11 Dérivées

CAPACITÉS

- Utiliser les différentes notations du taux de variation et du nombre dérivé en un point.
- Effectuer des calculs approchés à l'aide de l'approximation affine en un point.
- Calculer une fonction dérivée.
- Étudier le sens de variation d'une fonction.

La grêle se forme à une température très basse dans les cumulo-nimbus, entre 1 000 et 10 000 mètres d'altitude. Les grêlons tombent lorsqu'ils ne sont plus maintenus au sein des nuages.

En supposant que les grêlons tombent en chute libre, quelle serait leur vitesse en atteignant le sol ?

→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 232

Vidéo
Découvrons la formation de la grêle
▶ lienmini.fr/10333-200

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde ou du tronc commun

Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-201

1 Calculer un taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a\,;b]$, x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I et $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthogonal. h désigne un réel non nul.
Le taux de variation de la fonction f au point d'abscisse x_0 est le nombre $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

2 Déterminer l'équation réduite d'une tangente

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f au point A d'abscisse x_0 est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.
L'équation réduite de cette tangente est : $\boldsymbol{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.

3 Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3

Soit a, b, c, et d quatre réels, avec $a \neq 0$.
Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=ax^2+bx+c}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\boldsymbol{f'(x)=2ax+b}$.
Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $\boldsymbol{f'(x)=3ax^2+2bx+c}$.

Vérifier les acquis de Seconde ou du tronc commun

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Pour les questions **1.** à **4.**, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2+4$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

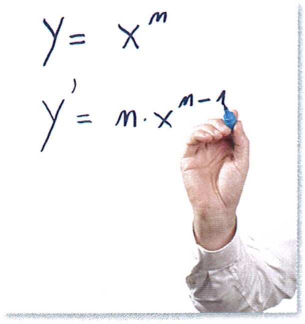
	a	b	c	Aide
1. Le taux de variation de f en -2 est égal à :	24	-20	-10	1
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est :	-20	12	-10	2
3. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 est :	$y=-20x+16$	$y=-20x+64$	$y=-20x-16$	2
4. La fonction dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f'(x)=10x+4$	$f'(x)=10x$	$f'(x)=5x$	3
5. La fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3-x^2+6x+3$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :	$g'(x)=6x^2-2x+6$	$g'(x)=5x^2-2x+6$	$g'(x)=6x^2-x+6$	3

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in$ e $\mathbb{N}$)

OBJECTIF Généraliser à $n \geqslant 4$ les résultats de la fonction dérivée pour x^2 et x^3 → Cours 1 p. 234



1. Rappeler la fonction dérivée de la fonction carré $x \mapsto x^2$ et de la fonction cube $x \mapsto x^3$.
Dans la suite, on pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = x^3$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.
a. Exprimer $f(x)$ à l'aide de $u(x)$.
b. Montrer que $f'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$.
c. En déduire une expression de $f'(x)$ à l'aide d'une puissance entière de x.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^5$.
a. Exprimer $g(x)$ à l'aide de $u(x)$ et $v(x)$.
b. Montrer que $g'(x) = 5x^4$.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^6$.
a. Exprimer $h(x)$ à l'aide de $v(x)$.
b. Montrer que $h'(x) = 2 \times v'(x) \times v(x)$.
c. En déduire une expression de $h'(x)$ à l'aide d'une puissance entière de x.

5. a. Proposer une conjecture pour la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ où n est un entier naturel.
b. Vérifier qu'elle convient bien dans le cas où $n = 2$ et $n = 3$.

2 Dérivation et mécanique

PHYSIQUE

OBJECTIF Faire le lien entre accélération et vitesse instantanée → Cours 1 p. 234

On s'intéresse à la trajectoire d'un grêlon qui tombe d'un point O, situé à une altitude de 1 500 m sans vitesse initiale.
Pour décrire la trajectoire du grêlon lors de sa chute, on choisit un repère d'axe vertical, dont l'origine est le point O, orienté positivement vers le bas.

On note $z(t)$ la position du grêlon à l'instant t.
On suppose que le grêlon tombe en chute libre, c'est-à-dire qu'il n'est soumis qu'à son poids. Cela entraîne que l'accélération est constante dans le repère choisi.
En mécanique, on montre qu'alors $z(t) = \frac{1}{2} \times g_0 \times t^2$ avec $g_0 = 9{,}80$ m.s^{-2}.

1. À quel moment le grêlon atteint-il le sol ?

2. Sachant que la vitesse instantanée du grêlon $v(t)$ est égale à $z'(t)$, déterminer l'expression de $v(t)$.

3. Quelle est sa vitesse lorsqu'il atteint le sol ? Est-ce vraisemblable ?

4. En réalité, si on tient compte des forces de frottements, l'accélération ne peut plus être considérée comme constante et on établit que la vitesse vérifie la relation :
$v'(t) = g_0 - 1{,}56 \times 10^{-2} \times v^2(t)$.
Le tableau ci-contre donne des valeurs de la vitesse v et de l'accélération a en fonction du temps t.
En utilisant les relations $a_i = g_0 - 1{,}56 \times 10^{-2} \times v_i^2$ et $v_{i+1} = v_i + a_i \times \Delta t$, déterminer les valeurs de a_2 et v_3. On arrondira au centième près.

t (s)	v (m.s^{-1})	a (m.s^{-2})
0	0	9,80
1	9,61	8,36
2	17,2	a_2
3	v_3	2,49

3 Approximation affine et notation différentielle

PHYSIQUE

OBJECTIF Effectuer des calculs approchés à l'aide de l'approximation affine en un point ; comprendre les notations différentielles utilisées en physique-chimie → Cours 2 p. 234

1. Approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point

Dans le chapitre « Dérivation » du programme du tronc commun (chapitre 5 p. 100), on a vu que l'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 à la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f, dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est donnée par l'équation réduite $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Si on note $h = x - x_0$, alors on a : $f(x_0 + h) = f(x_0) + h f'(x_0)$.

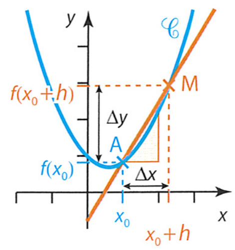
Vocabulaire : on dit que $f(x_0) + h f'(x_0)$ est une **approximation affine** de $f(x_0 + h)$ pour h proche de 0, associée à f.

Cela signifie que, localement, on approche le nombre $f(x_0 + h)$ grâce à l'image de x_0 par la fonction affine :
$h \mapsto f'(x_0) \times h + f(x_0)$.

Application : soit f la fonction carré : $x \mapsto x^2$. Déterminer l'approximation affine de $f(1 + h)$ pour h proche de 0, associée à f. En déduire mentalement une valeur approchée de $(1{,}001)^2$ puis de $(1{,}0001)^2$.

2. Notation différentielle

Soit y une grandeur qui dépend de la grandeur x, autrement dit, y est une fonction de x.
Si x subit une **variation Δx** autour de la valeur x_0, alors la grandeur y subit une **variation Δy**.



Lorsque Δx « tend vers 0 », le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers le nombre dérivé $f'(x_0)$.

En physique, on écrit alors : $\dfrac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}} \approx \boldsymbol{f'(x_0)}$, et $\boldsymbol{\Delta y \approx f'(x_0) \times \Delta x}$.

La notation différentielle $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$ désigne le nombre dérivé $f'(x_0)$.

On peut aussi écrire ce nombre dérivé $\dfrac{\boldsymbol{df}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x_0})$ ou en encore $\dfrac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}(\boldsymbol{x_0})$.

Application : en électricité, on caractérise la capacité d'un fil électrique à laisser passer le courant par sa résistivité. La résistance en ohms, notée R, est définie pour un fil électrique de longueur l en mètres par : $R = \rho \times \dfrac{l}{S}$, où ρ désigne la résistivité en ohm.mètres (Ω.m) et S la surface de la section du fil en m². Écrire $\dfrac{dR}{d\rho}$ et $\dfrac{dR}{dS}$.

4 Vitesse de réaction d'une transformation chimique

OBJECTIF Utiliser le tracé d'une tangente pour obtenir la vitesse de réaction d'une transformation chimique → Cours 2 p. 234

La « rapidité » d'une vitesse de réaction qui s'effectue à volume constant est caractérisée, à un instant donné, par la « vitesse volumique de réaction ».
v est aussi appelée « vitesse de réaction ».

La vitesse volumique de réaction v, à l'instant t, est égale à $v(t) = \dfrac{1}{V} \times \dfrac{dx}{dt}(t)$, où V est le volume total du mélange réactionnel et $x(t)$ l'avancement de la réaction à l'instant t. $x(t)$ désigne la quantité de matière qui a disparu à l'instant t.

À l'issue d'un TP, on a obtenu le tableau ci-dessous :

t (min)	0	4	7	14	20	26	34	43
x(t) (mmol)	0	0,25	0,5	0,7	1	1,2	1,4	1,6

On donne $V = 1{,}0$ L.

1. Tracer la courbe de l'avancement de x en fonction de t dans un repère orthogonal avec pour unités 1 cm pour 2 min en abscisse et 1 cm pour 0,2 mmol en ordonnée.

2. Tracer la tangente au point d'abscisse 10 puis déterminer son coefficient directeur. En déduire la vitesse de réaction à l'instant $t = 10$ min.

Cours

1 Fonction dérivée de fonctions de référence

A Fonction puissance

Théorème (admis) Pour tout entier naturel non nul, la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.

B Fonction inverse

Théorème (admis) La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sur $]-\infty\,;0[$ et $\boldsymbol{f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}}$.

C Fonctions trigonométriques

Théorème (admis) Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Si $f(x) = \sin x$ alors $\boldsymbol{f'(x) = \cos x}$. Si $g(x) = \cos x$ alors $\boldsymbol{g'(x) = -\sin x}$.

→ Voir Exercice résolu 1

2 Fonctions composées et dérivation

A Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax+b)$

On s'intéresse ici aux fonctions composées d'une fonction affine avec une fonction f, le plus souvent une fonction de référence. On a le schéma de composition suivant : $g : x \mapsto ax + b \mapsto f(ax+b)$

$$\mathrm{J} \to \mathrm{I} \quad \to \mathbb{R}$$

g est une fonction **composée** (de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ par f).

Exemple • Soit la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{3x+6}$.
g est composée de la fonction affine $x \mapsto 3x+6$ et de la fonction inverse.

Théorème (admis) Soit a et b deux nombres réels et f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit la fonction : $x \mapsto f(ax+b)$, notée g. Soit J un intervalle tel que pour tout $x \in \mathrm{J}$, on a le nombre $ax+b$ qui appartient à I. Alors la fonction g est dérivable sur J et pour tout x J, on a : $\boldsymbol{g'(x) = a \times f'(ax+b)}$

B Cas particulier des fonctions trigonométriques composées

Théorème (admis) Soit A, ω et φ des nombres réels donnés. f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$ et $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout t réel, on a :

$$\boldsymbol{f'(t) = A \times \omega \cos(\omega t + \varphi)} \text{ et } \boldsymbol{g'(t) = -A \times \omega \sin(\omega t + \varphi)}$$

Exemple • Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(5x+8)$. Alors $f'(x) = 5\cos(5x+8)$.

→ Voir Exercice résolu 2

Méthode

Exercice résolu 1 Calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des dérivées de fonctions de référence

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 5$

2. $g(x) = 3x + \frac{4}{x}$

3. $h(x) = -\sin(x)$

Méthode Pour calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des dérivées de fonctions de référence

1 On **identifie** les fonctions de référence qui interviennent dans ces fonctions.
2 On **applique** les formules de dérivation de ces fonctions.
3 On **utilise** les théorèmes vus en tronc commun sur la dérivée d'une somme ou de kf avec k constante réelle.

Solution

1. f est une fonction polynôme de degré 4 ; on dérive terme à terme.
$f = u + v + w$ avec $u(x) = x^4$, $v(x) = 2x^3$ et $w(x) = 5$.
On obtient $u'(x) = 4x^3$, $v'(x) = 3 \times 2x^2 = 6x^2$ et $w'(x) = 0$.
$f'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 4x^3 + 6x^2$.

2. g est la somme de deux fonctions dérivables : $g = u + v$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = \frac{4}{x}$.
$u'(x) = 3$ et $v'(x) = -\frac{4}{x^2}$. $g'(x) = u'(x) + v'(x) = 3 - \frac{4}{x^2}$.

3. h est l'opposée de la fonction sinus. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $h'(x) = -\cos(x)$.

→ Voir Exercices 21 à 25 p. 240

Exercice résolu 2 Calculer la dérivée d'une fonction composée

1. Soit la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{3x+6}$.
Déterminer la fonction dérivée de g.

2. En électricité, on rencontre les fonctions u, v, w suivantes :

a. $u(x) = 12\sin x - 30\cos x$ **b.** $v(t) = 30\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)$

c. $w(t) = 220\cos\left(2\,000\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

Déterminer leurs fonctions dérivées.

Méthode Pour calculer la dérivée d'une fonction composée

1 **1.** On **identifie** la fonction affine et la fonction de référence f qui composent la fonction g.
2. On **identifie** les fonctions trigonométriques de référence.
2 On **applique** les formules de dérivation.

Solution

1. g est composée de la fonction affine $x \mapsto 3x + 6$ et de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
Sur $]-2\,;+\infty[$, $3x + 6$ ne s'annule pas, $3x + 6 > 0$. Donc g est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$.
En appliquant la formule du paragraphe **2A**, on a :
$g'(x) = 3 \times f'(3x+6)$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. D'où : $g'(x) = -\frac{3}{(3x+6)^2}$.

2. a. f est la différence de deux fonctions u et v, la dérivée f' est la différence de u' et v'.
$f'(x) = 12\cos x - 30(-\sin x) = 12\cos x + 30\sin x$.

b. On applique la formule du cours **2B** avec $\omega = 314$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. $v'(t) = 30 \times 314\cos\left(314t + \frac{\pi}{2}\right) = 9\,420\cos\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)$.

c. On applique la formule du paragraphe **2B** avec $\omega = 2\,000\pi$ et $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$.

$$w'(t) = 220 \times 2\,000\pi\left[-\sin\left(2\,000\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 440\,000\pi\left[-\sin\left(2\,000\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

→ Voir Exercices 26 à 30 p. 240

3 Fonction dérivée et opérations sur les fonctions

A Dérivée d'un produit de deux fonctions

THÉORÈME Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction produit $u \times v$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

DÉMONSTRATION • Pour tous réels x_0 et h de I, avec h non nul et tel que $x_0 + h \in$ I, on a :

$$\frac{(uv)(x_0+h)-(uv)(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}$$

$$= \frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h} \times v(x_{0+h}) + \frac{[v(x_0+h)-v(x_0)]}{h} \times u(x_0).$$

Comme u est dérivable en x_0, alors le taux de variation $\frac{[u(x_0+h)-u(x_0)]}{h}$ tend vers le nombre dérivé $u'(x_0)$. De même, $\frac{[v(x_0+h)-v(x_0)]}{h}$ tend vers $v'(x_0)$. En admettant que $v(x_{0+h})$ tend vers $v(x_0)$ quand h tend vers 0, $\frac{(uv)(x_0+h)-(uv)(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$ tend donc vers $u'(x_0) \times v(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$.

B Dérivée de l'inverse d'une fonction

THÉORÈME **(admis)** Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I. La fonction $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

C Dérivée du quotient de deux fonctions

THÉORÈME **(admis)** Soit u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que v ne s'annule pas sur I. La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

→ Voir Exercice résolu 3

4 Étude des variations d'une fonction (rappels)

PROPRIÉTÉ **(admise)** Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit a et b deux réels de I, avec $a < b$.

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est **croissante** sur [a ; b].

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est **décroissante** sur [a ; b].

Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est **constante** sur [a ; b].

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des formules de dérivation

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x\sin(x)$ **2.** $f(x) = \frac{4}{x}$

3. $f(x) = x^2(-2x+3)$ **4.** $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

5. $f(x) = \frac{3x+4}{1-2x}$

Méthode — Pour calculer la dérivée d'une fonction à l'aide des formules de dérivation

❶ On **identifie** l'opération et les fonctions usuelles qui interviennent dans l'expression de la fonction : somme, produit d'une fonction usuelle par un réel, produit de deux fonctions usuelles, inverse, quotient.
❷ On **calcule** les dérivées des fonctions usuelles identifiées qui interviennent.
❸ On **utilise** la formule appropriée de dérivation du cours.

Solution

1. $f(x) = x\sin x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables u et v avec pour tout x réel, $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$ On a alors : $f'(x) = \sin x + x\cos x$.

2. f est le produit de la fonction inverse par le réel 4. $f = ku$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $k = 4$.
$u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f'(x) = k \times u'(x) = 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x^2}$.

3. f est le produit de la fonction carrée par une fonction affine. $f = u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -2x+3$; $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -2$.
$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 2x \times (-2x+3) + x^2 \times (-2) = -4x^2 + 6x - 2x^2 = -6x^2 + 6x$.

4. f est l'inverse d'une fonction affine. $f = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x-3$. $u'(x) = 2$ et $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)} = -\frac{2}{(2x-3)^2}$.

5. f est le quotient de deux fonctions affines. $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x+4$ et $v(x) = 1-2x$. On a : $u'(x) = 3$ et $v'(x) = -2$.
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{3\times(1-2x)-(3x+4)\times(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+6x+8}{(1-2x)^2} = \frac{11}{(1-2x)^2}$$

→ Voir Exercices 32 à 41 p. 240

Exercice résolu 4 — Étudier le sens de variation d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{5x+6}{2x+3}$.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe.
2. En déduire le sens de variation de f.

Méthode — Pour étudier le sens de variation d'une fonction

❶ On **calcule** $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation pour un quotient.
❷ On **étudie** le signe de $f'(x)$. Ici le dénominateur est positif car le carré d'un nombre réel est toujours positif. Le signe du quotient est celui du numérateur, lui-même positif dans ce cas.
❸ On **obtient** le sens de variation de f en appliquant la propriété du cours.

Solution

1. On dérive le quotient : $f'(x) = \frac{5(2x+3)-2(5x+6)}{(2x+3)^2} = \frac{3}{(2x+3)^2}$. On en déduit directement que $f'(x) > 0$.

2. $f'(x) > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ donc f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

→ Voir Exercices 46 à 53 p. 241

L'essentiel

1 Fonction dérivée de fonctions de référence

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données dans le tableau. A, ω et φ sont des réels donnés.

Soit f la fonction définie par $f(x) =$	**alors $f'(x) =$**	**pour tout $x \in$ I égal à**
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier naturel non nul	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;0[$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega t+\varphi)$	$-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega t+\varphi)$	$A\omega\cos(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$

2 Fonctions composées et dérivation

Soit a et b deux nombres réels et f une fonction dérivable sur un intervalle I.
J est un intervalle tel que pour tout $x \in$ J, on a le nombre $ax+b$ qui appartient à I.
Soit la fonction g définie sur J par $\boldsymbol{g(x) = f(ax+b)}$.
Alors la fonction g est dérivable sur J et pour tout $x \in$ J, on a : $\boldsymbol{g'(x) = a \times f'(ax+b)}$.

3 Fonction dérivée et opérations sur les fonctions

Dans le tableau suivant, u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Fonction	**Dérivée**	**Conditions d'application**
$u+v$	$(u+v)' = u'+v'$	$u+v$ est dérivable sur I
$u \times v$	$(u\times v)' = u'\times v + u \times v'$	$u\times v$ est dérivable sur I
ku où k est une constante réelle	$(ku)' = ku'$	ku est dérivable sur I
$\frac{1}{u}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$ est dérivable là où u ne s'annule pas
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$ est dérivable là où v ne s'annule pas

4 Étude des variations d'une fonction

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.
Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est **croissante** sur $[a\,;b]$.
Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est **décroissante** sur $[a\,;b]$.
Si, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est **constante** sur $[a\,;b]$.