

## Pour acquérir les automatismes

## Exercices

### 1 Questions Flash

#### Diaporama

10 diapositives pour maîtriser ses automatismes



[lienmini.fr/10333-208](http://lienmini.fr/10333-208)

### Rechercher les parties réelle et imaginaire

- 2 Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - 4i$$

$$z_3 = -\sqrt{2}$$

$$z_2 = 0,5i + 5$$

$$z_4 = (5 + \pi)i$$

- 3  $1+i\frac{\pi}{6}$  est-elle la forme algébrique d'un nombre complexe ? Si oui, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

### Calculer dans C

4 Calculer  $(1+4i) - (5-i)$ .

5 Calculer  $(2-3i) - (-7+2i)$ .

6 Calculer  $(4-2i) + (-5+3i)$ .

7 Calculer  $(2+3i)(-5+i)$ .

8 Calculer  $(2+5i)^2$ .

9 Calculer  $(2-3i)^2$ .

10 Calculer  $(1-i)(2+i)$ .

11 Calculer  $(1-2i) - \frac{1}{2+i}$ .

12 Calculer  $\frac{3+i}{1-i}$ .

### Travailler sur les affixes

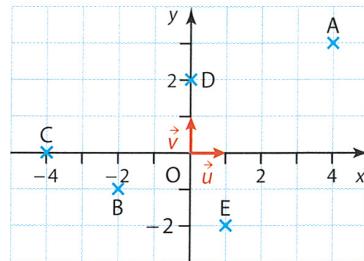
- 13 On donne  $z_1 = 1+i$ ,  $z_2 = 2-3i$  et  $z_3 = -4-5i$ . Déterminer les coordonnées des points A, B et C, images respectives de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .

- 14 Soit A(-2; 2), B(5; 1), C(-1; -1), D(0; 3) et E(-4; 0), cinq points du plan. Déterminer les affixes respectives de A, B, C, D et E.

- 15 L'affixe du milieu du segment [AB] d'affixes respectives  $z_A = 2i$  et  $z_B = 1-i$  est-elle  $z = \frac{3-i}{2}$  ?

- 16 Montrer que l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$  est un imaginaire pur où A et B deux points d'affixes  $z_A = 2-i$  et  $z_B = 9i-2$ .

- 17 À partir de la figure ci-contre, donner l'affixe :
- des points A, B, C, D et E ;
  - des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CE}$  ;
  - des points I et J, milieux respectifs des segments [CD] et [CE].



### Calculer des modules et des arguments

- 18 Donner le module puis un argument de  $z = -3i$  et de  $z' = 70i$ .

- 19 Donner la forme trigonométrique de  $z = 6 - 6i$ .

- 20 Donner la forme trigonométrique de  $z = -\frac{i}{2}$ .

- 21 Soit  $z = -2i$ . Donner le module et un argument de  $z^4$  et  $z^{2019}$ .

- 22 Soit A et B les points d'affixes respectives  $z_A = 2 - i$  et  $z_B = -1 + 3i$ . Calculer la distance AB.

- 23 Soit  $z = 1 + i$  et  $z' = -2i$  deux nombres complexes.

1. Déterminer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.

2. En déduire le module et un argument de  $\bar{z}$  et de  $-z'$ .

3. En déduire le module  $z \times z'$ ,  $z^3$ ,  $z'^2$ ,  $\frac{1}{z}$  et  $\frac{z}{z'}$ .

### Passer d'une forme à l'autre

- 24 Donner la forme algébrique de  $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ .

- 25 Donner la forme algébrique de  $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ .

- 26 Donner la forme algébrique de  $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ .

- 27 Donner la forme algébrique de  $z = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ .

- 28 Soit  $z$  le nombre complexe de module 2 et d'argument  $\pi$ . Donner sa forme algébrique.

- 29 Donner la forme trigonométrique du nombre complexe de partie réelle 1 et de partie imaginaire  $\sqrt{3}$ .

- 30 Si  $z = -5$ , donner la forme trigonométrique de  $z$ ,  $z^{2019}$  et  $\frac{3}{z}$ .

# Exercices

## Pour commencer

PASTILLE BLANCHE

L'exercice est corrigé  
en fin de manuel

### Nombres complexes et opérations

→ Aide Cours 1 p. 214

#### Question de cours

- 31** Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire :

1.  $z = 5 + 3i$     2.  $z = -3i + 6$     3.  $z = -\sqrt{2} + 3i\sqrt{5}$

- 32** Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire :

1.  $z = \frac{-7+9i}{4}$     2.  $z = \frac{12-6i}{3}$     3.  $z = \frac{4i-6}{2}$

- 33** Soit  $z = 2 - 4i$  et  $z' = -3 + 2i$  deux nombres complexes. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique  $a + bi$  :

1.  $z + z'$     2.  $3z - 4z'$     3.  $z \times z'$   
4.  $z^2$     5.  $z'^3$     6.  $(-2+z)(3-z')$

- 34** Soit  $z = -5 - 2i$  et  $z' = 3 - 2i$  deux nombres complexes. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique  $a + bi$  :

1.  $z + z'$     2.  $-2z - 3z'$     3.  $z \times z'$   
4.  $z^2$     5.  $z^3$     6.  $(5-z)(-2+z')$

- 35** Développer et mettre sous la forme algébrique  $a + bi$  les nombres complexes suivants :

1.  $(2+5i)^2$     2.  $(7-12i)^2$     3.  $(-5+3i)^2$

- 36** Développer et mettre sous la forme algébrique  $a + bi$  les nombres complexes suivants :

1.  $(6-4i)(6+4i)$     2.  $(-2-3i)^2$     3.  $(-5-7i)(-5+7i)$

- 37** Soit le nombre complexe  $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Mettre sous la forme algébrique  $a + bi$  le nombre complexe  $z^2 + 1$ . Que remarque-t-on ?

- 38** Le nombre complexe  $z = -1 + 2i$  est-il solution de l'équation  $iz + 2 + i = 0$  ?

- 39** Soit  $z = -2 + 3i$  et  $z' = 7 + 4i$  deux nombres complexes. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique  $a + bi$  :

1.  $\frac{1}{z}$     2.  $-\frac{1}{z'}$     3.  $\frac{z}{z'}$   
4.  $\frac{2}{z^2}$     5.  $\frac{2+z}{7-z'}$     6.  $\frac{1-z}{1+z'}$

- 40** Soit  $z = 4 - 2i$  et  $z' = -1 + 2i$  deux nombres complexes. Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique  $a + bi$  :

1.  $\frac{2}{z'}$     2.  $-\frac{3}{z}$     3.  $\frac{z}{z'}$     4.  $\frac{-3}{z^2}$     5.  $\frac{2i+z}{1+z'}$     6.  $\frac{2-z}{2+z'}$

- 41** Mettre sous la forme algébrique  $a + bi$  les nombres complexes suivants :

1.  $2 + \frac{1}{i}$     2.  $-3 - \frac{4}{2+i}$     3.  $i - \frac{1}{2i}$     4.  $\frac{2-3i}{5-i}$     5.  $\frac{3-2i}{3+2i}$

#### Vrai ou faux

- 42** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Le nombre complexe  $(2 - i)(1 + 3i) + 2(1 + 2i)^2 - i$  est égal à  $-1 + 12i$ .

2. L'inverse de  $\frac{2+3i}{5-i}$  est  $2+i$ .    3.  $i^{27}$  est un réel.

- 43** Soit  $z = 5 + 3i$  et  $z' = 2 - i$  deux nombres complexes.

1. Déterminer  $\bar{z}$  et  $\bar{z}'$  sous forme algébrique.

2. En déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a.  $\overline{z+z'}$     b.  $\overline{z-z'}$     c.  $\overline{4z}$     d.  $\overline{2z-3z'}$   
e.  $\overline{z \times z'}$     f.  $\overline{z^2}$     g.  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$     h.  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$

- 44** Déterminer le conjugué du nombre complexe :

$$z = \frac{(1+i)(2+i)}{3i(5-i)}.$$

### Nombres complexes et géométrie

→ Aide Cours 2 p. 216

#### Question de cours

- 45** 1. Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives  $z_A = 1 + i$ ,  $z_B = 2 - 2i$ ,  $z_C = 5i$ ,  $z_D = 1 - i$  et  $z_E = -3$ .

2. Comment sont les deux nombres complexes  $z_A$  et  $z_D$ ? Et les deux points A et D?

- 46** Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points suivants à l'aide de leurs coordonnées :

A(-1 ; 2), B(2 ; -1), C(-3 ; 0), D(0 ; -4), E(-4 ; 0) et F(-2 ; -2).

1. Placer ces points dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

2. Déterminer l'affixe de chacun de ces points.

- 47** Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $1 - 3i$ ,  $-2 + 2i$  et  $2 + i$ .

1. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment [AB], et l'affixe du point J, milieu du segment [BC].

2. Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et celle du vecteur  $\overrightarrow{CA}$ .

- 48** Soit  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  deux vecteurs d'affixe respectives  $z = 1 + 2i$  et  $z' = -2 + i$ .

Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs suivants :

a.  $\vec{w} + \vec{w}'$     b.  $\vec{w} - \vec{w}'$     c.  $2\vec{w}$     d.  $3\vec{w} - 2\vec{w}'$

## Pour commencer

## Exercices



**49** **GEOGEBRA** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $1 + 2i$ ,  $3 - 2i$  et  $-2 + 3i$ .

1. Construire les points A, B et C dans le repère sur un fichier GeoGebra.
2. Déterminer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{OC}$ .
3. Représenter ces quatre vecteurs sur le fichier GeoGebra.
4. En activant la grille, vérifier les résultats obtenus.



**50** **GEOGEBRA** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives  $1 + 2i$ ,  $5 + 2i$ ,  $3, 4 - i$  et  $-i$ .

1. Construire les points A, B, C et D dans le repère sur un fichier GeoGebra.
2. Déterminer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{AC}$ . Construire ces vecteurs sur le fichier et, à l'aide de la grille, vérifier les résultats obtenus.
3. Le quadrilatère ABCD est-il particulier ? Justifier.

**51** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A, B, C, D et E les points d'affixes respectives  $z_A = 2 + 4i$ ,  $z_B = 6 - i$ ,  $z_C = -3 + i$ ,  $z_D = 7 + 2i$  et  $z_E = 1 + i$ .

1. Déterminer l'affixe des points I, J et K, milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [DE]. Que constate-t-on ?
2. Calculer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{EC}$ . Quelle est la nature du quadrilatère ADBE ?

### Forme trigonométrique d'un nombre complexe

→ Aide **Cours 3** p. 218

#### Question de cours

**52** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = \sqrt{3} - i$       2.  $z = 1 + i$       3.  $z = 6$

#### Vrai ou faux

**53** Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. On donne  $\cos(\vartheta) = 0$  et  $\sin(\vartheta) = 1$  alors  $\vartheta = \pi$ .
2. On donne  $\cos(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(\vartheta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  alors  $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$ .
3. On donne  $\cos(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(\vartheta) = \frac{1}{2}$  alors  $\vartheta = -\frac{\pi}{6}$ .
4. On donne  $\cos(\vartheta) = \frac{1}{2}$  et  $\sin(\vartheta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  alors  $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$ .
5. On donne  $\cos(\vartheta) = -\frac{1}{2}$  et  $\sin(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  alors  $\vartheta = -\frac{2\pi}{3}$ .

**54** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = -2i$       2.  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$       3.  $z = 4 - 4i$

**55** Soit  $z = 5 + 3i$  et  $z' = 2 - i$  deux nombres complexes.

1. Déterminer les modules respectifs de  $z$  et  $z'$ .
2. En déduire l'expression du module de  $z \times z'$ , de  $\frac{1}{z}$  et de  $\frac{z}{z'}$ .

**56** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B, et C d'affixes respectives :  $z_A = 2 - i$ ,  $z_B = 2 + i$  et  $z_C = 4$ .

1. Calculer les distances AB, BC et CA.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

**57** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B, et C d'affixes respectives :  $z_A = 3i$ ,  $z_B = -2 + i$  et  $z_C = 2 + i$ .

1. Calculer les distances AB, BC et CA.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

**58** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A, B, et C trois points d'affixes respectives  $z_A = 4 + 4i$ ,  $z_B = 8 + i$  et  $z_C = 6$ . Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.

**59** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Soit A, B, C et D quatre points d'affixes respectives  $z_A = 1 + 3i$ ,  $z_B = 3 + i$ ,  $z_C = 1 - i$  et  $z_D = -1 + i$ .

1. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. Démontrer que le parallélogramme ABCD est un carré.

**60** Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer une forme trigonométrique :

1.  $z = \sqrt{3} - i$       2.  $z = 1 - i$       3.  $z = -3 - 3i$

**61** Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer une forme trigonométrique :

1.  $z = 2i$       2.  $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$       3.  $z = 5$

**62** Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer une forme trigonométrique :

1.  $z = 2 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$

2.  $z = -2 \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right]$

**63** Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1.  $z = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$       2.  $z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

3.  $z = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right]$

# Exercices

## Pour s'entraîner

### Nombres complexes et opérations

**64** Soit le nombre complexe  $z = 2i - 3$ .

1. Donner les parties réelle et imaginaire de  $z$ .
2. Donner son conjugué.
3. Donner les parties réelle et imaginaire de  $z^3$ .

**65** Calculer dans  $\mathbb{C}$ :

1.  $(2+i) - (5-3i)$     2.  $(1+2i)(1-2i)$     3.  $(2-i)^2$

**66** Soit le nombre complexe  $z = \frac{1-i}{2+i}$ . Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

**67** Soit le nombre complexe  $z = (3-2i)(1+4i)$ .

Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

**68** Soit  $z = 2+i$  le conjugué de  $z'$ . Donner les parties réelle et imaginaire de  $z'$  et de  $z^2$ .

**69** Donner la forme algébrique de  $z^2$  où  $z = (3-2i)(1+4i)$ .

**70** Donner les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

1.  $z = -8$     2.  $z = -2i\sqrt{3}$     3.  $z = \frac{1+i}{4}$   
4.  $z = 2+3i$     5.  $z = 5,5i - 1$

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 215

**71** Donner le conjugué, l'opposé et l'inverse de chacun des complexes de l'exercice **64** puis vérifier les résultats à la calculatrice.

**72** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1.  $(2-i)(1-3i)+2i$     2.  $(3+i)-(1-2i)^2$     3.  $(1+i\sqrt{2})(2-i\sqrt{3})$   
→ Voir **Exercice résolu 2** p. 215

**73** Soit  $z_1 = 1-i$  et  $z_2 = 2i+3$ . Donner la forme algébrique de :

1.  $z_1 \times z_2$     2.  $(z_1)^2$     3.  $\frac{z_1}{z_2}$   
4.  $3z_1 - 2$     5.  $z_2, z_1 \times z_2$ .

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 215

**74** Soit  $z = 3+2i$  et  $z' = -4i$ . Donner le conjugué de :

1.  $z$     2.  $z'$     3.  $zz'$     4.  $iz$     5.  $z^2$

**75** Soit  $z = 3+2i$  et  $z' = -4$  deux nombres complexes. Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

1.  $\frac{1}{z}$     2.  $\frac{-3}{z'}$     3.  $\frac{iz}{z'}$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 215

**76** Déterminer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

1.  $\frac{3}{1-i}$     2.  $\frac{1+i}{3+2i}$     3.  $\frac{(1+i)(2-i)}{2i}$

→ Voir **Exercices résolus 1 et 2** p. 215

### Nombres complexes et géométrie

**77** Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , placer les points A, B, C, D et E d'affixes respectives  $z_A = 2 + 3i$ ,  $z_B = -3 + i$ ,  $z_C = -3i$ ,  $z_D = 2$  et  $z_E = -i + 4$ .

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 217

**78** Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on donne les points suivants à l'aide de leurs coordonnées :

A(2 ; 3), B(-1 ; 1), C(-5 ; -9), D(0 ; -2), E(1 ; 0) et F(0 ; 2).

1. Placer ces points dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
2. Déterminer l'affixe de chacun de ces points.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 217

#### 79 ALGO Compléter et exécuter un programme

Soit A et B les points d'affixes respectives  $2 - 4i$  et  $-6 + 2i$ .

1. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment [AB], puis de F, symétrique de B par rapport à A.

2. L'algorithme suivant, écrit en langage naturel, a pour objectif de calculer l'affixe du milieu d'un segment [AB]. x représente la valeur de l'affixe du point A, y celle de l'affixe du point B et z celle de l'affixe du point I.

3. Recopier et compléter cet algorithme.

$x \leftarrow \dots$

4. Le programmer sur la calculatrice.

$y \leftarrow \dots$

5. Utiliser ce programme pour vérifier les réponses obtenues à la question 1.

$z \leftarrow \dots$

Afficher z

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 217

**80 GEOGEBRA** Soit  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  deux vecteurs d'affixe respectives  $z = 2 + 5i$  et  $z' = -1 + 3i$ .

1. Représenter ces deux vecteurs dans un fichier GeoGebra.
2. Déterminer l'affixe de chacun des vecteurs suivants :

a.  $\vec{w} + \vec{w}'$     b.  $\vec{w} - \vec{w}'$     c.  $3\vec{w}$     d.  $2\vec{w} - 3\vec{w}'$

3. Construire sur le fichier les quatre vecteurs précédents et vérifier les résultats obtenus.

**81 GEOGEBRA** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $1+2i$ ,  $3-2i$  et  $-2+3i$ .

1. Construire les points A, B et C dans le repère sur un fichier GeoGebra.

2. Déterminer les affixes des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CA}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{OC}$ .

3. Représenter ces quatre vecteurs sur le fichier GeoGebra.

4. En activant la grille, vérifier les résultats obtenus.

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 217

**82** Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives  $2+2i$ ,  $6+5i$  et  $9+3i$ .

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Vérifier à l'aide d'un graphique.

## Pour s'entraîner

## Exercices

### 83 ALGO GEOGEBRA Exécuter un programme

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives  $-2i$ ,  $5+i$ ,  $3$ ,  $-2-i$  et  $1+i$ .

1. Construire les points A, B, C, D et E dans le repère sur un fichier GeoGebra.

2. Déterminer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AE}$ ,  $\overrightarrow{BD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{EB}$  et  $\overrightarrow{DE}$ . Construire ces vecteurs sur le fichier et, à l'aide de la grille, vérifier les résultats obtenus.

3. Le quadrilatère ACED est-il particulier ? Justifier.

4. L'algorithme suivant, écrit en langage naturel, a pour objectif de calculer l'affixe d'un vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .  $x$  représente la valeur de l'affixe du point A,  $y$  celle de l'affixe du point B et  $z$  celle de l'affixe vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

a. Recopier et compléter cet algorithme.

$x \leftarrow \dots$

b. Le programmer sur la calculatrice.

$y \leftarrow \dots$

c. Utiliser ce programme pour vérifier les réponses de la question 2.

$z \leftarrow \dots$

Afficher z

→ Voir **Exercice résolu 5** p. 217

84 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives  $1+2i$ ,  $3+5i$ ,  $\frac{13}{2}+3i$  et  $\frac{9}{2}$ .

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

85 Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :  $z_A = 2 - i$ ,  $z_B = -3i - 2$ ,  $z_C = \sqrt{2} + i$  et  $z_D = \overline{z_B}$ .

86 Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ,  $z_C = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$  et  $z_D = \overline{z_B}$ .

2. Justifier que A et B sont symétriques par rapport à O.

3. Justifier que B et D sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

### Forme trigonométrique d'un nombre complexe

87 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = \sqrt{3} + i$     2.  $z = 1 - i$     3.  $z = -2$     4.  $z = 3i$

On pourra contrôler les résultats obtenus à l'aide d'une figure.

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 219

88 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B, et C d'affixes respectives :  $z_A = 3 + 6i$ ,  $z_B = 3 - 2i$  et  $z_C = 7 + 2i$ .

1. Calculer les distances AB, BC et CA.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

89 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :  $z_A = 2 + i$ ,  $z_B = -1 + 2i$ ,  $z_C = -3 + 4i$  et  $z_D = -2 - i$ .

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Calculer les distances AB, CD et OA.

3. Prouver que les points A, B et D appartiennent au cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{5}$ .

### De la forme trigonométrique à la forme algébrique et inversement

90 Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer une forme trigonométrique :

1.  $z = -\sqrt{3} + i$     2.  $z = -1 - i$     3.  $z = -2 + 2i$

4.  $z = -4i$     5.  $z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$     6.  $z = -8$

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 219

91 Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer une forme trigonométrique :

1.  $z = -3 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$

2.  $z = 2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$

3.  $z = -4 \left[ -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 197

92 Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1.  $z = 3 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$     2.  $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

3.  $z = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$

4.  $z = 4 \left[ \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right]$

93 Soit les nombres complexes  $z_1$  de module 4 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$  et  $z_2$  de module 2 et d'argument  $-\frac{\pi}{2}$ .

1. Donner la forme trigonométrique de chacun de ces nombres complexes.

2. Donner la forme algébrique de  $z_1$  et  $z_2$ .

3. Déterminer le module de  $z_1 z_2$ ,  $\frac{1}{z_1}$  et  $\frac{z_1}{z_2}$ .

94 On considère les nombres complexes  $z = 2 - 2i$ ,  $z_1 = 2 + 2i$  et  $z_2 = -2$ .

1. Écrire sous forme trigonométrique ces trois nombres complexes.

2. Déterminer le module de  $z \times z_1^2$  et  $z_2^3$ .

3. En déduire le module puis la forme algébrique de  $\frac{z \times z_1^2}{z_2^3}$ .

→ Voir **Exercices résolus 6 et 7** p. 219

## Exercices

## Pour faire le point

Tests

S'entraîner  
en ligne



lienmini.fr/10333-209

## Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.  
Justifier.

		V	F
95	On considère le nombre complexe $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ . Le module de $z$ est égal à $-4$ .		
96	On considère le nombre complexe $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ . Un argument de $z$ est $\frac{4\pi}{3}$ .		
97	On considère le nombre complexe $z = 2 + 2i$ . On a : $\left \frac{1}{z}\right  =  z $ .		
98	On considère le nombre complexe $z = 2 - 2i$ . On a : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z)$ .		
99	On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$ , $z_B = 5 + i$ et $z_C = 3i$ . Le triangle ABC est isocèle en B.		
100	On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 - 2i$ , $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 1$ . Le triangle ABC est rectangle en C.		
101	On considère les nombres complexes $z = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $z' = 3 + 4i$ . Le module de $z \times z'$ est égal à 20.		
102	On considère les nombres complexes $z = 6 + 8i$ et $z' = -3 + 4i$ . Le module de $\frac{z}{z'}$ est égal à 2.		

→ Vérifier **les résultats** p. 294

## QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

- 103 On considère le nombre complexe  $z = -1 - i\sqrt{3}$ . L'écriture trigonométrique du nombre complexe  $z$  est :
- a.  $\left[2; -\frac{\pi}{6}\right]$       b.  $\left[2; -\frac{2\pi}{3}\right]$       c.  $\left[\sqrt{2}; -\frac{2\pi}{3}\right]$ .

- 104 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$  avec :  $z_A = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$  et  $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ . Le triangle OAB est :

- a. équilatéral      b. rectangle et isocèle      c. isocèle

- 105 Le nombre complexe  $z$  de module  $2\sqrt{3}$  et dont un argument est  $\frac{2\pi}{3}$  a pour forme algébrique :
- a.  $\sqrt{3} - 3i$       b.  $-\sqrt{3} + 3i$       c.  $-3 + i\sqrt{3}$ .

- 106 Le nombre complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$  a pour nombre complexe conjugué :
- a.  $-1 - i\sqrt{3}$       b.  $-1 + i\sqrt{3}$       c.  $1 - i\sqrt{3}$ .

- 107 Soit  $z = \sqrt{3} + i$  et  $z' = -\sqrt{3} + i$ . Le nombre complexe  $\frac{z}{z'}$  a pour module :
- a. 1      b. 1      c. i.

- 108 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points I, D et S d'affixes respectives :  $z_I = \sqrt{3} - i$ ,  $z_D = -\sqrt{3} + i$ ,  $z_S = -\sqrt{3} - i$ .

L'affixe du point T, tel que le quadrilatère STID est un parallélogramme, est :

- a.  $-3\sqrt{3} + i$       b.  $2\sqrt{3} - 2i$       c.  $\sqrt{3} - 3i$ .

→ Vérifier **les résultats** p. 294

## Pour approfondir

## Exercices

### 109 In English



1. Find the real part and the imaginary part of  $z = 3 + 3i$ .
2. Find the complex conjugate,  $z'$ , of  $z$ .
3. The two complex numbers are respectively the affixes of two points D and N in  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Draw D and N.
4. Calculate the modulus and an argument of  $z$ .
5. Deduce that the polar form of this complex number.
6. Deduce that the polar form of  $z'$  without calculation.
7. Prove that the triangle ODN is isosceles and right-angled.
8. The loci L is defined by  $|z - 6| = 3\sqrt{2}$ .
  - a. Prove that D and N are in the loci L.
  - b. Describe this loci and draw it.
9.  $z'' = 6$  is the affix of the point I. Prove that the quadrilateral ODIN is a square.

### 110 COMPÉTENCE Calculer

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est 1 cm.

On note  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives  $a = 3$ ,  $b = 2 + 2i$  et  $c = 2 - 2i$ .
  - a. Placer les points A, B et C dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $b$ .
  - c. En déduire le module et un argument du nombre complexe  $c$ .
  - d. Démontrer que le triangle OBC est rectangle et isocèle.
2. On considère l'ensemble  $E$  des points M d'affixe  $z$  tels que :  $|z - 3| = \sqrt{5}$ .
  - a. Montrer que les points B et C appartiennent à l'ensemble  $E$ .
  - b. Déterminer la nature de l'ensemble  $E$  et représenter cet ensemble sur le graphique.

### 111 COMPÉTENCE Raisonneur

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est 1 cm.

On note  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. On note A, B, C et K les points du plan d'affixes respectives :  $a = 4 + 5i$ ,  $b = -3 + 4i$ ,  $c = -2 - 3i$  et  $k = 1 + i$ .
  - a. Placer les points A, B, C et K dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - b. Démontrer que K est le milieu du segment [AC].
  - c. Calculer  $|a - k|$  et  $|b - k|$  puis en déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit D le symétrique de B par rapport à K ; on note  $d$  l'affixe du point D.
  - a. Déterminer  $d$  et placer le point D dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - b. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

### 112 COMPÉTENCE Modéliser

On munit le plan d'un repère direct orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 6 cm. Soit A, B et C les points d'affixes respectives :  $z_A = 1$ ,  $z_B = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$  et  $z_C = \overline{z_B}$ .

1. Placer les points A, B et C.
2. Calculer les modules suivants :  $|z_B - z_A|$ ,  $|z_A - z_C|$  et  $|z_B - z_C|$ . En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.
3. Soit  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle ABC.
  - a. Déterminer l'affixe du centre  $\Omega$  de  $\mathcal{C}$  et son rayon  $r$  en cm.
  - b. Placer  $\Omega$  et tracer le cercle  $\mathcal{C}$  sur la figure.

### 113 COMPÉTENCE Calculer

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :  $z_A = 5 + 5i$ ,  $z_B = 5 - 5i$ ,  $z_C = z_A + z_B$  et  $z_D = 5$ .

1. Placer les points A, B, C et D (on prendra comme unité graphique 1 cm).
2. Déterminer le module et un argument de  $z_A$ ,  $z_B$  et  $z_C$ .
3. Déterminer, en justifiant, la nature du quadrilatère OACB.
4. Soit E le point d'affixe  $z_E = 2 + 4i$ .
  - a. Placer le point E sur la figure précédente.

### 114 COMPÉTENCE Raisonneur

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On note  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. a. En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :  $z_A = 2 + 2i$ ,  $z_B = 2 - 2i$  et  $z_C = 4$ .
- b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$ .
- c. Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.
- d. Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.
2. Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe  $z_D = iz_A$ . Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

### 115 COMPÉTENCE Raisonneur

On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :  $a = -1$ ,  $b = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $c = 1 - i\sqrt{3}$  et  $d = \frac{3}{4}$ .

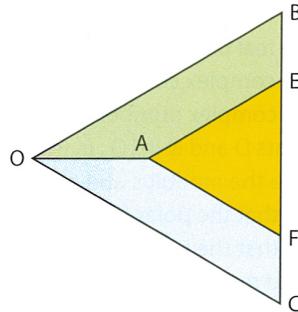
1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $b$  et  $c$ .
2. Placer les points A, B, C et D dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
3. Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle  $\mathcal{C}$  de centre D dont on précisera le rayon  $r$ . Construire ce cercle.
4. Déterminer les affixes  $e$  et  $f$  des deux points E et F situés sur  $\mathcal{C}$  et tels que les triangles ABE et ABF soient rectangles, respectivement en B et en A. Placer les points E et F sur le cercle  $\mathcal{C}$ .

# TP

## ► Un puzzle élémentaire !

**CAPACITÉ** Déterminer la nature d'un triangle et calculer des aires.

On considère le puzzle représenté ci-contre. Il est constitué de 3 pièces : le triangle AEF et les quadrillatères AEBO et AFCO, découpés dans le triangle OBC. On veut déterminer l'aire exacte de chacune des trois parties du puzzle.



### PARTIE 1 Avec la calculatrice

On note  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

1. À l'aide de la calculatrice, vérifier que les nombres complexes  $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$  et  $z_2 = \bar{z}_1$  sont solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation :  $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$ .
2. On considère les points B et C d'affixes respectives  $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$  et  $z_C = 4\sqrt{3} - 4i$ .
  - a. Vérifier à l'aide de la calculatrice que  $z_B$  a pour module 8 et qu'un de ses arguments est  $\frac{\pi}{6}$ .
  - b. En déduire une écriture trigonométrique du nombre complexe  $z_C$ .
  - c. Démontrer que le triangle OBC est équilatéral.

### PARTIE 2 De la géométrie sur papier (compas et rapporteur)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.

1. En utilisant la **Partie 1**, placer précisément les points B et C dans le repère.
2. Le point A a pour coordonnées  $(3 ; 0)$ . Le point D a pour coordonnées  $(4\sqrt{3} ; 0)$ .
  - a. Écrire les affixes  $z_A$  et  $z_D$  des points A et D.
  - b. Calculer les affixes du point E milieu du segment [BD] et du point F milieu du segment [CD].
  - c. Placer les points A, D, E et F dans le repère.
3. Calculer l'aire exacte, en  $\text{cm}^2$ , du triangle AEF.
4. Quelles sont les valeurs exactes, en  $\text{cm}^2$ , des aires des deux autres pièces du puzzle ?

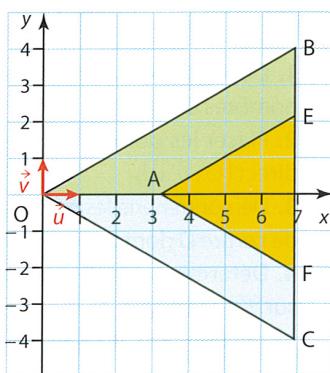


En salle informatique



lienmini.fr/10333-210

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .



1. Après avoir ouvert un fichier GeoGebra, placer les points A, B, C, D, E et F dans le repère.
2. En déduire une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du triangle AEF.
3. Quelles sont les valeurs approchées à  $10^{-2}$  près, en  $\text{cm}^2$ , des aires des deux autres pièces du puzzle ?
4. Comparer avec les résultats obtenus par calcul dans la **Partie 2**.

**116** Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d'affixes respectives  $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$  et  $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ .

- Déterminer le module et un argument de  $z_A$ . En déduire le module et un argument de  $z_B$ .
- Placer avec précision les points A et B dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (on laissera apparent les traits de construction).
- a.** Donner une mesure en radians des angles orientés  $(\vec{u}; \overrightarrow{OA})$  et  $(\vec{u}; \overrightarrow{OB})$ .
- b.** En utilisant la relation :  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OB}) - (\vec{u}; \overrightarrow{OA})$  à  $2k\pi$  près ( $k \in \mathbb{Z}$ ), déterminer une mesure en radians de  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ .
- Déterminer la nature du triangle AOB (on justifiera la réponse).
- Soit I le point d'affixe  $z_I = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle AOB.

**117** On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives  $a = -2 + 2i\sqrt{3}$ ,  $b = \bar{a}$ ,  $c = 7 + i\sqrt{3}$ ,  $d = 7 + 5i\sqrt{3}$ ,  $e = -\frac{1}{2}a$ .

- Démontrer que  $b - a = c - d$ . En déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
- Démontrer que  $e - c = \frac{2}{3}(b - c)$ . En déduire que les points B, C et E sont alignés.
- Utiliser les résultats précédents pour placer les points A, B, et E dans le repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 1 cm.
- Terminer la construction du parallélogramme ABCD en laissant apparent les traits de construction.

**118** Le plan complexe est rapporté à un repère ortho-normé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes et  $i$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

- On considère l'équation (E) d'inconnue  $z$  :  $(2 - i)z = 2 - 6i$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E). On notera  $z_1$  la solution de (E) que l'on écrira sous forme algébrique.
- Déterminer le module et un argument de  $z_1$ . En déduire la forme trigonométrique de  $z_1$ .
- Soit  $z_2$  le nombre complexe défini par :  $z_2 = -iz_1$ . Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique de  $z_2$ .
- Soit A, B et C les points du plan d'affixes respectives :  $z_A = 2 - 2i$ ,  $z_B = -2 - 2i$  et  $z_C = -4i$ .
- Placer les points A, B et C dans le plan complexe.
- Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ .
- Déterminer la nature du triangle ABC.

**119** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

- On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :  $z_A = -\sqrt{3} + i$ ,  $z_B = z_A = -\sqrt{3} - i$ .
  - Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$ .
  - Placer avec précision les points A et B dans le plan muni du repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
  - Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.
- On considère l'équation d'inconnue  $z$  :  $2z - 4i = iz + 2$ .
  - Démontrer que le nombre complexe  $2i$  est la seule solution de cette équation.
  - On note C le point d'affixe  $2i$ . Placer le point C sur la figure précédente.
  - Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

**120** Le plan complexe est rapporté au repère ortho-normé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation d'inconnue  $z$  :  $(z - 2 - 2i)(iz + \sqrt{3} - 3i) = 0$  (on donnera les solutions sous forme algébrique).
- On note A, B et C les trois points du plan complexe d'affixes respectives :
  $a = 3 + i\sqrt{3}$ ,  $b = 2 + 2i$  et  $c$  de module 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .
  - Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes  $a$  et  $b$ .
  - Exprimer le nombre complexe  $c$  sous forme algébrique.
  - Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 2 cm comme unité graphique.
  - Démontrer que le triangle OCA est un triangle isocèle.
  - Justifier brièvement le fait que la droite (AC) est parallèle à l'axe des abscisses. En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle OCA.

**121** Le plan complexe est rapporté à un repère ortho-normé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . L'unité graphique est 2 cm.

On considère les points A, B, C, D et K d'affixes respectives :  $a = 2 + 2i$ ,  $b = 1 + i\sqrt{3}$ ,  $c = 2 - 2i$ ,  $d = 3 - i\sqrt{3}$  et  $k = 2$ .

- Construction du quadrilatère ABCD.
- Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes  $a$  et  $b$ .
- Démontrer que le point K est le milieu du segment [AC] et le milieu du segment [BD].
- Placer les points A, C et K, puis construire B et D.
- Nature du quadrilatère ABCD.
- Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.