12 Primitives

CAPACITÉS

- Calculer des primitives.
- Construire point par point, par la méthode d'Euler, une approximation de la courbe représentative de la solution d'un problème de Cauchy du type : $y'(t) = f(t)$ et $y(t_0) = y_0$.

Saut vertical d'une nageuse.

Une nageuse effectue un saut d'un plongeoir situé à 8 m de hauteur. La connaissance de l'accélération à laquelle elle est soumise permet de prévoir sa vitesse instantanée en fonction du temps t.

Quelle sera la vitesse instantanée de la nageuse à 3 m au-dessus de l'eau ?

Vidéo
En chute libre !
lienmini.fr/10333-211

→ Pour le découvrir **Activité 1** p. 252

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde ou du tronc commun

Questions Flash
Diaporama
10 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10333-212

1 Ensemble de définition d'une fonction

On appelle ensemble de définition d'une fonction f l'ensemble des nombres réels qui ont une image par la fonction f.
Exemple : la fonction racine carrée a pour ensemble de définition l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2 Définition et signe d'une fonction affine

On appelle fonction affine une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$, avec a et b des réels donnés.
Tableau de signes de l'expression $ax + b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

3 Définition d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3

- On appelle fonction polynôme de degré 2 une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels donnés, où $a \neq 0$.
- On appelle fonction polynôme de degré 3 une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, avec a, b, c et d des réels donnés, où $a \neq 0$.

Vérifier les acquis de Seconde ou du tronc commun

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x+3}$ est :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{-3}{2}\right\}$	$\mathbb{R}\backslash\{1{,}5\}$	1
2. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{3-x}$ est :	$]-\infty\,;3]$	$[3\,;+\infty[$	$]-\infty\,;-3]$	$[-3\,;+\infty[$	1
3. L'expression $2-x$ est positive ou nulle sur l'intervalle :	$[2\,;+\infty[$	$[-2\,;+\infty[$	$]-\infty\,;2]$	$]-\infty\,;-2]$	2
4. L'expression $3x-3$ est négative ou nulle sur l'intervalle :	$[1\,;+\infty[$	$[-1\,;+\infty[$	$]-\infty\,;1]$	$]-\infty\,;-1]$	2
5. L'une des solutions de l'équation $x^2+2x-3=0$ est :	0	-1	1	3	3
6. L'expression $2(x+1)^3-2x^3+3$ est celle :	d'une fonction affine.	d'un polynôme de degré 2.	d'un polynôme de degré 3.	Rien de tout cela.	3

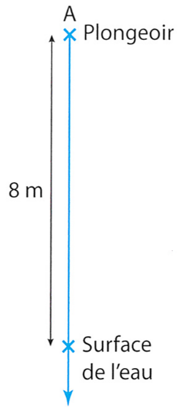
→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Plongeons dans le grand bain !

OBJECTIF Définir une primitive → Cours 1A p. 254

Une plongeuse saute verticalement à partir d'un point A d'un plongeoir. Ce dernier est situé à 8 m au-dessus de la surface de l'eau. La position de la plongeuse à un instant t est repérée par $y(t)$ sur un axe vertical orienté vers le bas, d'origine A.
La plongeuse subit une accélération constante $g = 9{,}8$ m.s^{-2}, car on suppose qu'elle est en chute libre, c'est-à-dire qu'elle n'est soumise qu'à la force de son poids pour simplifier.
On rappelle qu'en cinématique, l'accélération instantanée $a(t)$ est la dérivée de la vitesse instantanée $v(t)$, qui est elle-même la dérivée de la position $y(t)$ de la plongeuse à l'instant t.



1. Déterminer une expression possible de la vitesse instantanée $v(t)$ de la plongeuse, sachant que $a(t) = 9{,}8$.
On dira que $v(t)$ est une primitive de $a(t)$.

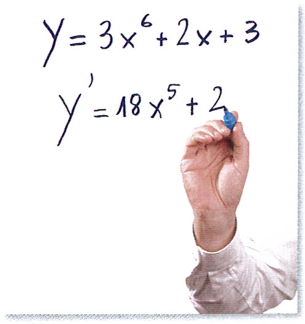
2. Existe-t-il d'autres expressions possibles de cette vitesse donnant la même accélération ? Si oui, parmi celles-ci, laquelle correspond à une vitesse nulle à l'instant $t = 0$?
On admet ensuite que la vitesse instantanée de la plongeuse à l'instant t est donnée par $v(t) = 9{,}8t$.

3. Montrer que l'expression de la position $y(t)$ de la plongeuse à l'instant t est égale à $4{,}9t^2 + C$, où C est une constante réelle. Quelle est la valeur de C si à $t = 0$, $y(t) = 0$?
On dira que $y(t)$ est la primitive de $v(t)$ qui s'annule en $t = 0$.

4. a. À quel instant t se trouve la plongeuse à 3 m au-dessus de l'eau ?
b. Quelle est alors sa vitesse à cet instant ? Donner cette vitesse en m.s^{-1} puis en km.h^{-1} en arrondissant à 1 km.h^{-1} près.

2 Primitives des fonctions de référence

OBJECTIF Calculer une primitive d'un polynôme → Cours 2A p. 256



Soit g_1, g_2, g_3, g_n ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$) les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = x^3$, $g_3(x) = x^4$, $g_n(x) = x^n$.

1. Déterminer les fonctions dérivées de g_1, g_2, g_3, g_n ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$).

2. En déduire des primitives des fonctions h_1, h_2, h_3, h_n ($n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$) définies sur $\mathbb{R}$ par $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2$, $h_3(x) = x^3$, $h_n(x) = x^n$.

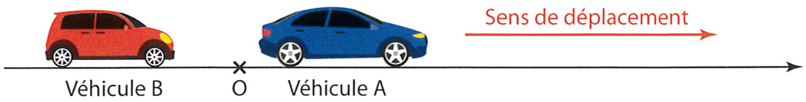
3. Déterminer alors une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions h_4 et h_5.

4. Considérons la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 8x$.
a. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ pour chacune des fonctions suivantes :
$x \longmapsto 3x^2$
$x \longmapsto 8x$
b. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
Indication : la dérivée d'une somme est la somme des dérivées et si on multiplie une fonction par une constante, sa dérivée est multipliée par cette même constante.

5. Procéder de la même manière pour trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions k et l suivantes définies par : $k(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - 7$ et $l(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 9$.

3 Des primitives à l'infini

OBJECTIF Déterminer toutes les primitives d'une fonction → Cours 1B p. 254



Deux véhicules A et B, roulant à la même vitesse, se suivent sur une route représentée par une droite graduée d'origine O. On notera $y_A(t)$ et $y_B(t)$ les abscisses respectives des véhicules A et B. À l'instant $t = 0$, le véhicule A passe à la vitesse constante de 13 m.s^{-1} devant le point O d'abscisse 0 et à l'instant $t = 5$, le véhicule B passe devant ce même point O. On rappelle que la distance parcourue est une primitive de la vitesse.

1. Déterminer $y_A(t)$ et $y_B(t)$, les distances respectives parcourues par les véhicules A et B. Vérifier que $y_A(1) = 13$ et $y_B(5) = 0$.

2. Vérifier que la différence $y_A(t) - y_B(t)$ est une constante.

3. Généralisation : soit F et G deux primitives d'une fonction f définie sur un intervalle I. Posons, pour tout x de I, $H(x) = F(x) - G(x)$. Calculer $H'(x)$. Que remarque-t-on ? En déduire un lien entre F et G.

4 Méthode d'Euler à l'aide d'un tableur

TABLEUR

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

OBJECTIF Construire une courbe approchée de la courbe représentative d'une fonction → TP p. 266

Soit f une fonction de la variable x qui vérifie l'équation (E) : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et la condition $f(0) = 0$.

A priori, on ne connaît pas la fonction f qui vérifie ces égalités, ou du moins on n'en a pas une « forme » explicite. On cherche alors à construire une approximation de la courbe $\mathscr{C}$ de cette fonction f, solution de l'équation (E), sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Pour cela, on utilise le résultat suivant pour approcher $\mathscr{C}$ par celle d'une fonction affine par morceaux.

PROPRIÉTÉ ADMISE • soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit a un réel appartenant à I. Alors la meilleure approximation affine de f en $a + h$ est donnée par l'égalité : $f(a+h) = f(a) + h f'(a)$ avec h proche de 0.

Principe de la méthode d'Euler

À partir d'un point $M_0(x_0 ; y_0)$ connu de la courbe $\mathscr{C}$, on trace une ligne polygonale qui est proche de la courbe $\mathscr{C}$.

1. On place $M_0(x_0 ; y_0)$.

2. On choisit $h \neq 0$ proche de 0.

3. On pose $x_1 = x_0 + h$. On a alors d'après la propriété : $f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0)$.

4. On place le point M_1 de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$.

5. On réitère l'étape **3.** en prenant $x_2 = x_1 + h$ et on place le point M_2 de coordonnées $(x_2 ; y_2)$ et ainsi de suite.

Euler, mathématicien suisse (1707-1783).

Mise en œuvre sur l'intervalle $[0 ; 1]$ avec un pas de 0,1

On va donc construire une suite de points M_0, M_1, M_2… d'abscisses respectives $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$…

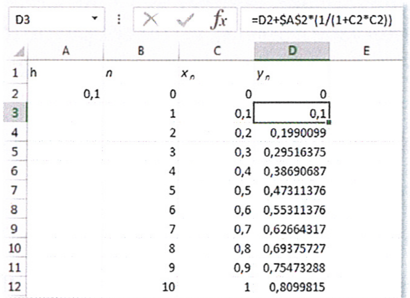
1. Quelle est la valeur de y_0 ?

2. Montrer que $y_{n+1} = y_n + 0,1 \times \dfrac{1}{1+x_n^2}$ pour n entier positif compris entre 0 et 9.

3. Construire une feuille de calcul comme ci-contre :
En D3, on pourra entrer la formule $\boxed{= \text{D2+\$A\$2*(1/(1 + C2*C2))}}$.

4. Insérer sur la feuille le nuage de points obtenus. On a ainsi la **courbe représentative** de la fonction f.

5. Reproduire la méthode en modifiant la feuille de calcul avec un pas $h = 0,05$.



D3 =D2+A2*(1/(1+C2*C2))

	A	B	C	D	E
1	h	n	x_n	y_n	
2	0,1	0	0	0	
3		1	0,1	0,1	
4		2	0,2	0,1990099	
5		3	0,3	0,29516375	
6		4	0,4	0,38690687	
7		5	0,5	0,47311376	
8		6	0,6	0,55311376	
9		7	0,7	0,62664317	
10		8	0,8	0,69375727	
11		9	0,9	0,75473288	
12		10	1	0,8099815	

Cours

1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

A Notion de primitive

DÉFINITION Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F est une **primitive de f sur** I si F est dérivable sur I et $F' = f$ (la dérivée de F est égale à f).

EXEMPLE • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$: F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $F'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = f(x)$.

REMARQUES
• On peut dire que déterminer une primitive d'une fonction est l'opération « inverse » de la détermination de la dérivée de cette même fonction.
• Il existe un théorème qui affirme que toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur I.
• Toutes les fonctions de référence rencontrées dans le programme de 1re admettent des primitives sur les intervalles de leur ensemble de dérivabilité.

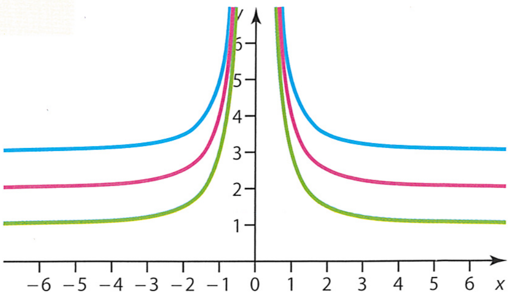
→ Voir Exercice résolu 1

B Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

THÉORÈME **(admis)** Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est constitué des fonctions définies sur I par : $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

REMARQUE • Dès lors qu'une fonction f admet une primitive F sur I, alors elle admet *une infinité de primitives* sur I, qui diffèrent de F par une constante.

EXEMPLE • L'ensemble des primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{2}{t^2} + 1$ sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \frac{-2}{t} + t + C$, où C est une constante réelle. Voir leurs représentations ci-contre.



C Primitive prenant une valeur donnée y_0 en x_0

THÉORÈME **(admis)** Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit (x_0, y_0) un couple de réels. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

EXEMPLE • Déterminer la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{2}{t^2} + 1$, prenant la valeur 0 en $t = 1$.
Une primitive F de f est donnée par $F(t) = \frac{-2}{t} + t + C$, où C est une constante réelle. On détermine la valeur de C telle que $F(1) = 0$. On obtient $C = 1$.
La primitive cherchée est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \frac{-2}{t} + t + 1$.

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Reconnaître une primitive F d'une fonction f sur un intervalle I

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ par $F(x)=\dfrac{2x-5}{x+1}$ et f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ par $f(x)=\dfrac{7}{(x+1)^2}$. Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

Méthode — **Pour reconnaître une primitive F d'une fonction f sur un intervalle I**

1. On **vérifie** que F est dérivable sur l'intervalle donné.
2. On **calcule** $F'(x)$ en utilisant la formule de dérivation adaptée.

Solution

$F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x-5$ et $v(x)=x+1$.

u et v sont des fonctions affines, elles sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

F est le quotient de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $]-\infty\,;-1[$, F est donc dérivable sur cet intervalle.

$F'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\dfrac{2\times(x+1)-(2x-5)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{7}{(x+1)^2}$.

On a bien $F'(x)=f(x)$. F est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ et, pour tout $x\in\,]-\infty\,;-1[$, on a $F'(x)=f(x)$.

Conclusion : F est une primitive de f sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.

→ Voir Exercices 52 à 59 p. 260

Exercice résolu 2 — Déterminer la primitive prenant une valeur donnée y_0 en x_0

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{5}{x^2}+2x-1$.

1. Montrer que les primitives de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ sont les fonctions F définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-5}{x}+x^2-x+C$, où C est une constante réelle.

2. Déterminer la primitive de f prenant la valeur 0 en $x=1$.

Méthode — **Pour déterminer la primitive prenant une valeur donnée y_0 en x_0**

Question 1

1. On **vérifie** que F est dérivable sur l'intervalle donné.
2. On **calcule** $F'(x)$ avec la formule de dérivation adaptée et on montre que $F'(x)=f(x)$.

Question 2

1. On **écrit** que la primitive G cherchée est du type des fonctions F définies au **1.**
2. On **détermine** la valeur de la constante C telle que $G(1)=0$.

Solution

1. Soit F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-5}{x}+x^2-x+C$, où C est une constante réelle. F est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$F'(x)=\dfrac{5}{x^2}+2x-1$ (on utilise les dérivées des fonctions de référence).

On a donc $F'(x)=f(x)$ pour tout $x>0$.

L'ensemble des primitives de f sont les fonctions du type F définies sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-5}{x}+x^2-x+C$.

2. Soit G la primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ prenant la valeur 0 en $x=1$. On a donc : $G(x)=\dfrac{-5}{x}+x^2-x+C$ et $G(1)=0$.

On a donc l'égalité : $\dfrac{-5}{1}+1^2-1+C=0$ soit $-5+C=0$; $C=5$.

$G(x)=\dfrac{-5}{x}+x^2-x+5$.

→ Voir Exercices 60 à 65 p. 260

2 Primitives des fonctions de référence

A Tableau des primitives usuelles

Dans le tableau ci-contre, f est définie sur un intervalle I par $f(x)$ et les primitives F de f sur I sont définies par $F(x)$. C désigne une constante réelle, A, ω et ϕ des réels donnés avec $\omega \neq 0$, a un réel fixé.

Exemples

• Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 7$, $g(x) = x^4$ et $h(x) = 2x^6$. Les fonctions F, G et H définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7x$, $G(x) = \frac{x^5}{5}$ et $H(x) = \frac{2}{7}x^7$ sont des primitives respectivement de f, g et h.

• Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(3x+1)$ et $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Les fonctions F, G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)$ et $G(x) = \frac{1}{2}sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ sont des primitives respectivement de f et g.

Fonction $f(x) =$	Primitive $F(x) =$	Intervalle
a	$ax + b$, b constante réelle	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier naturel	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$a \times x^n$, n entier naturel, a réel	$a \times \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega t + \phi)$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + C$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega t + \phi)$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + C$	$\mathbb{R}$

→ Voir Exercice résolu 3

B Primitives et opérations

Théorème Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.
Si F est une primitive de f sur I, alors $\boldsymbol{kF}$ est une primitive de $\boldsymbol{kf}$ sur I.
Si F est une primitive de f sur I et G est une primitive de g sur I, alors $\boldsymbol{F + G}$ est une primitive de $\boldsymbol{f + g}$ sur I.

Nous en déduisons que pour obtenir la primitive d'une fonction polynôme, il suffit de trouver une primitive de chacun des termes du polynôme et d'ajouter une constante.

Exemple • Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 5x + C$, C étant une constante réelle, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque • Tout comme la dérivée d'un produit de deux fonctions f et g non constantes n'est pas le produit des dérivées f' et g', une **primitive d'un produit** de fonctions f et g non constantes **n'est pas le produit des primitives** F et G.

Exemple • Soit $f(x) = 2x$ et $g(x) = 3x^2$. Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = x^2$ et une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est définie par $G(x) = x^3$.
Le produit des fonctions f et g est défini par $f \times g : x \mapsto 6x^3$. Cette fonction admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions du type $H : x \mapsto 6 \times \frac{1}{4}x^4 + C$, avec C constante réelle.
$H(x) = \frac{3}{2}x^4 + C$ et $H(x) \neq F(x) \times G(x)$.

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 Utiliser les primitives des fonctions de référence

Pour chacune des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, déterminer une primitive F.

1. $f(x) = 2x + 3$.

2. $f(x) = 3x^2 + 1$.

3. $f(x) = 4x^3 + 3x - 1$.

4. $f(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$.

5. $f(x) = \cos(4x + \pi)$

Méthode — Pour utiliser les primitives des fonctions de référence

1 Le plus souvent, f est une somme de fonctions de référence.

2 On **identifie** le type des fonctions de référence qui interviennent dans la somme.

3 On **utilise** le tableau des primitives des fonctions de référence et le théorème du cours **2A**.

Solution

1. $F(x) = x^2 + 3x$ (on cherche une primitive de chaque terme de la somme en appliquant les formules aux fonctions de référence)

2. $F(x) = x^3 + x$

3. $F(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x$

4. $F(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$

5. $F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x + \pi)$

→ Voir Exercices 67 à 73 p. 261

Exercice résolu 4 Utiliser les primitives pour déterminer une distance

Trois mobiles A, B, C partent à l'instant $t = 0$ d'un même point. Leurs vitesses respectives sont, pour $t \geqslant 0$, $v_A = 10$, $v_B = 10 + 3\sin(3t)$ et $v_C = 2t + 1$.

1. Exprimer en fonction de t les distances parcourues d_A, d_B, d_C pour chacun des mobiles.

2. Quel véhicule a parcouru la plus longue distance à l'instant $t = 2$, à l'instant $t = 10$?

3. À quel instant le véhicule C dépasse le véhicule A ?

Méthode — Pour utiliser les primitives

1 La distance parcourue est une primitive de la vitesse.

2 On **détermine** la constante k qui permet de vérifier la condition initiale.

3 (**question 3** : C dépasse A lorsqu'il a parcouru plus de distance que A).

Solution

1. La distance parcourue est la primitive de la vitesse qui s'annule en $t = 0$.

$d_A(t) = 10t + k$ avec $d_A(0) = 0$ donc $k = 0$ et $d_A(t) = 10t$.

$d_B(t) = 10t - \cos(3t) + k$ avec $d_B(0) = 0$; or $d_B(0) = 0 - 1 + k$ donc $k = 1$ et $d_B(t) = 10t - \cos(3t) + 1$.

$d_C(t) = t^2 + t + k$ avec $d_C(0) = 0$ donc $k = 0$ et $d_C(t) = t^2 + t$.

2. $d_A(2) = 10 \times 2 = 20$; $d_B(2) = 10 \times 2 - \cos(3 \times 2) + 1 = 21 - \cos(6) \approx 20{,}04$; $d_C(2) = 2^2 + 2 = 6$.

À l'instant $t = 2$, c'est le véhicule B qui a parcouru la plus longue distance.

$d_A(10) = 10 \times 10 = 100$; $d_B(10) = 10 \times 10 - \cos(3 \times 10) + 1 = 101 - \cos(30) \approx 100{,}85$.

$d_C(10) = 10^2 + 10 = 110$.

À l'instant $t = 10$, c'est le véhicule C qui a parcouru la plus longue distance.

3. $d_A(t) \leqslant d_C(t) \Leftrightarrow 10t \leqslant t^2 + t \Leftrightarrow 0 \leqslant t^2 - 9t \Leftrightarrow 0 \leqslant t(t - 9)$.

Or t est positif, donc le véhicule C dépasse le véhicule A à $t = 9$.

→ Voir Exercice 103 p. 263

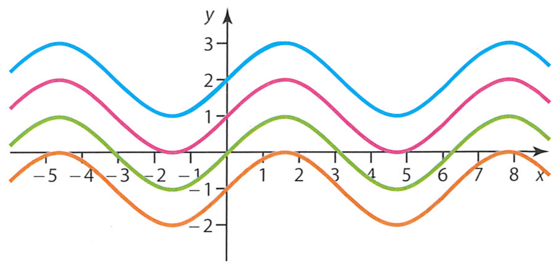
L'essentiel

1 Primitives d'une fonction

Une **primitive** F d'une fonction f sur un intervalle I donné est une **fonction dérivable** sur I et telle que $F' = f$.

Si f admet une primitive F sur un intervalle I, alors f admet une **infinité de primitives** sur I et toute primitive de f est du type $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle.

Si f admet des primitives sur un intervalle I, alors il existe une **unique primitive** de f prenant la **valeur y_0 en x_0** appartenant à I.



Représentation graphique de primitives de la fonction cosinus.

2 Primitives des fonctions de référence

Dans le tableau ci-contre, f est définie sur I par $f(x)$ et les primitives F de f sur I sont définies par $F(x)$. C désigne une constante réelle, A, ω et ϕ des réels donnés avec $\omega \neq 0$.

$f(x)$	$F(x)$	I
a, $a \in \mathbb{R}$	$ax + b$, b constante réelle	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + C$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier naturel	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$a \times x^n$, n entier naturel, $a \in \mathbb{R}$	$a \times \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega t + \phi)$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \phi) + C$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega t + \phi)$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \phi) + C$	$\mathbb{R}$

Comment déterminer une primitive d'une fonction sur un intervalle I ?

1er cas : on reconnaît la fonction comme étant une **fonction de référence** dont on connaît une primitive.

2e cas : on reconnaît la fonction comme étant de la **forme kf** où f est une fonction dont on connaît une primitive et k une constante.

3e cas : on reconnaît la fonction comme étant une **somme de fonctions** dont on connaît pour chacune une primitive. Ainsi, une primitive de la somme est la somme des primitives.

Exemple • Soit les fonctions f, définie sur $]0\,;+\infty[$, g et h, définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g(x) = 5\cos(x)$ et $h(x) = 5x^3 + 2\sin(x)$.

f est une fonction dérivée de référence, on obtient immédiatement une primitive F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{x}$.

g est le produit d'une fonction de référence (la fonction cosinus) par la constante 5, une primitive est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 5\sin(x)$.

h est la somme de plusieurs fonctions dont on connaît des primitives. Une primitive de h est la somme de ces primitives. $H(x) = \frac{5}{4}x^4 - 2\cos(x)$.