Brahmagupta (598 – 670)

Brahmagupta définit le zéro comme étant le résultat de la soustraction d'un nombre par lui-même. ↪ Dicomaths p. 347

François Viète (1540 – 1603)

François Viète répand l'utilisation des nombres décimaux. ↪ Dicomaths p. 353

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Fermat émet la conjecture suivante : « Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que $n \geqslant 2$. » Ce résultat sera démontré par Wiles en 1994 et sera connu sous le nom de théorème de Fermat-Wiles. ↪ Dicomaths p. 350

Au XXIe siècle, une véritable course au plus puissant supercalculateur se déroule au niveau mondial. Des pays investissent des millions dans la construction de ces supercalculateurs tant leur apport au niveau de l'industrie et de la technologie est grand.

En 1res générale et technologique, je découvrirai les suites numériques et j'apprendrai à résoudre des équations du 2nd degré.

À quoi ça sert ?

Par exemple :

- En **physique-chimie**, à isoler certaines variables dans des formules et à calculer leurs valeurs, à convertir des unités.
- En **SES**, à calculer des taux d'évolution successifs, à optimiser des achats.
- En **géographie**, à calculer des aires de territoires.
- En **cryptographie**, à mettre en place des procédures de chiffrement basées sur la primalité (RSA, El Gamal, etc.).
- En **informatique**, à optimiser le temps de calcul d'un algorithme.

2

Les cellules de notre organisme ne sont pas visibles à l'œil nu ; elles sont infiniment petites, leur taille se mesure en puissance de 10 négative.

Nombres et calculs numériques

Je dois être capable de…	Proposition de parcours
Utiliser les notions de multiples, diviseurs et nombres premiers.	1 p. 50 · 1 2 p. 50 · 28 29 32 33 p. 54
Calculer avec les puissances.	2 p. 51 · 4 5 p. 51 · 45 46 p. 55
Calculer avec les quotients.	3 p. 52 · 7 8 p. 52 · 51 52 p. 55
Calculer avec les racines carrées.	4 p. 53 · 11 12 p. 53 · 56 57 p. 56
Déterminer la nature d'un nombre.	105 106 p. 60
Démonstrations	
• Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.	131 p. 63
• Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.	Act 4 p. 45 · 133 p. 63
• Démontrer que pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est un multiple de a.	41 p. 55
• Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair.	Cours 1 p. 46
• Démontrer que, quels que soient les réels positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.	Act 3 p. 45
Algo & Prog	
• Déterminer si un entier naturel est premier.	120 p. 62
• Déterminer par balayage un encadrement d'une racine carrée d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}.	TP 1 p. 64
• Déterminer si un entier naturel a est multiple d'un entier naturel b.	71 p. 57
• Déterminer le plus grand multiple de a inférieur à b, pour des entiers a et b donnés.	73 p. 57
• Déterminer la première puissance d'un nombre positif donné supérieure ou inférieure à une valeur donnée.	79 p. 58

1 exercices résolus · 11 exercices corrigés · 12 exercices non corrigés · TP travaux pratiques

Pour prendre un bon départ

Exo Parcours différenciés
Lienmini.fr/maths2-03

1. Connaître la division euclidienne

On donne l'égalité $177 = 15 \times 11 + 12$.

Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 177 par 15, puis de la division euclidienne de 177 par 11.

2. Utiliser les critères de divisibilité

Parmi les nombres 12 ; 30 ; 27 ; 246 ; 325 ; 4 238 et 6 139, indiquer ceux qui sont divisibles :

a) par 2 **b)** par 3 **c)** par 5 **d)** par 9

3. Calculer avec les quotients

Calculer chacune des expressions suivantes.

$A = 1 - \dfrac{-7}{3}$ $B = \dfrac{-2}{10} + \dfrac{7}{25}$

$C = \dfrac{-7}{15} \times \left(-\dfrac{5}{21}\right)$ $D = \dfrac{-7}{3} \div \dfrac{-21}{6}$

4. Connaître la notation scientifique

Parmi les nombres suivants, quels sont ceux écrits en notation scientifique ?

a) $5{,}23 \times 10^{12}$ **b)** $72{,}43 \times 10^{-8}$ **c)** $2{,}45 \times 100^{-9}$

d) $-1{,}47 \times 10^{6}$ **e)** $0{,}251 \times 10^{3}$ **f)** $-7{,}6$

5. Utiliser la racine carrée en géométrie

Sachant que le triangle ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 7$, calculer la valeur exacte de BC.

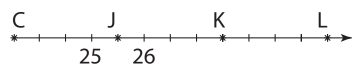
6. Connaître les carrées parfaits

Quels sont les carrés parfaits compris entre 1 et 144 ?

7. Repérer des nombres sur une droite graduée

1. Tracer une demi-droite graduée en prenant 12 carreaux pour une unité. Sur cette demi-droite, placer les points E, F, G et H d'abscisses respectives $\dfrac{11}{12}$; $\dfrac{5}{6}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{3}{2}$.

2. Écrire l'abscisse des points C, J, K et L.



Doc Corrigés
Lienmini.fr/maths2-27

ZOOM SUR...

Logique & Démonstration
p. 45, 46, 48, 55, 57, 60-63

Algo & Prog
p. 57, 58, 62, 64, 65

TICE
p. 64, 65

Les autres disciplines
p. 57, 58, 61, 62

Activités

1 Calculer avec des puissances de 10

15 min

1. a) Recopier puis compléter les expressions suivantes.

$$10^2 \times 10^3 = \underbrace{\underbrace{10\times 10}_{\dots\text{ facteurs}} \times \underbrace{10\times 10\times 10}_{\dots\text{ facteurs}}}_{\dots\text{ facteurs au total}} = 10^{\cdots} \qquad 10^5 \times 10^4 = \underbrace{\underbrace{10\times\dots\times 10}_{\dots\text{ facteurs}} \times \underbrace{10\times\dots\times 10}_{\dots\text{ facteurs}}}_{\dots\text{ facteurs au total}} = 10^{\cdots}$$

b) Calculer de la même façon $10^5 \times 10^8$ et $10^7 \times 10^{-6}$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $10^n \times 10^p = 10^{\cdots}$.

2. a) En s'inspirant de la question **1.**, décomposer $\frac{10^5}{10^2}$, puis simplifier cette fraction en donnant le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

b) Recommencer avec les fractions $\frac{10^7}{10^{-5}}$ et $\frac{10^3}{10^2}$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $\frac{10^n}{10^p} = 10^{\cdots}$.

3. a) Compter le nombre de facteurs 10 contenus dans l'écriture décomposée de $(10^2)^3$.

b) Combien aurait-on de facteurs 10 dans $(10^3)^5$? Déterminer $(10^5)^8$.

c) Compléter alors la formule : pour tous nombres entiers n et p, $(10^n)^p = 10^{\cdots}$.

4. Les formules obtenues dans les questions précédentes sont-elles encore valables pour des puissances autres que 10 ?

↪ Cours 2 p. 47

2 Connaître de nouveaux nombres

15 min

1. a) L'aire d'un carré est 25 cm². Quelle est la mesure d'un côté ?

On appelle c le côté de ce carré en centimètres. Quelle relation existe-t-il entre c et 25 ?

b) Trouver **tous** les nombres dont le carré est 16.

Recommencer avec 0,81.

c) Existe-t-il un nombre dont le carré soit négatif ? Justifier.

d) Si a et b sont deux nombres qui ont le même carré, que peut-on dire de a et b ? Justifier.

2. a) Est-il possible de tracer un carré dont l'aire est le double de celle du carré bleu ci-contre ? (Il est possible de s'aider du quadrillage.)

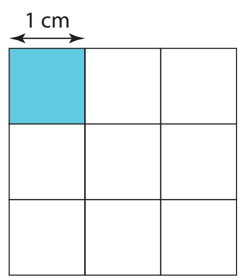
Comparer sa réponse avec celles des autres élèves de la classe.

b) On appelle c le côté de ce carré en centimètres.

Quelle relation existe-t-il entre c et 2 ? Traduire cette égalité par une phrase en français.

c) Est-il possible de donner une écriture décimale de c ?

d) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au dix-millième de $\sqrt{2}$.

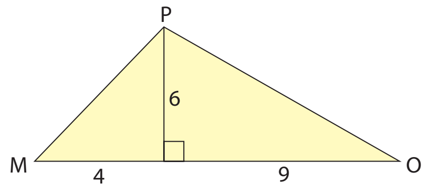


↪ Cours 3 p. 48

15 min

3 Calculer le produit de deux racines carrées

1. a) Quelle est l'aire du triangle POM ci-contre ?



b) Démontrer que POM est un triangle rectangle.

c) Calculer l'aire de ce triangle d'une autre manière.

d) En s'aidant des résultats trouvés aux questions **a)** et **c)**, écrire $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$ où c est un nombre entier.

e) Quelle est la décomposition en facteurs premiers de 6 084 ?
En déduire un moyen de calculer $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ d'une autre manière, sans utiliser la calculatrice.

f) Quel calcul aurait permis d'écrire facilement $\sqrt{117} \times \sqrt{52}$ sous la forme $\sqrt{c}$, où c est un nombre entier, sans utiliser les aires des triangles ?

g) Conjecturer une formule de calcul du produit de deux racines carrées.

2. On va démontrer que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous nombres a et b **positifs**. **Démonstration**

Pour cela, on va élever au carré chacun des termes de l'égalité.

a) Pourquoi a et b doivent-ils être positifs ?

b) Calculer $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2$ et $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ puis conclure.

Cours 3 p. 48

15 min

4 Faire le point sur les nombres

1. Voici une liste de nombres :

$\dfrac{-457}{23}$; $4\sqrt{2}$; 854 ; $0{,}000\,08 \times 10^7$; $\sqrt{49}$; π ; $\dfrac{174}{58}$; – 0,000 415 7 ; $-\sqrt{\dfrac{4}{9}}$; $\dfrac{58}{4}$; 10^{-3}.

a) Dans cette liste, quels sont les nombres entiers ? Quels sont les nombres décimaux ?

b) Y a-t-il des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale ?

c) Y a-t-il des nombres qui peuvent s'écrire sous forme fractionnaire ?

d) Y a-t-il des nombres qui ne peuvent être classés dans aucune des catégories précédentes ?

2. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel **Démonstration**

$\sqrt{2}$ n'est ni un nombre entier ni un nombre décimal. On se demande donc si c'est un nombre rationnel.
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Cela signifie qu'il peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs p et q (q non nul) : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ où $\dfrac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

a) Démontrer que $2q^2 = p^2$.

b) Recopier et compléter les tableaux ci-dessous.

Si le chiffre des unités de p est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de p^2 est :										

Si le chiffre des unités de q est :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
alors le chiffre des unités de q^2 est :										
et le chiffre des unités de $2q^2$ est :										

c) En observant les tableaux précédents, quel(s) est (sont) le (les) chiffre(s) des unités possible(s) de p et q quand $2q^2 = p^2$?

d) La fraction $\dfrac{p}{q}$ est-elle irréductible ? Que peut-on en déduire pour le nombre $\sqrt{2}$?

Cours 4 p. 49

Cours

1 Multiples, diviseurs et nombres premiers

a Multiples et diviseurs

Définitions Multiple et diviseur

Soit a et b deux nombres entiers. S'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$, on dit que :
- **b divise a ou que b est un diviseur de a ;**
- **ou que a est un multiple de b ou que a est divisible par b.**

Exemple

357 est divisible par 3 (car $3 + 5 + 7 = 15$ qui est divisible par 3 et $357 = 3 \times 119$) :
- 357 est divisible par 3 (et par 119) et 3 est un diviseur de 357 (et 119 aussi) ;
- 357 est donc un multiple de 3 (et de 119).

Remarques

① Si $a = bk$ alors le reste de la division euclidienne de a par b est nul, c'est-à-dire que $\frac{a}{b}$ est un nombre entier.

② 1 et n sont des diviseurs de n.

Propriété Nombres pairs et impairs

Soit n un nombre entier.
n est pair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p$.
n est impair si et seulement s'il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.

Propriété Carré d'un nombre impair

Si n est impair alors n^2 est impair.

Démonstration

Soit n un nombre impair. Il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
$n^2 = (2p + 1)^2 = (2p + 1) \times (2p + 1) = 4p^2 + 2p + 2p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$.
On pose $P = 2p^2 + 2p$ qui est un entier car p l'est.
$n^2 = 2P + 1$
Comme il existe un entier P tel que $n^2 = 2P + 1$, n^2 est aussi un nombre impair.

b Nombres premiers

Définition Nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.

Exemple

Voici la liste des 10 premiers nombres premiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Propriété Diviseur premier d'un entier

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier plus petit ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple

$12 = 4 \times 3 = 2 \times 2 \times 3$.

Le plus petit diviseur de 12 est 2 qui est premier.

Chacun des diviseurs premiers de 12 est plus petit que $\sqrt{12}$ ($\sqrt{12} \approx 3,46$).

Propriété Décomposition d'un nombre entier

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exercice résolu 1 p. 50

Définition Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur n'admettent qu'un seul diviseur en commun : 1.

Exemple

$\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur commun de 5 et 3 est 1.

$\frac{12}{15}$ n'est pas une fraction irréductible car 3 est un diviseur commun à 12 et 15.

Exercice résolu 1 p. 50

2 Puissances entières d'un nombre relatif

a Notations a^n et a^{-n}

Définition Puissances d'un nombre

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a : $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

Et, si a est non nul, $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$.

Par convention, $a^0 = 1$.

a^n (lu « a puissance n ») est appelé puissance n-ième de a et n est appelé l'exposant.

Remarque En particulier, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Exemples

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1}{125} = 0,008$

La décomposition de 12 en produits de facteurs premiers est $2 \times 2 \times 3$. On écrit $12 = 2^2 \times 3$.

b Calculs avec les puissances

Dans tout ce paragraphe, on considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

Règle Calculs avec les puissances

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\ (a \neq 0) \qquad (a^m)^p = a^{m \times p}$$

Démonstration

Si n et m sont positifs : $a^n \times a^m = \underbrace{\underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}}}_{n+m \text{ facteurs au total}} = a^{n+m}$

Exemples

$A = (-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^{4+3} = (-2)^7$

$B = 7^{-3} \times 7^{-7} = 7^{-3+(-7)} = 7^{-10}$

$C = (-2)^4 \times 5^4 = (-2 \times 5)^4 = (-10)^4$

$C = \dfrac{6}{6^{-3}} = \dfrac{6^1}{6^{-3}} = 6^{1-(-3)} = 6^4$

$E = 10^{-3\times(-7)} \times 10^{2\times(-3)} = 10^{21} \times 10^{-6} = 10^{21+(-6)} = 10^{15}$

Remarque Attention, il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction de puissances.

Exemples

$5^3 + 5^{-2} = 5 \times 5 \times 5 + \dfrac{1}{5 \times 5} = 125 + \dfrac{1}{25} = 125{,}04$

$5^{3-2} = 5^1 = 5$ et $5^3 + 5^{-2} \neq 5^{3-2}$

Exercice résolu 2 p. 51

3 Racine carrée

a Définitions

Définition Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a :
$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Définition Carré parfait

Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Remarques

Le carré d'un nombre est toujours positif.
Lorsque a est un nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a donc pas de sens.

Exemples

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ et 1 est positif.

$3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$.

$\left(\sqrt{3{,}6}\right)^2 = 3{,}6$ car $3{,}6 > 0$.

2 est positif donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

Règle Racine d'un carré

Pour tout nombre a, $\sqrt{a^2} = a$ si $a > 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.

Exemples

$\sqrt{(1{,}3) \times (1{,}3)} = 1{,}3$ car 1,3 est positif.

$\sqrt{(-5)^2} = -(-5) = 5$ car -5 est négatif. En effet, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$.

b Calculs avec les racines carrées

Règle Calculs avec les racines carrées

Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$).

● **Exemples**

$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ $\qquad$ $\sqrt{\dfrac{36}{25}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \dfrac{6}{5}$

↪ Exercice résolu 4 p. 53

Remarque Attention, $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$.

En effet, on a par exemple $25 = 16 + 9$, mais $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ donc $\sqrt{25} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$.

4 Ensemble de nombres

Définitions Ensemble de nombres

- **L'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif : $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.**
- **L'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif : $\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$.**
- **L'ensemble des nombres décimaux, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.**
- **L'ensemble des nombres rationnels, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ avec a un entier relatif et b un entier relatif non nul.**

● **Exemples**

$\dfrac{6}{3} \in \mathbb{N}$ car $\dfrac{6}{3} = 2$ $\qquad$ $-45 \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $12{,}45 \in \mathbb{D}$ car $12{,}45 = \dfrac{1\,245}{100} = \dfrac{1\,245}{10^2}$ $\qquad$ $\dfrac{-17}{11} \in \mathbb{Q}$ par définition

Définition Nombres réels

Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.

L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'ensemble des nombres réels et se note $\mathbb{R}$.

Un tel axe est appelé droite des réels.

Propriété Inclusion des ensembles de nombres

Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont des nombres décimaux qui sont des quotients : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \in \mathbb{D} \in \mathbb{Q}$.

● **Exemples**

- D'après l'activité 1, on peut construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ et ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.
- L'écriture décimale de π n'est pas périodique, ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.

Propriété Nature des racines carrées

Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait soit un irrationnel.

● **Exemple**

$\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel et $\sqrt{9}$ est un nombre entier.