de 6 ?
c) 4 divise-t-il 18 ?
d) 35 est-il divisible par 5 ?

21 **1.** Décomposer 204 et 595 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{204}{595}$.

22 Décomposer puis donner l'écriture fractionnaire ou entière en calculant à la main.

a) 2^{-5} **b)** 5^{-1} **c)** 4^{-3}

23 Écrire sous la forme d'une seule puissance.

$A = 8^2 \times 8 \times 8^7$ $B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$ $C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

24 Effectuer les calculs suivants.

a) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{-1}{3}$ **b)** $\dfrac{-3}{10} \times \dfrac{-11}{3}$ **c)** $\dfrac{8}{-1} \div \dfrac{-4}{5}$

25 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.

a) $\sqrt{3^2}$ **b)** $(-\sqrt{16})^2$ **c)** $\sqrt{(-7)^2}$

26 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$

27 Déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel appartient :

a) $\dfrac{3}{2}$ **b)** $\dfrac{11}{3}$ **c)** $\dfrac{8}{2}$ **d)** $\sqrt{9}$ **e)** $\sqrt{11}$

Multiples et diviseurs

AP

28 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $\overline{65u}$ où u représente le chiffre des unités.
Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :

a) un multiple de 2 ?
b) un nombre divisible par 9 ?

29 Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

30 Écrire la liste de tous les diviseurs de :

a) 32 **b)** 67 **c)** 81 **d)** 144

31 Répondre par Vrai ou Faux. Justifier.

a) Tout nombre qui a pour chiffre des unités 3 est divisible par 3.
b) Tout nombre divisible par 4 et 5 est divisible par 10.
c) Tout nombre divisible par 3 et 2 est divisible par 5.
d) Tout nombre divisible par 2 est divisible par 4.

Nombres premiers

32 Parmi les nombres entiers naturels suivants, chercher ceux qui sont des nombres premiers. AP

a) 157 **b)** 231 **c)** 311 **d)** 468

33 Parmi les nombres ci-dessous, indiquer ceux qui ne sont pas des nombres premiers.

a) 19 **b)** 169 **c)** 1 009 **d)** 127
e) 558 **f)** 615 **g)** 2 367 **h)** 14 674

34 Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers.

a) 215 **b)** 507 **c)** 1 868 **d)** 1 431

35 Pour chaque nombre entier, indiquer s'il est premier ou donner sa décomposition en produit de facteurs premiers.

a) 32 **b)** 59 **c)** 115 **d)** 187
e) 227 **f)** 303 **g)** 503 **h)** 667

36 Simplifier au maximum chaque fraction.

a) $\dfrac{48}{56}$ **b)** $\dfrac{56}{63}$ **c)** $\dfrac{63}{48}$ **d)** $\dfrac{650}{800}$

37 **1.** Décomposer 800 et 650 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{650}{800}$.

38 **1.** Décomposer 2 261 et 323 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\dfrac{2261}{323}$.

3. Effectuer $\dfrac{2261}{323} + \dfrac{7}{49}$.

Résolution de problèmes arithmétiques

39 Lors d'un spectacle d'une compagnie de danse, tous les danseurs font un premier numéro quatre par quatre, simultanément, puis un deuxième six par six, tous ensemble encore.

Pourront-ils tous participer à un numéro pour lequel il faut des groupes de 24 ? Justifier.

Démonstrations

40 **1.** Démontrer que si un entier est multiple de 15, alors il est aussi multiple de 3 et de 5.
2. La réciproque semble-t-elle vraie ?

41 **1.** 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.
2. En utilisant la question **1.**, démontrer que 6 335 est divisible par 7.
3. Démontrer, dans le cas général, que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.
4. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6 349 147 est un multiple de 7.

42 Démontrer que si a^2 est pair alors a est pair.

43 Démontrer que le produit de deux entiers consécutifs est toujours pair.

44 **1.** Donner une écriture littérale des multiples de 18.
2. Démontrer que si un entier est multiple de 18 alors il est aussi multiple de 3 et de 6.
3. La réciproque est-elle vraie ?
Justifier.

Calculs avec les puissances

45 **1.** Écrire les nombres suivants sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$A = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$
$B = 625 \times 512$
2. Écrire sous la forme d'un produit de puissances de 2 et de 5.
$E = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 5}$ $\quad$ $F = \dfrac{25}{16}$

46 Recopier et compléter.
a) $12^{-5} = \dfrac{1}{12^{\cdots}}$ $\quad$ **b)** $7^{\cdots} = \dfrac{1}{7^5}$
c) $8^{-6} = \dfrac{1}{8^{\cdots}}$ $\quad$ **d)** $\dfrac{1}{9^{\cdots}} = 9^{-23}$
e) $1{,}5^2 = \dfrac{1}{1{,}5^{\cdots}}$ $\quad$ **f)** $(-7)^3 = \dfrac{1}{(-7)^{\cdots}}$

47 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $5^2 \times 5^4$ $\quad$ **b)** $6^5 \times 6^{-8}$ $\quad$ **c)** $3^4 \times 5^4$
d) $2{,}5^{-7} \times 4{,}2^{-7}$ $\quad$ **e)** $-4 \times (-4)^{-7}$ $\quad$ **f)** $(-2)^{-3} \times (-2)^5$

48 Écrire sous la forme a^n, où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.
a) $\dfrac{3^8}{3^{-4}}$ $\quad$ **b)** $\dfrac{6^5}{3^5}$ $\quad$ **c)** $\dfrac{4^6}{4^2}$
d) $\dfrac{(-4{,}5)^4}{3^4}$ $\quad$ **e)** $\dfrac{9^{-3}}{(-2{,}5)^{-3}}$ $\quad$ **f)** $\dfrac{3{,}2^{-5}}{3{,}2^{-2}}$

49 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
a) $2{,}8 \times 2{,}8^{-3}$ $\quad$ **b)** $\dfrac{5^{-2}}{5^{-4}}$ $\quad$ **c)** $\left((-3{,}7)^{-2}\right)^5$
d) $\dfrac{7^{-3}}{2^{-3}}$ $\quad$ **e)** $\left((5{,}6)^{-4}\right)^{-2}$ $\quad$ **f)** $10^7 \times 10^{-7}$
g) $(-6)^8 \times (-6)^{-3}$ $\quad$ **h)** $5{,}3^{-6} \times 4^{-6}$ $\quad$ **i)** $\dfrac{(-4{,}2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$

50 Écrire sous la forme d'une seule puissance.
$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$
$B = 11^{-8} \times \dfrac{11^7}{11^{-4}}$
$C = \dfrac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$

Calculs avec les quotients AP

51 Effectuer les calculs suivants en détaillant les étapes et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{42}{75} - \left(-\dfrac{22}{30}\right)$ $\quad$ **b)** $\dfrac{85}{4} + \dfrac{25}{-5}$
c) $\dfrac{-1}{25} - 8$ $\quad$ **d)** $-\dfrac{14}{27} + \dfrac{-5}{108}$

52 Effectuer les calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
a) $\dfrac{-2}{3} \times \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{3}{-7}$ $\quad$ **b)** $\dfrac{5}{-7} \times \left(-\dfrac{7}{5}\right)$
c) $-15 \times \dfrac{2}{15}$ $\quad$ **d)** $\left(-\dfrac{8}{3}\right) \times \left(-\dfrac{1}{5}\right) \times 3$

Exercices d'application

53 Effectuer les calculs et donner les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{-4}{45} \div \dfrac{16}{15}$ **b)** $\dfrac{-5}{6} \div \left(-\dfrac{15}{18}\right)$

c) $12 \div \dfrac{3}{-4}$ **d)** $1 \div \left(\dfrac{-7}{4}\right)$

54 Écrire les quotients suivants en utilisant le symbole ÷ puis effectuer le calcul.

$A = \dfrac{2}{\dfrac{3}{5}}$ $B = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{5}$ $C = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{7}{11}}$

55 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$D = 11 \div \left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{2}\right)$ $E = \left(\dfrac{11}{7} - \dfrac{2}{5}\right) \times \dfrac{24}{7}$

Calculs avec les racines carrées

56 Déterminer, si possible, la racine carrée des nombres suivants.

a) 100 **b)** 9 **c)** −36 **d)** $(-8)^2$
e) 169 **f)** −1 **g)** −52 **h)** π

57 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.

a) $\left(\sqrt{25}\right)^2$ **b)** $\sqrt{3^2}$ **c)** $\left(-\sqrt{16}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{0{,}14}\right)^2$ **e)** $\sqrt{(-7)^2}$ **f)** $\sqrt{0{,}4^2}$

58 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.

a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ **b)** $\sqrt{75}$

c) $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$ **d)** $\sqrt{108}$

59 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{75}$ **c)** $\sqrt{500}$ **d)** $\sqrt{80}$

e) $-\sqrt{48}$ **f)** $5\sqrt{18}$ **g)** $-4\sqrt{32}$

60 Écrire sans radical les expressions suivantes.

a) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1}{16}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$ **d)** $\dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{49}{64}}$

61 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

a) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ **b)** $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

c) $\sqrt{7} \times 3\sqrt{14}$ **d)** $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{70}$

62 Sans utiliser de calculatrice, transformer les expressions suivantes de façon à obtenir la racine carrée d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{75}}$

c) $\dfrac{8\sqrt{5}}{3\sqrt{20}}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{28}{42}} \times \dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{45}}$

63 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers.

$A = \sqrt{81} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27}$ $B = \sqrt{3}\,(5 - \sqrt{3})(\sqrt{3} + 3)$

Calculs et automatismes

64 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{5}\right)\left(1-\dfrac{2}{5}\right)\left(1-\dfrac{4}{5}\right)\left(1-\dfrac{5}{5}\right)}{3}$$

$$B = \dfrac{25}{8} \times \dfrac{\dfrac{23}{4} - 13 \times \dfrac{27}{19}}{\dfrac{23}{4} - 13 \times \dfrac{27}{19}} \div \dfrac{25}{8}$$

$$C = \dfrac{12}{9 + \dfrac{8}{7 + \dfrac{6}{5 + \dfrac{4}{3 + \dfrac{2}{1+1}}}}}$$

$$D = \left(2 + \dfrac{3}{4}\right) \times \dfrac{1}{2 + \dfrac{3}{4}} - \dfrac{\dfrac{3}{7} - \dfrac{8}{9}}{\dfrac{8}{9} - \dfrac{3}{7}}$$

65 Écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs.

$A = \sqrt{8}$ $E = \sqrt{49}$

$B = \sqrt{20}$ $F = \sqrt{300}$

$C = \sqrt{75}$ $G = \sqrt{810}$

$D = \sqrt{10}$ $H = \sqrt{27}$

Arithmétique

66 Un fleuriste dispose de 30 tulipes et 24 muscaris. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de tulipes et le même nombre de muscaris, et utiliser toutes ses fleurs. On veut calculer le nombre maximum de bouquets qu'il peut faire.

1. Expliquer pourquoi le nombre de bouquets doit être un diviseur commun à 30 et 24.
2. Déterminer les diviseurs de 30 et 24.
3. Combien de bouquets peut-il réaliser au maximum ? Quelle est alors la composition de chaque bouquet ?

67 Dans une partie de cartes, on doit répartir entre les joueurs 180 jetons noirs et 120 jetons blancs. Chaque joueur doit recevoir le même nombre de jetons noirs et le même nombre de jetons blancs.
1. Peut-il y avoir vingt joueurs ? neuf joueurs ?
2. Combien peut-il y avoir de joueurs ? Donner toutes les possibilités.

68 La somme de quatre multiples consécutifs de 7 est égale à 406.
Quels sont ces quatre entiers ?

Démonstrations

69 On veut démontrer que la somme de deux entiers naturels impairs consécutifs est un multiple de 4.
1. Combien faut-il ajouter à un entier naturel impair pour obtenir l'entier impair qui le suit ?
2. Donner les écritures littérales de deux entiers naturels impairs consécutifs.
3. Montrer que leur somme peut s'écrire $4m$, où m est un entier naturel, puis conclure.

70 n est un entier naturel.
1. Démontrer que si n est impair alors 8 divise $n^2 - 1$.
2. Le nombre $1 + 3^n$ est-il toujours pair ?
3. Démontrer que $2^n + 2^{n+1}$ est divisible par 3.

71 Algo & Prog
On veut déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b.
1. Quelle opération permet de trouver le résultat ?
2. Quelle condition portant sur le résultat permet de conclure ?
3. Proposer un programme qui détermine, à partir de deux entiers a et b, si a est un multiple de b.

72 Algo & Prog
Déterminer un algorithme qui permet de déterminer, à partir de deux entiers a et b, si a est un diviseur de b.

73 Algo & Prog
1. Écrire un programme qui écrit les dix premiers multiples d'un entier a.
2. Modifier le programme pour qu'il détermine le plus grand multiple de a inférieur à un nombre b donné.

74 a est un chiffre, on veut démontrer que le nombre $\overline{a00a}$ est divisible par 143.
(Pour $a = 4$, le nombre est 4 004.)
1. Vérifier cette affirmation avec $a = 1$ puis avec $a = 2$.
2. Écrire la division euclidienne de $\overline{a00a}$ par 10.
3. Démontrer cette affirmation dans le cas général.

Calculs avec les puissances

75 Le cerveau humain est composé de 100 milliards de neurones. À partir de 30 ans, ce nombre de neurones baisse d'environ 100 000 par jour. En considérant qu'une année contient 365 jours, donner l'écriture décimale puis scientifique du nombre de neurones d'un humain âgé de 40 ans.

76 Physique
La lumière est composée de photons qui se déplacent à la vitesse moyenne de 300 000 km par seconde. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par un de ces photons en une année.
1. À quelle distance, en km, correspond une année-lumière ? Écrire la réponse en notation scientifique.
2. La distance du centre du Soleil au centre de la Terre est de $1{,}5 \times 10^8$ km. Exprimer cette distance en année-lumière.

77 *(D'après Brevet)* **1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.
$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$
2. Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif : $B = \dfrac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$.
3. Calculer C et donner le résultat en écriture scientifique.
$$C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}$$
4. Donner les écritures décimale et scientifique de $D = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}$.

78 Donner un encadrement par deux puissances de 10 consécutives :
a) en nombre d'années, de l'âge de la Terre qui est d'environ 4,5 milliards d'années.
b) en mètre, de la largeur d'une bactérie qui peut atteindre 3 µm.
c) en Hertz, de la fréquence d'un processeur tournant à 4,1 GHz.

Exercices d'entraînement

79 Algo & Prog

1. Écrire un programme qui donne les 10 premières puissances d'un entier a.

2. Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus grande puissance de a inférieure à un nombre b donné.

3. Modifier le programme de la question **1.** pour qu'il détermine la plus petite puissance de a supérieure à un nombre b donné.

4. À partir des programmes écrits aux questions **2.** et **3.**, écrire un programme qui détermine la première puissance d'un nombre positif a supérieure ou inférieure à une valeur donnée b.

80 **1.** Calculer A et donner le résultat sous forme fractionnaire la plus simple possible.

$$A = \frac{14 \times 10^5 \times 35 \times 10^{-3}}{21 \times 10^3}$$

2. Écrire B sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre entier et n un nombre entier relatif.

$$B = \frac{35 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}}$$

3. Calculer et donner le résultat en écriture scientifique de

$$C = \frac{5 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6}{15 \times 10^2 \times 8 \times 10^{-5}}.$$

4. Donner les écritures décimale et scientifique de

$$D = \frac{3 \times 10^2 \times 1{,}2 \times (10^{-3})^4}{0{,}2 \times 10^{-7}}.$$

81 Écrire chaque nombre relatif en notation scientifique.

a) 6 540 **b)** 0,003 2 **c)** – 1 475,2

d) 23,45 **e)** –34,3 **f)** –0,001

82 Écrire chaque nombre relatif en notation scientifique.

a) $645{,}3 \times 10^{-15}$ **b)** $0{,}056 \times 10^{17}$

c) $-13{,}6 \times 10^{-8}$ **d)** -523×10^{7}

83 On donne l'expression numérique
$A = 2 \times 10^2 + 10^1 + 10^{-1} + 2 \times 10^{-2}$.

1. Donner l'écriture décimale de A.

2. Donner l'écriture scientifique de A.

3. Écrire A sous la forme d'un produit d'un nombre entier par une puissance de 10.

4. Écrire A sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction irréductible inférieure à 1.

84 Calculer chaque expression et donner le résultat en notation scientifique.

$A = 45 \times 10^{12} \times 4 \times 10^{-26}$ $B = 2\,500\,000\,000^2$

$C = \dfrac{36 \times 10^{15}}{3 \times 10^{-17}}$ $D = \dfrac{-48{,}8 \times 10^{23}}{-4 \times 10^{15}}$

85 Chimie

Une mole de carbone pèse 12 g et est composée de $6{,}02 \times 10^{23}$ atomes.
Quelle est la masse d'un atome de carbone ?

86 Physique

La lumière se propage à la vitesse moyenne d'environ 3×10^5 km par seconde.

1. Calculer la distance parcourue par la lumière en une année. Utiliser la notation scientifique et arrondir le nombre décimal au dixième.

2. Des astronomes ont observé l'extinction d'une étoile et ils ont estimé que cet événement s'est produit il y a environ 5 000 ans.
Calculer la distance en kilomètres séparant cette étoile de la Terre. Utiliser la notation scientifique.

87 **1.** Quel est le chiffre des unités de 13^1 ? celui de 13^2 ? de 13^3 ? de 13^4 ? de 13^5 ?

2. Quel est le chiffre des unités de $13^{2\,000}$?

Calculs avec les quotients

88 Effectuer les calculs suivants en respectant les priorités opératoires.

$A = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{-4}{3} + \dfrac{7}{2}$ $B = \dfrac{13}{7} + \left(-\dfrac{8}{7}\right) \div \left(-\dfrac{4}{5}\right)$

$C = \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{4}{3}\right)$ $D = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{5}{8} \times \dfrac{7}{9}$

89 Calculer puis simplifier au maximum le résultat.

$A = \dfrac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3}}$ $B = 2 + \dfrac{\dfrac{2}{7}}{\dfrac{5}{14}}$ $C = -\dfrac{3}{14} - \dfrac{3}{\dfrac{7}{5}} + 2$

$D = \dfrac{7}{5} + \dfrac{\dfrac{8}{15}}{\dfrac{2}{3}} - \dfrac{19}{2}$ $E = \dfrac{3 - \dfrac{7}{5}}{1 - \dfrac{9}{10}}$ $F = \dfrac{7}{-8} + \dfrac{\dfrac{5}{6}}{4} - 1$

90 Le train Marseille-Lille part de la gare de Marseille avec 800 passagers. Un quart d'entre eux voyagent en 1re classe et le reste en 2de classe. Les trois huitièmes des passagers de la 1re classe et le sixième des passagers de la 2de classe descendent en gare de Lyon.

1. Au départ de Marseille, quel est le nombre de passagers en 1re classe ? en 2de classe ?

2. En déduire le nombre de personnes de 1re classe puis de 2de classe descendant en gare de Lyon.

3. Exprimer alors à l'aide d'une fraction simplifiée la proportion des passagers de 1re classe puis de ceux de 2de classe descendant en gare de Lyon par rapport au total des voyageurs.

91 La longueur et la largeur d'un rectangle ont été multipliées respectivement par $\frac{7}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

1. Par quel nombre l'aire du rectangle initial a-t-elle été multipliée (donner le résultat sous la forme d'une fraction) ?
2. Par quelle fraction le périmètre du rectangle initial a-t-il été multiplié, sachant que sa longueur mesure 7 cm et sa largeur mesure 4 cm ?

92 Anne-Cécile rend visite à plusieurs amis à son retour d'Australie. À chaque fois, ses amis lui offrent gentiment un morceau de son gâteau préféré.
Le premier jour, gourmande, elle mange un demi-gâteau chez Sophie. Le lendemain, Marie lui donne un quart de gâteau. Plus raisonnable, le troisième jour, elle prend juste un huitième de gâteau avec Mathieu et, le quatrième jour, un seizième avec Franck.
Le cinquième jour, elle prend juste un trente-deuxième de gâteau chez Hafid, pour lui faire plaisir.

1. Quelle proportion de gâteau a-t-elle mangée en cinq jours ?
2. En continuant ainsi, parviendra-t-elle à manger un gâteau entier ?

93 Le volume V d'un tonneau est donné par la formule suivante :

$$V = \pi L\left[\frac{d}{2}+\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}-\frac{d}{2}\right)\right]^2.$$

1. Calculer le volume de ce tonneau en m^3. Donner la valeur approchée à 0,001 m^3 par excès, puis en litres, à 1 litre près par excès, sachant que :
$L = 1{,}60$ m ; $d = 0{,}85$ m ; $D = 1{,}34$ m.
2. Un viticulteur décide d'utiliser ce tonneau pour faire fermenter son raisin.
Combien de bouteilles de 75 cL pourra-t-il remplir pour commercialiser son vin rouge ?

94 Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2016 puis le tiers du reste en 2019.
Quelle fraction de sa propriété lui reste-t-il aujourd'hui ?

95 L'air est constitué principalement d'azote et d'oxygène. Dans un volume d'air donné, le volume d'azote correspond à 78,6 % du volume total et celui d'oxygène à 20,9 %.
Sachant qu'une salle de classe a un volume de 125 m^3, calculer le volume, en m^3, de chacun des gaz présents dans cette salle.

Calculs avec les racines carrées

96 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers relatifs, avec b le plus petit possible.

$A = \sqrt{50} + 4\sqrt{18} - 7\sqrt{8}$

$B = \sqrt{20} - 8\sqrt{45} + 2\sqrt{5}$

$C = \sqrt{12} + \sqrt{75} + 4\sqrt{300}$

$D = 5\sqrt{63} - \sqrt{28} + \sqrt{7}$

97 Écrire sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a, b et c sont des entiers relatifs, avec c le plus petit possible.

$A = 7 - \sqrt{12} - 8 + 3\sqrt{27}$

$B = 3\sqrt{50} - \sqrt{49} + 2\sqrt{8}$

$C = 2\sqrt{18} + \sqrt{16} - 7\sqrt{81}$

98 Écrire les quotients suivants avec un dénominateur entier.

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{7}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ **d)** $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

99 *(Extrait du brevet)* Soit $a = 2\sqrt{45}$ et $b = \sqrt{80}$.
1. Calculer $a + b$.
Donner le résultat sous la forme $c\sqrt{d}$ où d est un entier le plus petit possible.
2. Calculer ab.
3. Le nombre a est-il solution de l'équation
$x^2 - 2x - 180 = -12$? Justifier.

100 *(Extrait du brevet)* Soit $a = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ et $b = 5 + \sqrt{2}$.
1. Calculer a^2 et b^2.
2. En déduire les valeurs de $a^2 + b^2$ et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

101 Développer et simplifier les expressions suivantes.

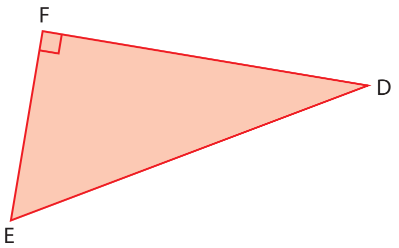
$A = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $B = \sqrt{18}\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{18}}{18}\right)$

$C = \sqrt{3}\left(2 - 5\sqrt{3}\right)$ $D = 5\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 7\sqrt{18}\right)$

$E = \left(\sqrt{6} + 2\right)\sqrt{2}$ $F = 2\sqrt{12}\left(\sqrt{12} - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$

102 Soit ABC un triangle rectangle en A.
1. Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [BC] sachant que AB = 5 cm et AC = 7 cm.
2. Calculer la valeur exacte de la longueur du côté [AB] sachant que AC = 6 m et BC = 11 m.

103 EDF est un triangle rectangle en F.
On donne $ED = 5\sqrt{2}$ cm et $DF = 3\sqrt{2}$ cm.



1. Déterminer la valeur exacte de EF.
Donner le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ où a est un entier positif.
2. Donner la valeur exacte du périmètre du triangle EDF, puis l'arrondi au millimètre.

104 L'unité choisie est le centimètre.
On considère un rectangle ayant pour longueur $\sqrt{75}$ et pour largeur $\sqrt{48}$.
1. Déterminer le périmètre exact de ce rectangle.
Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.
2. Calculer l'aire exacte du rectangle.
Donner la réponse sous la forme la plus simple possible.

Ensembles de nombres

Démonstration

105 **1.** Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a entier.
$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$
$B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$
2. *(D'après Brevet.)* Démontrer que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

106 *(D'après Brevet)*
Soit $D = \dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$.
À quel ensemble le nombre D appartient-il ?

107 *(D'après Brevet)*
On pose $M = \dfrac{20\,755}{9488} - \dfrac{3}{8}$.
1. Écrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Le nombre M est-il décimal ?
Est-il rationnel ? Justifier.

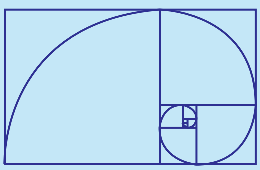
Travailler autrement

108 Chaque groupe présentera au reste de la classe ses recherches sur un des thèmes proposés autour du nombre d'or φ.

En groupe

Thème 1 : Le rectangle d'or

1. Rechercher ce qu'on appelle un rectangle d'or et écrire son programme de construction.
2. Construire un rectangle d'or sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.



Thème 2 : Le pentagone régulier

1. Rechercher le lien unissant le nombre d'or, un pentagone régulier et son pentagramme.
2. Construire un pentagone régulier et son pentagramme sur feuille blanche, ou à l'aide d'un logiciel de géométrie, puis en déduire une valeur approchée de φ.

Thème 3 : Les racines continuées

1. Calculer la valeur exacte et une valeur approchée au dix-millième près de chacun des termes de la suite de nombres suivante.

$A = \sqrt{1+\sqrt{1}}$ $\qquad B = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$

$C = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}$

Écrire D, le terme suivant de cette suite, puis calculer sa valeur exacte et une valeur approchée.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les six termes suivants de la suite.
Que peut-on remarquer ?

Thème 4 : La suite de Fibonacci

1. Rechercher qui était Fibonacci (époque et lieu où il a vécu, ses travaux...) et la méthode de calculs des termes de sa suite.
2. À l'aide d'un tableur, calculer les vingt premiers termes de la suite de Fibonacci.
3. Calculer le rapport de deux termes successifs. Que peut-on remarquer ?

Thème 5 : φ dans l'art et dans la nature

1. Étudier le rôle du nombre d'or φ à travers l'histoire.
2. Sur Internet, rechercher différents exemples dans la nature où φ est mis en évidence.
3. Sur Internet, rechercher différentes œuvres d'art (peinture, sculpture, architecture) où φ intervient.

109 Quotient et ensemble de nombres

1. Soit $G = \dfrac{3575}{4225}$.

Écrire G sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Soit $H = G + \dfrac{4}{26}$.

À quel ensemble de nombres H appartient-il ?

110 Fraction irréductible

Calculer $J = \dfrac{575}{161} - \dfrac{45}{21}$.

Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

111 Calcul et quotients

1. Soit $A = \dfrac{8}{3} - \dfrac{5}{3} \div \dfrac{20}{21}$.

Calculer A en détaillant les étapes du calcul et écrire le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Calculer $B = \left(2 + \dfrac{2}{3}\right) \div \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3}\right)$.

3. Déterminer le plus petit ensemble de nombres qui contient A.

4. Même question avec B.

Chimie

112 Masse d'un atome

(*D'après Brevet*) La masse d'un atome de carbone est égale à $1{,}99 \times 10^{-26}$ kg.

Les chimistes considèrent des paquets contenant $6{,}022 \times 10^{23}$ atomes.

1. Calculer la masse, en grammes, d'un tel paquet d'atomes de carbone.

2. Donner une valeur arrondie de cette masse à un gramme près.

Démonstration

113 Simplification de racines carrées

(*D'après Brevet*) Soit $D = \dfrac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$.

Montrer que D est un nombre entier.

114 Biologie

(*D'après Brevet*) Le cœur humain effectue environ 5 000 battements par heure.

1. Écrire 5 000 en notation scientifique.

2. Calculer le nombre de battements effectués en un jour, sachant qu'un jour dure 24 heures.

3. Calculer le nombre de battements effectués pendant une vie de 80 ans. On considère qu'une année correspond à 365 jours.

Donner la réponse en notation scientifique.

115 Puissances et nombres entiers

1. Retrouver les nombres entiers positifs non nuls n, m et p tels que $349\,272 = 2^n \times 3^m \times 7^p \times 11$.

2. Retrouver les nombres entiers positifs non nuls r, s et t tels que $36\,288 = 2^r \times 3^s \times 7^t$.

3. On considère $N = 2^3 \times 3^3 \times 7$.

Sans calculer la valeur de N, montrer que N est un diviseur commun à 349 272 et à 36 288.

4. On considère $M = 2^6 \times 3^4 \times 7^2 \times 11$.

Sans calculer la valeur de M, montrer que M est un multiple commun à 349 272 et à 36 288.

116 Géométrie et racines carrées

1. Tracer un carré ABCD de côté 1 cm.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur AC.

3. Placer le point E sur [AB] tel que AE = 3 × AB.

Construire le carré AEGH de telle sorte que D soit un point de [AH].

Calculer la valeur exacte de la longueur AG.

4. Montrer que AG est un multiple de AC.

5. Placer le point F sur [EG] de telle sorte que AEFD soit un rectangle.

Calculer la longueur exacte de AF.

6. Placer sur [AG] le point P tel que AP = AF.

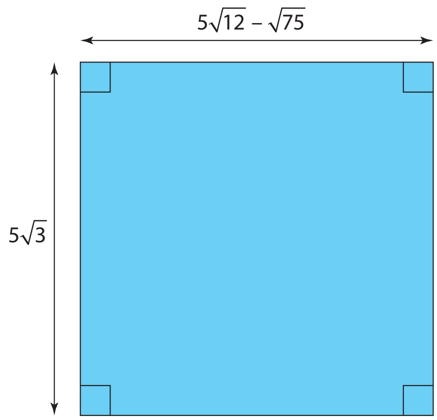
La longueur de [AP] est-elle un multiple de celle de [AC] ?

7. Prouver que $CG = \sqrt{8}$ cm.

8. Comparer $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ et $\sqrt{10}$. (Utiliser l'un des symboles =, < ou >.)

117 Aire et racines carrées

On considère la figure suivante. (L'unité est le centimètre.)



1. Écrire $5\sqrt{12} - \sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers relatifs, b étant le plus petit possible.

2. Quelle est la nature exacte de ABCD ?

Justifier.

3. Déterminer le périmètre de ABCD sous la forme la plus simple possible.

Donner ensuite l'arrondi au millimètre.

4. Déterminer la valeur exacte de l'aire de ABCD.

Exercices d'approfondissement

Démonstrations

118 Divisibilité

Soit n un nombre entier non premier et d le plus petit diviseur premier de n. On suppose qu'il existe un entier d' qui divise d. Démontrer que d' divise aussi n.

119 Une propriété du cours

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Il existe au moins un diviseur de n autre que 1 et n (sinon n serait premier). Soit donc d le plus petit diviseur de n autre que 1.

1. Pourquoi existe-t-il un diviseur de n autre que n et 1 ?

2. Démontrer que d est premier en utilisant un raisonnement par l'absurde et l'exercice précédent.

3. Démontrer que $\sqrt{n} > d$.

120 Le crible d'Ératosthène

Algo & Prog

Doc — Fichiers TICE Lienmini.fr/maths2-29

Le crible d'Ératosthène est un algorithme permettant de trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre entier donné. Dans cet exercice, il s'agit de déterminer tous les nombres premiers plus petits que 100.

1. Télécharger sur le site compagnon la grille des 100 premiers nombres entiers.

2. Rayer tous les multiples de 2 puis tous les multiples de 3.

3. Est-il nécessaire de rayer les multiples de 4 ? Pourquoi ?

4. Quel est le plus petit entier restant ? Rayer ses multiples.

5. Réitérer la procédure et lister les 100 premiers nombres premiers.

121 Escaliers et division euclidienne

L'escalier d'une tour a un nombre de marches compris entre 130 et 150. Si je les monte trois par trois, j'arrive en haut.

Si j'étais capable de les monter 4 par 4, je finirais par 1 marche. Combien y a-t-il de marches ?

122 Développement décimal périodique

Déterminer la 314^{e} décimale de $\dfrac{253}{7}$.

123 Développement décimal illimité

1. Justifier que $x = 0{,}999\ldots$ est solution de $10x - 9 = x$.

2. Résoudre $10x - 9 = x$.

3. Conclure.

Démonstration

124 Produit de deux puissances

L'objectif de l'exercice est de démontrer que $a^n \times a^m = a^{n+m}$ si n est un entier positif et m un entier négatif.

1. Écrire l'égalité $a^n \times a^m$ en utilisant n et $-m$.

2. Simplifier le quotient et en déduire que $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

125 Des molécules d'eau

Chimie

L'unité de masse atomique unifiée (symbole u) est une unité de mesure standard, utilisée pour mesurer la masse des atomes : $1\ \text{u} = 1{,}660\,54 \times 10^{-27}$ kg (valeur fournie par le Bureau international des poids et mesures). La masse d'un atome d'hydrogène est 1 u et celle d'un atome d'oxygène est 16 u.

1. Une molécule d'eau est constituée d'un atome d'oxygène et de deux atomes d'hydrogène. Calculer la masse théorique d'une molécule d'eau.

2. On admet qu'un litre d'eau pèse 1 kg. Calculer le nombre théorique de molécules d'eau dans un litre d'eau.

3. Une estimation du volume total des océans est de 1,370 milliard de km^3. Donner un ordre de grandeur du nombre théorique de molécules d'eau présentes dans les océans.

4. Le débit moyen de la Seine à Paris est d'environ 250 m^3 par seconde. Donner une estimation du nombre de molécules d'eau qui passe sous le pont de l'Alma chaque seconde, puis chaque année.

126 Production d'éléctricité

En 2005, la production totale nette d'électricité en France s'élevait à 549,4 TWh. Elle se répartissait en 430,0 TWh pour les centrales nucléaires, 57,2 TWh pour les parcs hydrauliques et éoliens et 62,2 TWh pour les différentes productions thermiques classiques (source : DGEMP / Observatoire de l'Énergie).

En 2016, la production totale nette d'électricité en France s'élevait à 531,3 TWh. Elle se répartissait en 384,0 TWh pour les centrales nucléaires, 84,6 TWh pour les parcs hydrauliques et éoliens et 62,7 TWh pour les différentes productions thermiques classiques (source : *Bilan électrique français 2016 – RTE*).

1. Que représente un TWh ? Écrire chaque valeur en Wh en utilisant l'écriture scientifique.

2. Calculer la part, en pourcentage, de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité.

3. Dessiner un diagramme circulaire mettant en valeur la part de chaque catégorie dans la production totale nette d'électricité en France pour l'année 2005, puis 2016. Comparer les deux diagrammes.

127 Calculs algébriques et quotients

1. Sachant que $a = \dfrac{-2}{21}$ et $b = \dfrac{5}{-7}$, calculer $\dfrac{a}{b}$; $\dfrac{b}{a}$; $a \times b$; $a + b$ et $a - b$.

Donner les résultats sous la forme de fractions irréductibles.

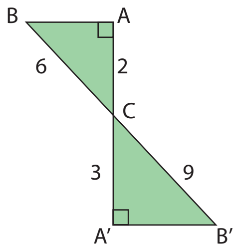
Démonstration

128 Quotient de racines carrées

On va démontrer que, si a est positif et b est strictement positif, alors $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

1. Pourquoi a doit-il être positif et b strictement positif ?
2. Démontrer l'égalité.

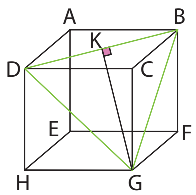
129 Théorème de Thalès



1. Calculer la valeur de $\dfrac{AB}{A'B'}$.

2. En utilisant la définition d'une racine carrée, écrire le résultat précédent sous la forme $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ où a et b sont des entiers positifs, avec $b \neq 0$.
3. Calculer AB puis A′B′.
4. Comparer les deux écritures de $\dfrac{AB}{A'B'}$ et trouver un moyen pour simplifier $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{72}}$.

130 Racines carrées dans un cube



ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.
1. Calculer la valeur exacte de GD et écrire le résultat sous la forme $a\sqrt{2}$ avec a entier.
2. Quel est le périmètre du triangle BDG ? Donner la réponse sous la forme $a\sqrt{2}$.
3. Calculer la valeur exacte de GK.
4. Calculer l'aire du triangle BGD. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centième.

Démonstration

131 $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

On suppose que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.
1. Démontrer qu'il existe un entier naturel n et un entier relatif a tel que $10^n = 3a$.
2. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 10^n.
3. On note $a = p_1^{n_1} \times \ldots \times p_m^{n_m}$ la décomposition en produit de facteurs premiers.

Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.

132 Démonstration d'Euclide

On suppose que l'ensemble E des nombres premiers est fini : $E = \{2\,;5\,;7\,;\ldots\,;p\}$ et on pose $P = 2 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (p + 1)$.
1. Démontrer que P n'est pas un nombre premier.
2. Démontrer que P peut s'écrire comme produit d'un entier k et d'un nombre premier q.
3. Est-ce que P est divisible par un nombre premier appartenant à l'ensemble E ?
4. Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est un ensemble infini.

133 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

1. On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q. Il peut donc s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

Démontrer que $2q^2 = p^2$ et en déduire que p^2 est pair.
2. Démontrer que p est pair.
3. p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$.
Calculer alors q^2.
Que peut-on en déduire pour la parité de q ?
Que peut-on dire de la fraction $\dfrac{p}{q}$?

Vers la 1re

Orientation

134 Spécialité Maths

Soit $E = \dfrac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{18}} + \dfrac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{18}}$.

Écrire le nombre E sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est une fraction irréductible et b est un nombre entier.

135 Technologie

L'énergie distribuée par EDF est mesurée en kilowattheures (kWh). Une autre unité de mesure de l'énergie est le Joule (noté J).
On sait que 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.
Les économistes utilisent pour les combustibles (gaz, bois, charbon…) une autre unité appelée tonne équivalent pétrole (tep), qui correspond à la quantité d'énergie libérée par la combustion d'une tonne de pétrole.
On sait que 1 tep = $4{,}18 \times 10^{10}$ J.
Pour les questions suivantes, arrondir les résultats au centième.
1. Une tonne de charbon a un pouvoir calorifique de $2{,}8 \times 10^{10}$ J.
Exprimer ce pouvoir en kWh puis en tep.
2. Calculer, en kWh, l'énergie correspondant à 1 tep.
3. En France, en 2015, l'énergie consommée par les transports était égale à $49{,}4 \times 10^6$ tep (source : Insee).
Exprimer cette énergie en kWh.

Travaux pratiques

Modéliser, calculer, communiquer

50 min

1 Approximation d'une racine carrée

A ▶ Avec une calculatrice

1. On veut déterminer une valeur approchée de $\sqrt{33}$.
Sans calculatrice, donner un encadrement à l'unité de ce nombre.

2. Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous, donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

N	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
N^2											

3. Quel est l'encadrement de $\sqrt{33}$ au millième ?

B ▶ Avec un tableur

TICE

1. Construire la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Pas											
2	N	5										6
3	N^2											

2. Quelle formule doit-on écrire dans la cellule B1 pour calculer le pas qui permet d'aller de B2 à L2 en 10 étapes ?
Compléter la cellule C2 pour augmenter B2 du pas calculé en B1, puis recopier la formule jusqu'en K2.
Pour recopier la formule sans changer B1, écrire B1 au lieu de B1.

3. Compléter la cellule B3 pour obtenir le carré du nombre en B2, puis recopier la formule jusqu'à L3.

4. Observer le tableau et donner un encadrement de $\sqrt{33}$ au dixième.

5. Remplacer le contenu de B2 et de L2 par les bornes de l'encadrement.
Quel encadrement de $\sqrt{33}$ obtient-on ?
Quelle est sa précision ?

6. Recommencer la question précédente avec le nouvel encadrement jusqu'à obtenir une précision de 10^{-6}.
Changer si besoin le format d'affichage des nombres.

7. Utiliser la feuille de calcul pour obtenir une approximation de $\sqrt{125}$ à 10^{-4} près.

C ▶ Avec un programme

Algo & Prog

On recherche une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre n en utilisant l'algorithme de Héron d'Alexandrie.

Cette méthode est définie par la formule $m = \frac{1}{2}\left(N + \frac{n}{m}\right)$ où n est un nombre choisi au départ et m remplace n dans l'étape suivante.

1. On cherche la valeur approchée de $\sqrt{33}$. On pose $n = 5$.
Déterminer m à la 1re étape noté m_1.

2. m_1 remplace n dans la formule.
Déterminer m à la 2e étape, noté m_2.

3. Réitérer l'algorithme et calculer m_3, m_4 et m_5.

4. Proposer un programme ou un algorithme permettant de calculer la racine carrée de 33 au dix-millième.

5. Modifier le programme précédent pour qu'il demande au préalable N et n.

6. Déterminer une approximation de $\sqrt{125}$.

Algo & Prog TICE Modéliser, représenter, communiquer 30 min

2 Dans le cœur des micros

A ▸ Parlons chiffre

En informatique, on utilise uniquement des 0 et des 1 pour coder les nombres.
On travaille avec un système de numération binaire.

Écriture binaire	Écriture décimale	Lien entre les deux écritures
1	1	1×2^0
10	2	$1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
11	3	$1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
100	4	$1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

1. Bien observer bien la table de correspondance précédente, puis déterminer l'écriture en binaire des entiers inférieurs à 10.
2. Reproduire la feuille de calcul suivante sur un tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre en binaire							
2	0	1	1	1	1	1	0	1
3	Nombre en écriture décimale						...	

Programmer en G3 le calcul nécessaire pour obtenir l'écriture décimale d'un nombre en binaire.

B ▸ La table ASCII

L'unité d'enregistrement en informatique est le **bit**, symbolisé par un 0 ou un 1. Un **octet** correspond à une suite de huit bits, par exemple 0100 1101.

1. Combien de nombres peut-on écrire avec un octet ?
Pour coder la centaine de caractères présents sur un clavier, on les numérote de 0 à 255 et on les code à l'aide d'un octet. La table qui permet de mettre en correspondance un caractère et le nombre entre 0 et 255 s'appelle la **table ASCII**. La télécharger à l'aide du lien ci-contre.

Doc — Fichiers TICE
Lienmini.fr/maths2-30

2. Retrouver l'écriture décimale du nombre 0100 0001.
À quelle lettre correspond-il ?
3. À l'aide de la question **1.**, retrouver l'écriture en binaire des codes des autres lettres de l'alphabet.
4. Constituer des groupes.
Chaque groupe choisit alors quatre mots de moins de dix lettres, les code en binaire puis demande aux autres groupes de les retrouver.

C ▸ Une unité d'enregistrement appelée « octet »

1. Calculer, en octets, la valeur des expressions suivantes :
$A = 2^{10}$ octets ; $B = 2^{20}$ octets ; $C = 2^{30}$ octets.
2. Expliquer pourquoi l'expression A est généralement appelée « 1 kilooctet ».
On note $A \approx 1$ Ko (10^3 octets).
Par approximation, on écrit $A = 1$ Ko.
3. De même, B est appelé « 1 mégaoctet » (1 Mo) et C « 1 gigaoctet » (1 Go).
Indiquer par quelles puissances de 10 se traduisent les préfixes *méga-* et *giga-*.

1 Utiliser les notions de multiples et diviseurs

QCM

136 435 est :

a un multiple de 5.
b un diviseur de 5.
c divisible par 5.
d de la forme $5k$, où k est un entier.

137 $n = 12k$, où k est un entier, donc :

a n est un diviseur de 12.
b n est un multiple de 4.
c le reste de la division euclidienne de n par 12 est 0.
d 2 ; 3 ; 4 ; 6 et 12 sont des diviseurs de n.

138 Parmi les fractions suivantes, laquelle (lesquelles) est (sont) irréductible(s) ?

a $\frac{2\,590}{3\,885}$ b $\frac{74}{111}$
c $\frac{1601}{1621}$ d $\frac{2\,429}{1735}$

139 ✶ Les nombres suivants sont-ils premiers ?
a) 23 **b)** 79 **c)** 91

140 ✶ Décomposer 276 et 161 en facteurs premiers.

141 ✶✶ **1.** Décomposer 3 528 et 1 596 en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier la fraction $\frac{3\,528}{1596}$.

2 Calculer avec les puissances

QCM

142 2^4 est égal à :

a $-2 \times 2 \times 2 \times 2$ b $(-2)^4$
c -8 d -16

143 $(-1)^{123}$ est égal à :

a -123 b -1
c 1 d 0

144 $2^5 \times 2^8$ est égal à :

a $2^4 \times 2^9$ b 2^{40}
c 2^{13} d $2^7 \times 2^7$

145 $7^3 \times 7^{-4}$ est égal à :

a 7^{-7} b 7^{-1}
c 7^{-12} d $\frac{1}{7}$

146 $2^5 \times 3^4 \times 2^{-2} \times 3^{-2}$ est égal à :

a 72 b $\frac{2^5 \times 3^4}{6^2}$
c $2^3 \times 3^2$ d 36^5

147 $\frac{5^8}{5^3}$ est égal à :

a 5^{11} b 5^5
c $3\,125$ d 625

148 $\frac{9^3}{9^5}$ est égal à :

a 9^8 b $\frac{1}{81}$
c 9^{-2} d 9^{15}

149 ✶ Donner l'écriture décimale des nombres suivants.
$A = 3^4$ $B = (-10)^5$ $C = 2^{-5}$

150 ✶✶ Calculer chaque nombre.
$A = 5 \times 2^{-1} - 3^{-2}$
$B = 3 \times (1 - 3)^5 - 2^2 \times (3 \div 2)$
$C = \frac{(5 - 2 \times 3)^4}{(2 - 3)^5}$

3 Calculer avec les quotients

QCM

151 $\dfrac{17}{24}$ est le résultat de :

a $\dfrac{10}{12}+\dfrac{7}{12}$ b $\dfrac{5}{24}+\dfrac{1}{2}$

c $16+\dfrac{1}{24}$ d $\dfrac{15}{8}-\dfrac{7}{6}$

152 $\dfrac{-5}{6}$ est le résultat de :

a $\dfrac{-1}{3}\times\dfrac{-5}{2}$ b $\dfrac{-5}{11}\times\dfrac{11}{6}$

c $\dfrac{-30}{36}\div 6$ d $-5\times\dfrac{1}{6}$

153 $-\dfrac{7}{5}\div\dfrac{2}{-3}$ est égal à :

a 2,1 b $\dfrac{10}{21}$ c $\dfrac{3{,}5}{1{,}6}$ d $-\dfrac{21}{10}$

154 $\dfrac{\frac{2}{3}}{4}$ est égal à :

a $2\div 3\div 4$ b $\dfrac{8}{3}$

c $\dfrac{2}{12}$ d On ne peut pas calculer.

155 $\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3}{2}\times\dfrac{5}{6}$ est égal à :

a 0 b $\dfrac{1}{4}$ c $\dfrac{-33}{12}$ d $\dfrac{-12}{14}$

156 ✶ Calculer.

$A=\dfrac{2}{17}-\dfrac{5}{17}\times\dfrac{17}{2}$

$B=\dfrac{3}{9}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

157 ✶✶ Calculer en détaillant les étapes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre décimal.

$A=\dfrac{24\times 9\times 72\times 121}{36\times 33\times 64}$

$B=56\times\dfrac{15}{128}-\dfrac{1}{18}$

$C=\dfrac{81}{63}\div\left(4-\dfrac{2}{14}\right)$

$D=3+\dfrac{2}{15}\times\left(5\times\dfrac{23}{25}-\dfrac{12}{49}\div\dfrac{9}{14}\right)\div\dfrac{1}{70}$

4 Calculer avec les racines carrées

QCM

158 Le nombre 11 est égal à :

a $\sqrt{11^2}$ b $\sqrt{11}$ c $\sqrt{121}$ d 3,31

159 $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ est égal à :

a $\sqrt{25}$ b 7 c 5 d 12

160 $\sqrt{108}$ est égal à :

a $3\sqrt{6}$ b $4\sqrt{27}$ c $6\sqrt{3}$ d 10,39

161 $\sqrt{6}\times\sqrt{12}$ est égal à :

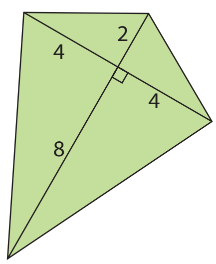
a $6\sqrt{12}$ b $\sqrt{72}$ c $6\sqrt{2}$ d $3\sqrt{8}$

162 $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}}$ est égal à :

a $\dfrac{5}{13}$ b $\sqrt{\dfrac{5}{13}}$ c $\dfrac{\sqrt{25}}{169}$ d $\sqrt{\dfrac{25}{169}}$

163 ✶ **1.** Écrire $\sqrt{8}$; $\sqrt{18}$ et $\sqrt{50}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont entiers, b étant le plus petit possible.
Réduire l'expression $G=\sqrt{50}+\sqrt{18}-2\sqrt{8}$.
2. En raisonnant de façon identique, réduire l'expression $H=\sqrt{12}-7\sqrt{27}+\sqrt{3}$.

164 ✶✶ Les mesures des diagonales de ce cerf-volant sont données en centimètres.



Calculer la valeur exacte de son périmètre, puis la valeur arrondie au millimètre.