Pour acquérir les automatismes

1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour maîtriser ses automatismes

lienmini.fr/10333-213

Reconnaître une primitive

Dans les exercices 2 à 10, on donne f et F deux fonctions définies sur un intervalle I.
Dans chacun des cas, montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

2 $f(x)=7$ • $F(x)=7x-4$ • $I=\mathbb{R}$.

3 $f(x)=-3x+1$ • $F(x)=-\frac{3}{2}x^2+x-1$ • $I=\mathbb{R}$.

4 $f(x)=6x^2$ • $F(x)=2x^3$ • $I=\mathbb{R}$.

5 $f(x)=4x^3$ • $F(x)=x^4$ • $I=\mathbb{R}$.

6 $f(x)=3x^3$ • $F(x)=\frac{3}{4}x^4$ • $I=\mathbb{R}$.

7 $f(x)=2x+3$ • $F(x)=x^2+3x$ • $I=\mathbb{R}$.

8 $f(x)=6x^2-4x$ • $F(x)=2x^3-2x^2-4$ • $I=\mathbb{R}$.

9 $f(x)=\frac{2}{x^2}$ • $F(x)=-\frac{2}{x}+3$ • $I=]0\,;+\infty[$.

10 $f(x)=\cos(x)$ • $F(x)=\sin(x)+3$ • $I=\mathbb{R}$.

Déterminer une primitive

Dans les exercices 11 à 19, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

11 $f(x)=-5$ • $I=\mathbb{R}$.

12 $f(x)=4x-5$ • $I=\mathbb{R}$.

13 $f(x)=3x^2$ • $I=\mathbb{R}$.

14 $f(x)=7x^3$ • $I=\mathbb{R}$.

15 $f(x)=\cos(x)$ • $I=\mathbb{R}$.

16 $f(x)=\sin(x)$ • $I=\mathbb{R}$.

17 $f(x)=3\sin(x)+1$ • $I=\mathbb{R}$.

18 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ • $I=]0\,;+\infty[$.

19 $f(x)=3-\frac{1}{x^2}$ • $I=]-\infty\,;0[$.

Primitive prenant une valeur donnée y_0 en x_0

Dans les exercices 20 à 27, vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I puis déterminer la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

20 $f(x)=-3$ • $F(x)=-3x+4$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=-2$ et $y_0=6$.

21 $f(x)=2x-5$ • $F(x)=x^2-5x+8$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=2$ et $y_0=0$.

22 $f(x)=3x^2+1$ • $F(x)=x^3+x$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=1$ et $y_0=0$.

23 $f(x)=4x^3-3x$ • $F(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=1$ et $y_0=\frac{5}{2}$.

24 $f(x)=\sin(x)$ • $F(x)=-\cos(x)+1$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=\pi$ et $y_0=0$.

25 $f(x)=2\cos(x)$ • $F(x)=2\sin(x)$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=0$ et $y_0=1$.

26 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ • $F(x)=-\frac{1}{x}$ • $I=]0\,;+\infty[$ • $x_0=1$ et $y_0=1$.

27 $f(x)=4-\frac{1}{x^2}$ • $F(x)=4x+\frac{1}{x}-1$ • $I=]0\,;+\infty[$ • $x_0=1$ et $y_0=0$.

Déterminer une primitive prenant une valeur donnée y_0 en x_0

Dans les exercices 28 à 34, déterminer la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

28 $f(x)=2$ • $I=R$ • $x_0=1$ et $y_0=4$.

29 $f(x)=3x+7$ • $I=R$ • $x_0=1$ et $y_0=\frac{1}{2}$.

30 $f(x)=5x^2-6x$ • $I=R$ • $x_0=0$ et $y_0=1$.

31 $f(x)=x^5-3x^3$ • $I=R$ • $x_0=1$ et $y_0=2$.

32 $f(x)=3-\frac{1}{x^2}$ • $I=]0\,;+\infty[$ • $x_0=1$ et $y_0=1$.

33 $f(x)=3\sin(x)$ • $I=R$ • $x_0=\pi$ et $y_0=1$.

34 $f(x)=\cos(2x)$ • $I=R$ • $x_0=\frac{\pi}{2}$ et $y_0=1$.

Calcul de Primitives

Dans les exercices 35 à 40, déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I à l'aide des primitives des fonctions de référence.

35 $f(x)=5$ • $I=\mathbb{R}$.

36 $f(x)=8x+3$ • $I=\mathbb{R}$.

37 $f(x)=7x-5$ • $I=\mathbb{R}$.

38 $f(x)=x^2-x+1$ • $I=\mathbb{R}$.

39 $f(x)=2x^3+2x-1$ • $I=\mathbb{R}$.

40 $f(x)=3x+\frac{3}{x^2}$ • $I=]0\,;+\infty[$.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Primitives d'une fonction

→ Aide Cours 1 p. 254

Question de cours

41 **1.** Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. Quand dit-on que F est une primitive de f sur I ?
2. Soit F et G deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I. Que dire de la fonction $F - G$?
3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Combien de primitives F de f vérifient $F(1) = 5$?

42 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
1. $f(x) = 5$ **2.** $f(x) = x$ **3.** $f(x) = 3x$
4. $f(x) = -2x^2$ **5.** $f(x) = 7x - 1$

43 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
1. $f(x) = 4x^2$ **2.** $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$

44 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ deux primitives :
1. $f(x) = \frac{3}{2}$ **2.** $f(x) = x + 2$ **3.** $f(x) = 5x$
4. $f(x) = 3x^2$ **5.** $f(x) = 4x + 3$

45 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $]0\,;+\infty[$, deux primitives :
1. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ **2.** $f(x) = \frac{3}{x^2}$ **3.** $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$
4. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ **5.** $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

46 Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, déterminer la primitive qui s'annule pour $x = 1$.
1. $f(x) = 4$ **2.** $f(x) = x$ **3.** $f(x) = -3x$
4. $f(x) = 6x^2$ **5.** $f(x) = 3x + 1{,}5$

47 Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $]0\,;+\infty[$, déterminer la primitive qui s'annule pour $x = 1$.
1. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ **2.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **3.** $f(x) = -\frac{3}{x^2}$
4. $f(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$ **5.** $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$.

48 **1.** Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 9x + 1$.
2. En déduire deux primitives de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 9x^2 - 9$.

49 **1.** Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + \frac{2}{x} - 7$.
2. En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 4x - \frac{2}{x^2}$ qui vérifie $G(1) = 1$.

50 **1.** Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x)$.
2. En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\cos(x)$ qui vérifie $G(0) = 1$.

51 **1.** Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + 5$.
2. En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\sin(x)$ qui vérifie $G(0) = 0$.

Dans les exercices 52 à 59, montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

52 $f(x) = 4$ • $F(x) = 4x + 3$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

53 $f(x) = -7$ • $F(x) = -7x + 8$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

54 $f(x) = 4x - 4$ • $F(x) = 2x^2 - 4x + 8$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

55 $f(x) = 3x^2 - 3$ • $F(x) = x^3 - 3x + 4$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

56 $f(x) = 4x^2 - 7x + 4$ • $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x + 5$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

57 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ • $F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - x + 1$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

58 $f(x) = \frac{-2}{x^2} + 5x$ • $F(x) = \frac{2}{x} + \frac{5}{2}x^2$ • $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

59 $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x^2}$ • $F(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x}$ • $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Dans les exercices 60 à 65, vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I puis déterminer la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

60 $f(x) = 8x - 3$ • $F(x) = 4x^2 - 3x + 8$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

61 $f(x) = x^2 + 3$ • $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x + 4$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = 3$ et $y_0 = 5$.

62 $f(x) = 3x^2 + 9x$ • $F(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = 2$ et $y_0 = 1$.

63 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 3$ • $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.

64 $f(x) = 6x^5 + 6x^2 + 1$ • $F(x) = x^6 + 2x^3 + x + 4$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = -1$ et $y_0 = -1$.

65 $f(x) = 3\sin(x) - 4\sin(2x)$ • $F(x) = 2\cos(2x) - 3\cos(x) + 1$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ • $x_0 = \pi$ et $y_0 = 1$.

Primitives des fonctions de référence

→ Aide Cours 1 p. 254

Question de cours

66 **1.** Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction carré et de la fonction cube.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x$.
3. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction cosinus et de la fonction sinus.
4. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^n$.

Dans les exercices 67 à 73, déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I à l'aide des primitives des fonctions de référence.

67 $f(x) = x + 1$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

68 $f(x) = 4x + 5$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

69 $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{3}{4}$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

70 $f(x) = x^2 - x + 1$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

71 $f(x) = 2x^3 + 2x - 1$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

72 $f(x) = -3\cos(x) + 2\sin(x)$ • $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

73 $f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{x^2}$ • $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

74 Pour chacune des fonctions suivantes, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.
1. $f(x) = 5x + 7$
2. $f(x) = x^2 + 5x + 3$
3. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{1}{3}$
4. $f(x) = x^3 - x^2$

75 Pour chacune des fonctions suivantes, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner la primitive de f qui s'annule en $x = 1$.
1. $f(x) = 4x - 7$
2. $f(x) = 3x^2 + 6x - 3$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - \frac{1}{4}$
4. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2x$

76 On considère la fonction f définie par $f(x) = 5x + 0,5$.
1. Justifier que f a des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x = -1$.
3. Peut-on trouver une primitive de f qui prend la valeur 1 en $x = 0$?

77 On considère la fonction g définie par :
$g(x) = 3x^2 + 1,5x - 3$.
1. Justifier que g a des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de g qui s'annule en $x = 2$.

QCM

78 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
1. La fonction F, définie sur $]0\,;+\infty[$, primitive de la fonction f, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$, est :
a. $F(x) = 2x - \frac{1}{x}$
b. $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$
c. $F(x) = x^2 + \frac{1}{x} + 8$
2. La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$, est :
a. $F(x) = 2x^2 + 3x + 5$
b. $F(x) = x^2 + 3x + 2$
c. $F(x) = (2x + 3)^2$
3. La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 2x^2 - 7$, est :
a. $F(x) = 4x^3 + 4x$
b. $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 - 7x + 8$
c. $F(x) = (x^2 + 1)^3 + x$
4. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui a pour primitive la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x$ est :
a. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 5$
b. $f(x) = 12x^2 + 12x - 4$
c. $f(x) = x^2(x^2 + 2x - 2) - 5$
5. La fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x + 1)$ est :
a. $F(x) = \sin(2x + 1)$
b. $F(x) = -2\sin(2x + 1)$
c. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 1)$
6. La fonction F définie sur $\mathbb{R}$, primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x + \pi)$ est :
a. $F(x) = 3\cos(x)$
b. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x + \pi)$
c. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

Vrai ou faux

79 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f.
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
1. Si $F(x) = 4x^3 + 5x + 4$ alors $f(x) = 12x + 5$.
2. Si $f(x) = x^3 - 4x$, alors f admet une seule primitive qui s'annule en 0.
3. Si F et G sont deux primitives de f, alors : $F - G$ est une fonction constante.
4. Si F et G sont deux primitives de f, alors : $F(0) - G(0) = F(2) - G(2)$.
5. Si F et G sont deux primitives de f, alors : $F(2) - F(0) = G(2) - G(0)$.
6. Si $F(x) = 6x^2 - 4x + 2$ alors $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$.
7. Si pour tout x réel, $f(x) > 0$, alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
8. Si pour tout x réel, $F(x) < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercices

Pour s'entraîner

Primitives d'une fonction

Dans les exercices 80 à 84, montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

80 $f(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ • $F(x)=\dfrac{1}{x^2}+4$ • $I=]0\,;+\infty[$.

81 $f(x)=x^2+2\sin(2x)$ • $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\cos(2x)$ • $I=\mathbb{R}$.

82 $f(x)=\sin(3x)-\cos(4x)$
• $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x)-\dfrac{1}{4}\sin(4x)+2$ • $I=\mathbb{R}$.

83 $f(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ • $F(x)=\dfrac{1}{x+1}$ • $I=]-1\,;+\infty[$.

84 $f(x)=\sin(x)+x\cos(x)$ • $F(x)=x\sin(x)$ • $I=\mathbb{R}$.

→ Voir Exercice résolu 1 p. 255

Dans les exercices 85 à 88, vérifier que F est une primitive de f sur l'intervalle I puis déterminer la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

85 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $F(x)=2+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $y_0=1$.

86 $f(x)=\sin(2x+\pi)$ • $F(x)=-\dfrac{1}{2}\cos(2x+\pi)$ • $I=\mathbb{R}$ • $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ et $y_0=0$.

87 $f(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$ • $F(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ • $I=]0\,;+\infty[$ • $x_0=1$ et $y_0=0$.

88 $f(x)=-\dfrac{4}{(2x-1)^2}$ • $F(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ • $I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ • $x_0=2$ et $y_0=0$.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 255

Primitives des fonctions de référence

Dans les exercices 89 à 94, déterminer toutes les primitives de f sur l'intervalle I à l'aide des primitives des fonctions de référence.

89 $f(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{2}$ • $I=\mathbb{R}$.

90 $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+3}{x^2}$ • $I=]0\,;+\infty[$.
(On écrira $f(x)$ sous la forme $f(x)=ax-bx+\dfrac{c}{x^2}$; a, b, c constantes réelles à déterminer.)

91 $f(x)=3\sin(x)-2x$ • $I=\mathbb{R}$.

92 $f(x)=5x^2+x-2\cos(3x)$ • $I=\mathbb{R}$.

93 $f(x)=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $I=\mathbb{R}$.

94 $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ $I=\mathbb{R}$.

→ Voir Exercice résolu 3 p. 257

95 À l'aide des primitives des fonctions de référence, déterminer toutes les primitives de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3\sin(3x+\pi)-\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$.

96 Pour chacune des fonctions suivantes, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f sur I.

1. $f(x)=\dfrac{5}{x^2}-4$ **2.** $f(x)=2x^2-\dfrac{3}{x^2}$
3. $f(x)=\sin x-\cos x$ **4.** $f(x)=2\sin 3x+4\cos 2x$

97 Pour chacune des fonctions suivantes, donner un intervalle I sur lequel f a des primitives et donner toutes les primitives de f qui s'annule en $x=1$.

1. $f(x)=\dfrac{2}{x^2}+x^2$ **2.** $f(x)=3x-x^3+\dfrac{3}{x^2}$
3. $f(x)=\dfrac{1}{4}\sin 2\pi x-2\sin\pi x-\dfrac{1}{4}$
4. $f(x)=4x^3+3x^2-\dfrac{2}{x^2}$
5. $f(x)=\dfrac{x^3-5x+4}{5}$

98 On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}+0{,}5$.
1. Justifier que f a des primitives sur $]0\,;+\infty[$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x=1$.
3. Peut-on trouver une primitive de f qui prend la valeur 1 en $x=2$?

99 On considère la fonction g définie par $g(x)=3\sin 2x-4\sin 3x$.
1. Justifier que g a des primitives sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive de f qui s'annule en $x=\pi$.

100 Soit F et G deux fonctions définies sur $I=]0\,;+\infty[$ par :
$F(x)=-x^2+2x+\dfrac{4}{x}+1$ $G(x)=x(2-x)+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{2}$
1. Montrer que F et G sont dérivables sur I puis prouver que $F'(x)=G'(x)$.
2. En déduire que F et G sont deux primitives sur I d'une même fonction f que l'on précisera.
3. Déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

101 Considérons les fonctions f et g définie sur $I=]3\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^2+\dfrac{7}{(x-3)^2}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$.
On souhaite déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(4)=0$ et de dresser son tableau de variation.
1. Déterminer le signe de x^2 et $\dfrac{7}{(x-3)^2}$ sur I, en déduire celui de f et le sens de variation de F.
2. Calculer $g'(x)$, en déduire une primitive sur I de la fonction $x\mapsto\dfrac{7}{(x-3)^2}$ puis une primitive de la fonction f.
3. Donner l'expression de F ; on rappelle que $F(4)=0$.
4. Dresser le tableau de variation de F.

102 ALGO PYTHON **Modifier un programme**

En Python, on peut définir une fonction mathématique de cette manière :

```
def f(x) :
    return x**2-4*x-10
```

Ici, on a par exemple défini la fonction $f : x \mapsto x^2 - 4x - 10$.
On peut alors comme en mathématiques demander à Python d'afficher l'image de 3 par f ainsi : `print ( f(3) )`

1. Décrire ce que fait le programme suivant :

```
from lycee import *

def f(x) :
    return x**2-4*x-10

pas = 0.1
x = -5
while x < 5 :
    repere.plot(x,f(x),'r.')
    x = x + pas

repere.grid()
repere.show()
```

2. Écrire un programme en Python qui demande un réel a et affiche une valeur approchée de $f'(a)$.

3. Modifier le programme de la question **1.** pour que Python trace sur un même graphique la courbe de f et de f'.

103 On considère que l'accélération d'un TGV est de 0,2 m.s^{-2}.
Un TGV part avec une vitesse nulle à l'instant 0 : $v(0) = 0$.

1. Sachant que la vitesse est une primitive de l'accélération, déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t sachant que $v(0) = 0$.

2. Au bout de combien de temps le TGV aura-t-il atteint sa vitesse de croisière 83 m.s^{-1} ? Exprimer ce temps en secondes puis en minutes.

3. a. La distance parcourue $x(t)$ est une primitive de la vitesse. Sachant que $x(0) = 0$, exprimer $x(t)$ en fonction de t.

b. Quelle est la distance parcourue par le TGV en fin d'accélération, c'est-à-dire lorsque $v(t)$ atteint 83 m.s^{-1}.

c. Lors de cette phase d'accélération, combien de temps lui faut-il pour parcourir les 10 premiers kilomètres, quelle sera alors sa vitesse ?

→ Voir Exercice résolu 4 p. 257

104 Soit f la fonction définie sur $I =]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$ et g la fonction définie sur I par $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

1. Déterminer le réel a tel que, pour tout x de I, $f(x) = 1 + \dfrac{a}{(x-1)^2}$.

2. Calculer $g'(x)$.

3. En déduire la primitive F de f sur I qui s'annule en $x = 2$.

105 Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout x de $]-1\,;+\infty[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2. En déduire la primitive F de f sur $]-1\,;+\infty[$ telle que $F(0) = 1$.

106 **À chacun sa série** STL

La « rapidité » d'une vitesse de réaction qui s'effectue à volume constant est caractérisée, à un instant donné, par la **vitesse volumique de réaction.** v est aussi appelée « vitesse de réaction ». La vitesse volumique de réaction v, à l'instant t, est égale à $v(t) = \dfrac{1}{V} \times \dfrac{dx}{dt}(t)$, où V est le volume total du mélange réactionnel et $x(t)$ l'avancement de la réaction à l'instant t. $x(t)$ désigne la quantité de matière qui a disparu à l'instant t. À l'issue d'un TP , on a obtenu le tableau ci-dessous :

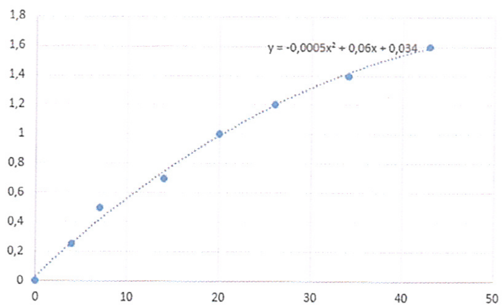
t (min)	0	4	7	14	20	26	34	43
$x(t)$ (mmol)	0	0,25	0,5	0,7	1	1,2	1,4	1,6

On donne $V = 1{,}0$ L.

1. Tracer la courbe de l'avancement de x en fonction de t dans un repère orthogonal avec pour unités 1 cm pour 2 min en abscisse et 1 cm pour 0,2 mmol en ordonnée.

2. Que représente mathématiquement $x(t)$ par rapport à la vitesse de réaction ?

3. Voici ce qui est affiché sur une feuille de tableur après l'insertion d'une courbe de tendance polynômiale de degré 2 correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.



Quelle expression propose le tableur pour $v(t)$? En déduire une expression de $x(t)$.

107 **À chacun sa série** STI2D

On enregistre les mouvements d'un solide à des intervalles de temps égaux à 20 ms sur un axe horizontal.
L'échelle des distances est 1 cm ↔ 50 cm. La vitesse au point A_1 est nulle.

1. Déterminer la vitesse moyenne entre A_1 et A_6.

2. Déterminer la vitesse instantanée en A_2.

3. Même question pour A_3.

4. Comment peut-on qualifier le mouvement ?

5. Que peut-on dire de son accélération ?

6. En déduire une expression $x\,(t)$ de la position du solide à l'instant t.

Exercices

Pour faire le point

Tests

S'entraîner en ligne

lienmini.fr/10333-214

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

	V	F
108 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 3x^2 - 2x$ est $F : x \mapsto x^3 - x^2 + 3$.		
109 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 2x + 1$ est $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x + 1$.		
110 Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors $2 \times F$ est une primitive de la fonction $2 \times f$ sur I.		
111 Si F et G sont respectivement une primitive de f et g sur un intervalle I, alors $F \times G$ est une primitive de $f \times g$ sur I.		
112 Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle I. Si f est positive sur I, alors F est croissante sur l'intervalle I.		
113 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos(2x + \pi)$. Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto -\sin(2x + \pi)$ est une primitive de f.		
114 Soit la fonction f définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = \sin(x)$. Alors la primitive F de f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ telle que $F(0) = 1$ est croissante sur $[0 ; \pi]$.		
115 Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I. Si f est croissante et positive sur I, alors F est également positive et croissante sur I.		

→ Vérifier les résultats p. 294

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

116 Soit la fonction f définie sur $]7 ; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + x + \frac{1}{(x-7)^2}$.

Une primitive F de f est donnée par :

a. $F(x) = 6x + 1 + \frac{2}{(x-7)^3}$

b. $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{(x-7)}$

c. $F(x) = 9x^3 + x^2 + \frac{1}{(x-7)}$

d. $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{(x-7)}$

117 Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x^2} + 1$. Alors une primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ est :

a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{x} + x$

b. $F(x) = x^3 - \frac{3}{x} + x + 1$

c. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{x} + x + 3$

d. $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{x} + x$

118 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\cos(3x + \pi)$. Alors une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est :

a. $F(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x + \pi)$

b. $F(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) + \pi x$

c. $F(x) = -\sin(3x + \pi)$

d. $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x + \pi)$

→ Vérifier les résultats p. 294

119 **In English**

An antiderivative of a function f is a function F whose derivative is f. Another term for antiderivative is *indefinite integral*. It is written $\int f(x)dx$.

A function f has its derivative $\frac{df}{dx} = f'(x) = 3x^2 + 1$.

1. Find an antiderivative of f over the interval $\mathbb{R}$.

2. We know that the curve of an antiderivative F of f passes through the point (0,2). Find F.

120 COMPÉTENCE **Calculer**

Un mobile glisse sans frottement le long d'un axe horizontal muni d'un repère $(O, \vec{i})$. Son accélération instantanée à l'instant t est donnée par : $a(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la vitesse initiale est nulle, déterminer $v(t)$, vitesse instantanée du mobile en fonction de t.

2. À $t = 0$, le mobile, représenté par le point M d'abscisse $x(t)$ sur l'axe $(O, \vec{i})$, se trouve en O. Exprimer l'abscisse de M en fonction de t.

121 COMPÉTENCE **Raisonner**

On lance à partir du sol une bille verticalement vers le haut, à la vitesse initiale de 20 m.s^{-1}. Le but de l'exercice est de savoir à quelle hauteur monte-t-elle et au bout de combien de temps revient-elle sur terre. La bille subit une accélération constante $g = -9{,}8$ m.s^{-2}.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de la fonction constante $x \mapsto -9{,}8$ qui vérifie $v(0) = 20$.

2. À quel instant t_0 la vitesse s'annule-t-elle ? Que fait la bille avant t_0 ? Après t_0 ?

3. Déterminer l'altitude $h(t)$ de la bille, c'est-à-dire la primitive de la fonction v qui vérifie $h(0) = 0$.

4. En déduire à quel instant t la bille retombe au sol.

122 COMPÉTENCE **Calculer**

Dans chacun des cas, montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ • $F(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ • $I = \mathbb{R}$.

2. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ • $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ • $I = \mathbb{R}$.

3. $f(x) = 4\sin(4x + \pi) + 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ • $F(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(4x + \pi)$ • $I = \mathbb{R}$.

4. $f(x) = 4x\sin(2x)$ • $F(x) = \sin(2x) - 2x\cos(2x)$ • $I = \mathbb{R}$.

5. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ • $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$ • $I =]-1\,;+\infty[$.

123 COMPÉTENCE **Calculer**

Déterminer la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

1. $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 8x$ • $I = \mathbb{R}$
• $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.

2. $f(x) = 4x - \frac{1}{x^2}$ • $I =]0\,;+\infty[$
• $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

3. $f(x) = 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ • $I = \mathbb{R}$
• $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $y_0 = 0$.

124 COMPÉTENCE **Raisonner**

Sur un circuit, une voiture de sport passe de 0 à 200 km.h^{-1} en 11 s.

1. Calculer l'accélération moyenne pendant ces 11 secondes (rappel : $\gamma = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ si la vitesse passe de v_1 à v_2 entre les instants t_1 et t_2 ; t_1 et t_2 exprimés en secondes, v_1 à v_2 exprimés en m.s^{-1}). Par la suite, on supposera que $\gamma = 5$.

2. Exprimer la vitesse instantanée $v(t)$.
Quelle est la vitesse obtenue au bout de 11 secondes ?

3. En supposant que cette accélération reste constante pour atteindre la vitesse maximale de 325 km.h^{-1}, combien de temps faut-il pour atteindre cette vitesse ?

4. Exprimer $x(t)$, la distance parcourue à l'instant t.
Quelle distance aura parcouru la voiture pour passer de 0 à 200 km.h^{-1} ? de 0 à 325 km.h^{-1} ?

Vrai ou faux

125 COMPÉTENCE **Raisonner**

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Justifier.

1. On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 15]. Son tableau de variations est donné ci-dessous.

x	1		3		4		12		15
$f(x)$	3	↘	0	↘	-2	↗	-1	↘	-3

La fonction dérivée f' de f sur l'intervalle [1 ; 15] est :

a. négative sur l'intervalle [3 ; 12].

b. négative sur l'intervalle [1 ; 4].

c. positive sur l'intervalle [4 ; 12].

2. Soit F une primitive de la fonction f définie à la question **1.**

a. F est décroissante sur l'intervalle [1 ; 3].

b. F est décroissante sur l'intervalle [4 ; 15]

c. F est décroissante sur l'intervalle [4 ; 12].

TP

La méthode d'Euler

CAPACITÉ Construire point par point, par la méthode d'Euler, une approximation de la courbe représentative de la solution d'un problème de Cauchy du type : $y'(t) = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

PARTIE 1 Quelques commandes utiles sous Python

Sous Python, pour construire une liste de nombres, on utilise la commande $\boxed{[\,]}$.
Par exemple, X = [x] signifie que le nombre x appartient à la liste nommée X.
Si on veut ajouter un élément nommé x_1 à la liste X, on utilise la commande $\boxed{\text{X.append}(x_1)}$.
Pour utiliser les fonctions mathématiques, il faut importer la bibliothèque math.
Pour obtenir un graphique, il faut importer la bibliothèque matplotlb.pyplot.
La commande $\boxed{\text{plot}(x,y)}$ trace le point de coordonnées $(x\,;y)$.
La commande $\boxed{\text{grid}(\,)}$ affiche une grille dans un repère.
La commande $\boxed{\text{show}(\,)}$ montre le graphique dans une nouvelle fenêtre.

PARTIE 2 Lire un programme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;5]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et avec $f(1) = 0$.

```
from matplotlib.pyplot import *
from math import *

def f(x):
    return 1/x
x0=1
y0=0
n=100
xf=5
h=(xf-x0)*1.0/n

def euler(f,x0,y0,xf,n):
  x=x0
  y=y0
  X=[x]
  Y=[y]
  for k in range(n):
      y=y+h*f(x)
      x=x+h
      Y.append(y)
      X.append(x)
  return X,Y

X,Y=euler(f,x0,y0,xf,n)
print(X,Y)
plot(X,Y,'ro')
grid()
show()
```

1. Voici une image d'un éditeur de programmation en Python où est écrit un programme qui permet, en utilisant la méthode d'Euler, d'afficher le tableau de valeurs de la fonction f et de construire sa courbe représentative.

2. Dans ce programme :

a. Que signifie la commande $\boxed{\text{def } f(x)}$? Que représente la variable h ? La variable n ?

b. Que faut-il modifier si on souhaite un pas plus petit entre deux valeurs de x ?

c. Dans le troisième bloc d'instruction, dans la boucle $\boxed{\text{for}}$, que signifie l'instruction $\boxed{y = y + h*f(x)}$?

```
def euler(f,x0,y0,xf,n):
  x=x0
  y=y0
  X=[x]
  Y=[y]
  for k in range(n):
      y=y+h*f(x)
      x=x+h
      Y.append(y)
      X.append(x)
  return X,Y
```

PYTHON En salle informatique lienmini.fr/10333-215

1. Modifier ce programme pour que le graphique affiche le tableau de valeurs de f et sa courbe représentative pour un pas $h = 0{,}01$.

2. Modifier ce programme pour que le graphique affiche la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0\,;10]$ par $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g(0) = 0$.

126 On désigne par I l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Soit f la fonction définie par $f(x)=\cos x+\sin x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis la fonction dérivée seconde f'' de f.

2. a. Montrer que pour tout nombre réel x de I, $f''(x)\leqslant 0$.

b. En déduire le tableau de variations de f' sur I.

c. Calculer $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à I.

d. En déduire le tableau de variations de f sur I.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. (Unités : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur celui des ordonnées)

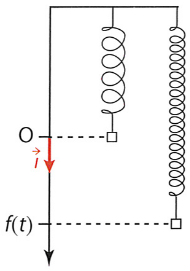
4. a. Déterminer une primitive de f sur I.

b. Soit g la fonction définie sur I par $g(x)=[f(x)]^2$. Exprimer $g(x)$ à l'aide de $\cos x$ et de $\sin x$.

c. En déduire une primitive de g sur I.

d. Déterminer la primitive de g qui s'annule en 0.

127 STI2D Un mobile, de masse 1 kg, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k=9$ N/m.



Si l'on écarte le mobile de sa position d'équilibre O, il effectue des oscillations autour de cette position.

À chaque instant t, la position du mobile est repérée par son abscisse $f(t)$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\vec{i}\right)$. Les lois de la physique montrent que la fonction f vérifie la relation (E) : $f''+9f=0$, où f'' désigne la dérivée seconde de f.

1. Montrer que les fonctions f de la forme :
$f(t)=A\cos(3t)+B\sin(3t)$, où A et B sont des constantes réelles, vérifient la relation (E).
Que représente $f''(t)$ pour le mobile à l'instant t ? Et $f'(t)$?

2. On sait qu'à l'instant $t=0$, le mobile est au point d'abscisse $f(0)=0{,}5$ m et a une vitesse initiale $f'(0)=1{,}5$ m.s^{-1}.
Déterminer les valeurs des réels A et B.

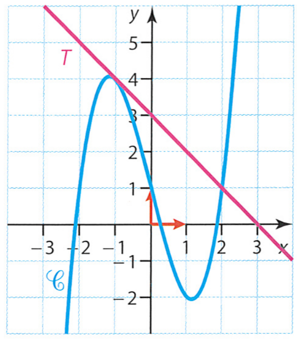
3. On admet que $f(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)$.

a. Résoudre l'équation $f(t)=0$.

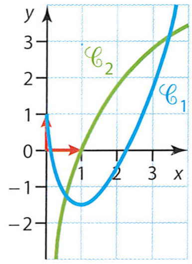
b. À partir de l'instant $t=0$, au bout de combien de temps le mobile repassera-t-il pour la première fois à sa position d'équilibre ? (on donnera la réponse arrondie au millième de seconde).

128 Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-4\,;\,4]$. La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(-1)$ et de $f'(-1)$ où f' est la fonction dérivée de f.



2. Le graphique ci-contre donne deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Ces deux courbes sont représentatives de deux fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$: une fonction h et une de ses primitives H. Indiquer, en justifiant votre réponse, laquelle des deux courbes $\mathscr{C}_1$ ou $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction H.



129 En 2015, le gérant d'une brasserie de bord de plage propose, le midi, un menu à 9,80 €. À ce tarif, il sert en moyenne 420 couverts par semaine. Il décide d'augmenter ses tarifs les étés suivants. Il observe une légère diminution du nombre de couverts mais sa formule demeure rentable.

Après une étude du nombre de couverts suivant le prix du menu, il apparaît que le nombre hebdomadaire moyen de couverts en fonction du prix x du menu peut être représenté par la fonction N définie par $N(x)=-19x+604$.
Le prix x du menu est exprimé en euros.

1. Calculer le nombre hebdomadaire moyen de couverts lorsque le prix du menu est de 11 €.

2. Calculer le chiffre d'affaires hebdomadaire réalisé par la brasserie lorsque le menu est au prix de 11 €.

3. On note $C(x)$ le chiffre d'affaires hebdomadaire en euros pour un prix du menu de x euros.
Montrer que $C(x)=-19x^2+604x$.

4. On note $R(x)$ le coût de revient de $N(x)$ couverts pour un prix du menu à x euros.
On a déterminé que $R(x)=-9{,}5x^2$.

a. Montrer que le bénéfice moyen hebdomadaire $B(x)$ obtenu par la brasserie est la primitive de $N(x)$, qui s'annule en $x=0$.

b. Pour quelle valeur de x le bénéfice est-il maximal ?
On arrondira le résultat au centime d'euro.
Quel est alors le bénéfice de la brasserie ?
Arrondir à l'euro près.