10 Nombres complexes

CAPACITÉS

- Calculer et interpréter géométriquement la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module et un argument d'un nombre complexe.
- Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et *vice versa*.

De nombreuses situations de la vie quotidienne peuvent être modélisées à l'aide des nombres complexes : la compression d'images, les scanners IRM, le traitement des vidéos, des sons... Ainsi, lors d'une répétition, un groupe de musique souhaite travailler sur l'amplitude des sons émis. Pour cela, il prend la mesure des ondes sonores.

Vidéo
Découvrons les sons
lienmini.fr/10333-205

À partir de quel harmonique l'amplitude du signal est-elle inférieure à 0,1 ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 213

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash
Diaporama

5 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-206

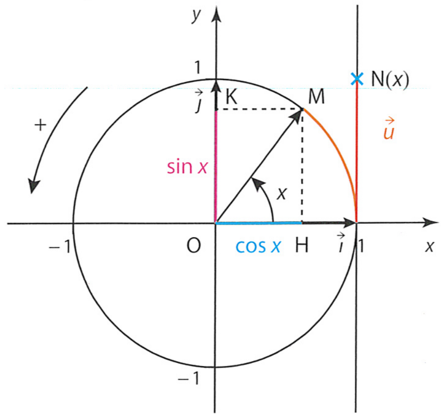
1 Le cercle trigonométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère le cercle trigonométrique de centre O. Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos x$.
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.
- Pour tout nombre réel x, on a :

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ avec k entier relatif.
$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ avec k entier relatif.



2 Repérage dans le plan

Dans un repère quelconque, si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ alors le **milieu** K de [AB] a pour coordonnées : $K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Dans un repère **orthonormé**, si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ alors la **distance** AB est telle que :

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ ou $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

Les coordonnées du **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. Si $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, alors x vaut :	30°	120°	300°	−30°	1
2. $\cos 120° =$	$\cos 30°$	$2\cos 60°$	$\sin 60°$	$\sin 30°$	1
3. Dans un triangle ABC rectangle isocèle en A avec $AB = 7$, $\sin\widehat{C}$ vaut :	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	1
4. Si A (−3 ; 6) et B(1 ; 1) sont deux points dans un repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :	(−2 ; 7)	(−4 ; 5)	(4 ; −5)	(−5 ; 4)	2
5. La norme du vecteur $\vec{u}(-1\,;5)$ est :	$\sqrt{6}$	$\sqrt{26}$	(1 ; −5)	(5 ; −1)	2
6. Les coordonnées du milieu de [AB] avec A(7 ; −5) et B (−5 ; 6) sont :	(1 ; 0,5)	(−6 ; 1)	(2 ; 11)	(1 ; 6)	2

→ Voir Corrigé p. 294

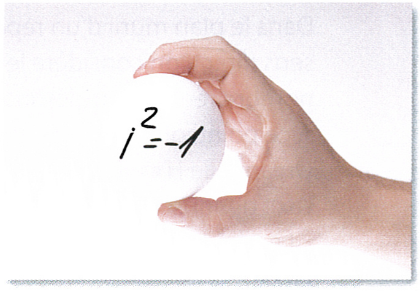
Activités

1 Les ensembles de nombres

Histoire des mathématiques

OBJECTIF Découvrir un nouvel ensemble de nombres → Cours 1A, 1B p. 214

Le premier ensemble de nombres utilisé à l'école primaire est l'ensemble des **entiers naturels** noté $\mathbb{N}$.



1. L'équation $2x+4=0$ admet-elle une solution dans $\mathbb{N}$?
L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ne permet pas de résoudre tous les problèmes. Il a donc fallu créer un ensemble plus grand, permettant de résoudre l'équation précédente mais contenant l'ensemble $\mathbb{N}$. Cet ensemble est l'ensemble des **entiers relatifs** noté $\mathbb{Z}$.

2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'équation $2x+1=0$.
Par un procédé analogue, on a créé $\mathbb{D}$ puis $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$.

3. L'équation $x^2+2=0$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$?
L'impossibilité de résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ (car un carré est toujours positif dans l'ensemble des réels) a amené la création d'un ensemble contenant $\mathbb{R}$. Ces nombres sont appelés des **nombres complexes** et ils forment un nouvel ensemble noté $\mathbb{C}$.

C'est le mathématicien Cardan qui, le premier, a imaginé l'existence de tels nombres en 1545.

La création de l'ensemble des nombres complexes permet ainsi de résoudre des équations de la forme $x^2=a$ (avec a réel négatif).
On retiendra :

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}.$$

Jérôme Cardan (1501-1576)

2 Les calculs dans $\mathbb{C}$

ALGO → Mémento Python p. 270 et p. 280

OBJECTIF Découvrir l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ → Cours 1C, 1D p. 214

On donne trois nombres complexes : $a=2+\mathrm{i}\quad b=1-2\mathrm{i}\quad c=-4+\mathrm{i}$

1. En utilisant les mêmes règles de calcul que dans l'ensemble des nombres réels, déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
$a+b\qquad b-c\qquad 2a\qquad 3a-2c\qquad b\times c\qquad a^2$

2. Vérifier les réponses trouvées à l'aide de la calculatrice.
Pour cela, sur la calculatrice CASIO, on tape : OPTN F3 COMPLEX i Abs Arg Conjg Exe

```
2+3i→A
                2+3i
1-2i→B
                1-2i
-4+i→C
                -4+i
```

```
A+B
                3+i
B-C
                5-3i
2A
                4+6i
_
```

```
a=complexe(2,3)
b=complexe(1,-2)
c=complexe(-4,1)
print(a+b)
print(b-c)
print(2*a)
print(3*a-2*c)
print(b*c)
print(a**2)
```

3. Lancer le logiciel Python puis construire un programme comme celui ci-contre afin de vérifier les réponses obtenues.

3 Les complexes et la géométrie

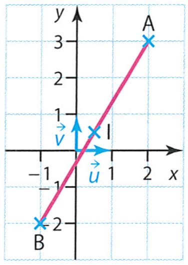
→ Mémento GeoGebra p. 275

OBJECTIF Découvrir le plan complexe → Cours 2A, 2B p. 216

On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On donne les deux nombres complexes suivants sous forme algébrique :
$z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -1 - 2i$.
On admet qu'à chaque nombre complexe $z = a + bi$, on peut associer un point M de coordonnées $(a\,;b)$.

1. Donner les coordonnées de A et B, points associés respectivement à z_1 et z_2.

2. Ouvrir le logiciel GeoGebra, créer le repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ puis placer les deux points A et B.



3. a. Tracer alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et lire ses coordonnées.

b. En déduire l'écriture sous forme algébrique du nombre complexe associé au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c. Calculer $z_2 - z_1$. Conclure.

4. a. Placer le point I, milieu du segment [AB], et lire ses coordonnées.

b. En déduire l'écriture sous forme algébrique du nombre complexe associé au point I.

c. Calculer $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Conclure.

4 En avant la musique !

→ Mémento Tableur p. 278

OBJECTIF Modéliser une situation simple à l'aide d'un calcul de module → Cours 3A p. 218

Un groupe de musique mesure le signal sonore émis lors d'une répétition.
Il sollicite alors un ami mathématicien afin que celui-ci lui fournisse le spectre donnant l'amplitude du signal. Cet ami détermine par le calcul des coefficients a_n et b_n où n désigne le rang de l'harmonique.

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	A_n
2	0	1,5	0	1,5
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	7			
10	8			
11	9			
12	10			
13	11			
14	12			

1. Ouvrir un fichier Excel et créer un tableau similaire à celui ci-contre.

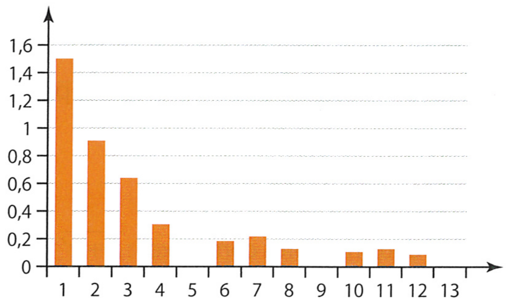
2. Saisir dans la cellule B3 la formule `=(2/(A3*PI()))*SIN((3*A3*PI())/2)` et dans la cellule C3 la formule `=(2/(A3*PI()))*(1-COS((3*A3*PI())/2)`.

3. En utilisant la recopie vers le bas, compléter les cellules de B4 à B14 puis de C4 à C14.

4. Dans la cellule D2, on souhaite calculer le module du nombre complexe $a_0 + b_0 i$.
Quelle formule faut-il alors saisir dans la cellule D2 ?

5. Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la cellule D14.

6. Réaliser alors le graphique sous forme de diagramme en bâtons en prenant pour abscisses la colonne A et pour ordonnées la colonne D.



7. En recopiant les colonnes A, B, C et D vers le bas jusque $n = 50$, déterminer la plus grande valeur de n à partir de laquelle l'amplitude du son est inférieure à 0,1.

Cours

1 Nombres complexes et opérations

A Définition

DÉFINITION Un nombre **complexe**, noté z, est un nombre s'écrivant sous la forme $\boldsymbol{z = a + bi}$ où a et b sont deux nombres réels et i un nombre appelé **imaginaire** tel que $\mathbf{i^2 = -1}$.
La forme $a + bi$ s'appelle la **forme algébrique** de z.

B Vocabulaire et notation

DÉFINITION Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. Le réel a s'appelle la **partie réelle** de z et on note $\boldsymbol{a = \mathrm{Re}(z)}$.
Le réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z et on note $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}(z)}$.

REMARQUES
- Si $a = 0$ alors $z = bi$ et z s'appelle alors un imaginaire pur.
- Si $b = 0$ alors $z = a$ et z est alors un nombre réel.

→ Voir Exercice résolu 1

C Somme et produit

L'addition, la soustraction et le produit s'effectuent dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ de la même manière que dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

→ Voir Exercice résolu 2

D Quotient

Conjugué

DÉFINITION Soit le nombre complexe $z = a + bi$. On appelle **conjugué** de z, noté $\boldsymbol{\overline{z}}$, le nombre complexe défini par $\boldsymbol{\overline{z} = a - bi}$.

PROPRIÉTÉ Soit le nombre complexe $z = a + bi$, on a : $\boldsymbol{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$.

Inverse

Soit le nombre complexe non nul $z = a + bi$. La forme algébrique de $\dfrac{1}{z}$ se calcule à partir de l'égalité : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de z.

→ Voir Exercice résolu 2

Quotient

Si z est un nombre complexe et si z' est un nombre complexe non nul, alors on calcule la forme algébrique du quotient à partir de l'égalité $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}}$.

→ Voir Exercice résolu 2

E Opérations sur la conjugaison

Soit z et z' deux nombres complexes : $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Soit z et z' deux nombres complexes avec $z' \neq 0$: $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Méthode

Exercice résolu 1 — Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe

Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire :

1. $z_1 = 2 - 4i$
2. $z_2 = 5 + i\sqrt{3}$
3. $z_3 = 6i$
4. $z_4 = -7$
5. $z_5 = 2i - 3$

Méthode — Pour déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe

1 On **vérifie** que le nombre proposé est bien écrit sous la forme $a + bi$.
2 On **détermine** la valeur de a qui constitue la partie réelle et celle de b qui constitue la partie imaginaire.
3 La partie réelle de z se note $\text{Re}(z)$ et la partie imaginaire $\text{Im}(z)$.

Solution

1. $\text{Re}(z_1) = 2$ et $\text{Im}(z_1) = -4$ (attention aux signes !).
2. $\text{Re}(z_2) = 5$ et $\text{Im}(z_1) = \sqrt{3}$ (quand la partie imaginaire est une racine carrée, par convention i est positionné avant la racine carrée).
3. $\text{Re}(z_3) = 0$ et $\text{Im}(z_3) = 6$ (z_3 est un imaginaire pur donc sa partie réelle est nulle).
4. $\text{Re}(z_4) = -7$ et $\text{Im}(z_4) = 0$ (z_4 est un réel donc sa partie imaginaire est nulle).
5. Le nombre z_5 n'est pas écrit sous forme algébrique : $z_5 = -3 + 2i$. D'où $\text{Re}(z_5) = -3$ et $\text{Im}(z_5) = 2$.
Sur une calculatrice Casio, on obtient les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe en procédant de la manière suivante : $\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{COMPLEX}}$ en utilisant la touche $\boxed{\text{F3}}$ puis $\boxed{\text{F6}}$ $\boxed{\text{ReP}}$ $\boxed{\text{ImP}}$

```
ReP (2-4i)
                2
ImP (2-4i)
               -4
```

→ Voir Exercices 31 et 32 p. 222

Exercice résolu 2 — Réaliser les opérations sur les nombres complexes

Soit $z_1 = 2 + 5i$ et $z_2 = -3 + 2i$ deux nombres complexes. Calculer :

1. $z_1 + z_2$ **2.** $2z_1 - 3z_2$ **3.** $z_1 \times z_2$
4. z_1^2 **5.** $\dfrac{1}{z_1}$ **6.** $\dfrac{z_1}{z_2}$

On pourra vérifier les réponses obtenues à la calculatrice.

Méthode — Pour réaliser les opérations sur les nombres complexes

1 On **utilise** les mêmes méthodes que dans $\mathbb{R}$ avec une particularité : $i^2 = -1$.
2 On **utilise** les parenthèses.
3 Pour les inverses et les quotients, on **a recours** au conjugué du dénominateur avec $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ où a et b sont respectivement les parties réelle et imaginaire de z.

Solution

1. $z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-3 + 2i) = 2 + 5i - 3 + 2i = -1 + 7i$.
2. $2z_1 - 3z_2 = 2(2 + 5i) - 3(-3 + 2i) = 4 + 10i + 9 - 6i = 13 + 4i$.
Remarque : les parenthèses sont ici indispensables !
3. $z_1 \times z_2 = (2 + 5i)(-3 + 2i) = 2 \times (-3) + 2 \times (2i) - 3 \times (5i) + (5i) \times (2i) = -6 + 4i - 15i + 10i^2 = -6 + 4i - 15i - 10 = -16 - 11i$.
4. $z_1^2 = (2 + 5i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times (5i) + (5i)^2 = 4 + 20i + 25i^2 = 4 + 20i - 25 = -21 + 20i$.
5. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2+5i} = \dfrac{2-5i}{(2+5i)(2-5i)} = \dfrac{2-5i}{2^2+5^2} = \dfrac{2-5i}{29} = \dfrac{2}{29} - \dfrac{5}{29}i$
6. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2+5i}{-3+2i} = \dfrac{(2+5i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \dfrac{2\times(-3)+2\times(-2i)+(5i)\times(-3)+(5i)\times(-2i)}{(-3)^2+2^2}$
$= \dfrac{-6-4i-15i-10i^2}{9+4} = \dfrac{-6-19i+10}{13} = \dfrac{4-19i}{13} = \dfrac{4}{13} - \dfrac{19}{13}i$

→ Voir Exercices 33 à 42 p. 222

2 Nombres complexes et géométrie

Dans toute cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

A Affixe d'un point

DÉFINITION À tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe, dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, un seul point M de coordonnées $(a ; b)$.

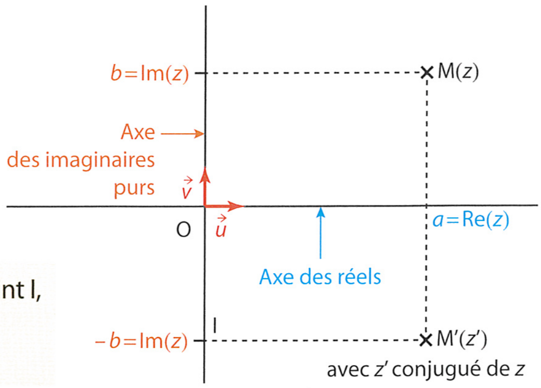
→ Voir Exercices résolus 3 et 4

Vocabulaire

DÉFINITION Le nombre complexe $\boldsymbol{z = a + bi}$ a pour **image** le point M de coordonnées $(a ; b)$.

DÉFINITION Le point M de coordonnées $(a ; b)$ a pour **affixe** le nombre complexe $z_M = a + bi$. On dit aussi que $z_M = a + bi$ est l'affixe de M $(a ; b)$.

Sur l'axe des abscisses $(O ; \vec{u})$ sont placés les points de coordonnées $(a ; 0)$ d'affixe $z = a$ réelle. Cet axe s'appelle **l'axe des réels.**
Sur l'axe des ordonnées $(O ; \vec{v})$ sont placés les points de coordonnées $(0 ; b)$ d'affixe $z = bi$ imaginaire pure. Cet axe s'appelle **l'axe des imaginaires purs.**
Si M est le point d'affixe $z = a + bi$ alors le point M′ d'affixe $\overline{z} = a - bi$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels $(O ; \vec{u})$.



PROPRIÉTÉ Si A est le point d'affixe z_A et B celui d'affixe z_B alors le point I, **milieu** du segment [AB], a pour affixe $\boldsymbol{z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}}$.

→ Voir Exercice résolu 5

B Affixe d'un vecteur

DÉFINITION À tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ un seul point M de coordonnées $(a ; b)$.
Les coordonnées de M sont aussi celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Donc $z = a + bi$ peut aussi être considéré comme l'affixe d'un vecteur.

Opérations sur les vecteurs

PROPRIÉTÉS Si $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$ et si k est un nombre réel alors :
- le vecteur $\boldsymbol{\vec{w} + \overrightarrow{w'}}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{\vec{w}+\overrightarrow{w'}} = z_{\vec{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}}$
- le vecteur $\boldsymbol{k\,\vec{w}}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{k\vec{w}} = k \times z_{\vec{w}}}$.

Vecteur défini par deux points

PROPRIÉTÉ Si A est le point d'affixe z_A et B celui d'affixe z_B alors le **vecteur** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ a pour affixe $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$.

→ Voir Exercice résolu 5

Notation

Un **repère orthonormé** est constitué d'un point O, origine du repère, et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls tels que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.
Une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\dfrac{\pi}{2}$.
On a pour habitude de noter un tel repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ mais pour éviter toute confusion avec le nombre complexe i, on adopte la notation $\boldsymbol{(O ; \vec{u}, \vec{v})}$.

Exercice résolu 3 — Représenter graphiquement des points d'affixes données

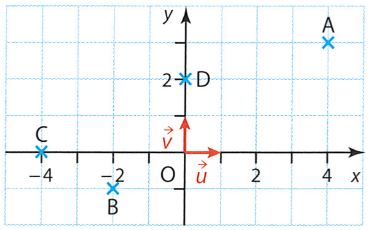
Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, représenter les points A, B, C et D d'affixes respectives
$z_1 = 4 + 3i$ $\quad z_2 = -2 - i$
$z_3 = -4$ $\quad z_4 = 2i$.

Méthode — Pour représenter graphiquement des points d'affixes données

1. **Tracer** le repère en symbolisant l'origine O et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Pour chacune des affixes, **déterminer** les parties réelle et imaginaire.
3. La partie réelle est l'abscisse du point à représenter, la partie imaginaire est son ordonnée.

Solution

$z_1 = 4 + 3i$ est sous la forme algébrique. $\mathrm{Re}(z_1) = 4$ et $\mathrm{Im}(z_1) = 3$, donc A(4 ; 3).
$z_2 = -2 - i$ est sous la forme algébrique. $\mathrm{Re}(z_2) = -2$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -1$, donc B(−2 ; −1).
z_3 est un réel donc C est sur l'axe des réels (axe des abscisses).
$z_4 = 2i$ est sous la forme algébrique. $\mathrm{Re}(z_4) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_4) = 2$, donc D(0 ; 2).
z_4 est un imaginaire pur donc D est sur l'axe des imaginaires purs (axe des ordonnées).



→ Voir Exercice 45 p. 222

Exercice résolu 4 — Déterminer l'affixe d'un point à partir de ses coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points suivants :
A(−2 ; −4), B(0 ; −2), C(7 ; 0) et D$\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.
Déterminer leurs affixes respectives.

Méthode — Pour déterminer l'affixe d'un point à partir de ses coordonnées

1. L'affixe de A se note de manière naturelle z_A.
2. L'abscisse de A est la partie réelle de z_A et l'ordonnée de A est la partie imaginaire de z_A.

Solution

$z_A = -2 - 4i$; $z_B = 0 - 2i = -2i$; $z_C = 7 + 0i = 7$ et $z_D = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

→ Voir Exercice 46 p. 222

Exercice résolu 5 — Calculer l'affixe du milieu d'un segment et celle d'un vecteur

Soit A le point d'affixe $z_A = 5 + 3i$ et B le point d'affixe $z_B = 7 - 5i$.
1. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment [AB].
2. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Méthode — Pour calculer l'affixe du milieu d'un segment et celle d'un vecteur

1. $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Solution

1. $z_I = \frac{5 + 3i + 7 - 5i}{2} = \frac{12 - 2i}{2} = \frac{12}{2} - \frac{2}{2}i = 6 - i$.

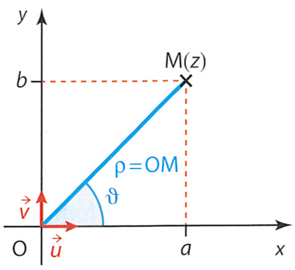
2. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 7 - 5i - (5 + 3i) = 7 - 5i - 5 - 3i = 2 - 8i$.

→ Voir Exercices 47 à 51 p. 222, 223

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans toute cette page, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A Module



DÉFINITION Soit M le point d'affixe $z=a+bi$. On appelle **module** de z et on note $|z|$ la distance OM.

REMARQUES
- $OM=\sqrt{a^2+b^2}$. Donc $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A alors $|z_B-z_A|=AB$.

PROPRIÉTÉS
- Soit z et z' deux nombres complexes. $|z\times z'|=|z|\times|z'|$.
- Soit z et z' deux nombres complexes avec z' non nul. $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$.

→ Voir Exercices résolus 6 et 7

B Argument

DÉFINITION Soit M le point d'affixe $z=a+bi$ avec $M\neq O$.
On appelle **argument de z** et on note **arg(z)** une mesure exprimée en radians de l'angle orienté $\vartheta=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.

REMARQUE • Si le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe z_B-z_A alors $\arg(z_B-z_A)=\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$.

C Forme trigonométrique

$\cos(\vartheta)=\dfrac{a}{\rho}$ donne $a=\rho\cos(\vartheta)$ et $\sin(\vartheta)=\dfrac{b}{\rho}$ donne $\rho=\rho\sin(\vartheta)$.

Donc $z=a+bi=\rho\cos(\vartheta)+i\,\rho\sin(\vartheta)=\rho\,[\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)]$.

DÉFINITION Si z est un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument ϑ alors $\rho\,[\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)]$ s'appelle la **forme trigonométrique** de z.

PROPRIÉTÉ Deux nombres complexes **conjugués** ont **même module** et des **arguments opposés** à $2k\pi$ près avec k appartenant à $\mathbb{Z}$.

→ Voir Exercice résolu 6

D Passage d'une forme à l'autre

De la forme algébrique vers la forme trigonométrique	De la forme trigonométrique vers la forme algébrique
Soit $z=a+bi$ un nombre complexe non nul. $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$. $\vartheta=\arg(z)$ se détermine à partir de $\begin{cases}\cos(\vartheta)=\dfrac{a}{\rho}=\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{\lvert z\rvert}\\ \sin(\vartheta)=\dfrac{b}{\rho}=\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\lvert z\rvert}\end{cases}$. La forme trigonométrique de z est $z=\rho\,[\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)]$ ou $z=[\rho\,;\vartheta]$.	Soit z le nombre complexe de module ρ et d'argument ϑ $(z\neq 0)$. $\mathrm{Re}(z)=a=\rho$ $\cos(\vartheta)$ et $\mathrm{Im}(z)=b=\rho\sin(\vartheta)$. La forme algébrique de z est $z=a+bi$.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 6 — Calculer le module et un argument d'un nombre complexe puis donner sa forme trigonométrique

Pour chacun des nombres complexes suivants, calculer le module, déterminer un argument et donner sa forme trigonométrique :

1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ **2.** $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

3. $z_3 = 3\mathrm{i}$ **4.** $z_4 = -7$.

Méthode — Pour calculer le module et un argument d'un nombre complexe puis donner sa forme trigonométrique

1 **Déterminer** la partie réelle a et la partie imaginaire b du nombre complexe z.

2 $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3 $\vartheta = \arg(z)$ se détermine à partir de $\cos(\vartheta)$ et $\sin(\vartheta)$.

4 $z = [\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\sin(\vartheta)]$ est une forme trigonométrique.

Solution

1. $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ donc $a = \mathrm{Re}(z_1) = 1$ et $b = \mathrm{Im}(z_1) = 1$.

$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. On pose $\vartheta_1 = \arg(z_1)$.

$$\begin{cases} \cos(\vartheta_1) = \dfrac{a}{\rho_1} = \dfrac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\vartheta_1) = \dfrac{b}{\rho_1} = \dfrac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} ; \text{donc } \vartheta_1 = \frac{\pi}{4}.$$

D'où $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right]$.

À la calculatrice, on utilise la touche $\boxed{r < \theta}$. On obtient :

```
1+i▸r∠θ
                 √2∠(1/4)π
```

La première information donne le module et la seconde un argument en radians.

2. $z_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ donc $a = \mathrm{Re}(z_2) = -\sqrt{3}$ et $b = \mathrm{Im}(z_2) = 1$.

$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$.

On pose $\vartheta_2 = \arg(z_2)$. $\begin{cases} \cos(\vartheta_2) = \dfrac{a}{\rho_2} = \dfrac{\mathrm{Re}(z_2)}{|z_2|} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\vartheta_2) = \dfrac{b}{\rho_2} = \dfrac{\mathrm{Im}(z_2)}{|z_2|} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$;

donc $\vartheta_2 = \frac{5\pi}{6}$. D'où $z_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right]$.

3. $z_3 = 3\mathrm{i}$.

z_3 est un imaginaire pur de partie imaginaire positive égale à 3. Donc $|z_3'| = 3$ et $\arg(z_3) = \frac{\pi}{2}$.

D'où : $z_3 = 3\left[\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right]$.

4. $z_4 = -7$.

z_4 est un réel de partie réelle négative égale à -7. Donc $|z_4'| = -(-7) = 7$ et $\arg(z_4) = \pi$.

D'où : $z_4 = 7[\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi]$.

→ Voir Exercices 53 à 62 p. 223

Exercice résolu 7 — Travailler sur les modules

Soit $z_1 = 2 - 2\mathrm{i}$ et $z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ deux nombres complexes.

1. Déterminer le module de z_1 et celui de z_2.

2. En déduire la valeur du module de $z_1 \times z_2$ puis celle du module de $\frac{z_1}{z_2}$.

Méthode — Pour travailler sur les modules

1 Soit $z = a + \mathrm{i}b$. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2 $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.

3 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Solution

1. $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

2. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| = 2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

→ Voir Exercice 55 p. 223

L'essentiel

1 Nombres complexes et opérations

Formule algébrique d'un nombre complexe : $z = a + bi$ où i est tel que $i^2 = -1$.

a est un réel appelé **partie réelle** de z et noté $\mathrm{Re}(z)$.

b est un réel appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.

Si $z = a$ alors z est un **réel** et donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si $z = bi$ alors z est un **imaginaire pur**.

Le **conjugué** de z est $\overline{z} = a - bi$ et $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$.

2 Nombres complexes et géométrie

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

$z = a + bi$ est **l'affixe** du point M de coordonnées $(a\,;b)$. C'est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de coordonnées $(a\,;b)$.

Le point M de coordonnées $(a\,;b)$ est **l'image** du nombre complexe $z = a + bi$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de coordonnées $(a\,;b)$ est l'image du nombre complexe $z = a + bi$.

Si A et B ont pour affixe respectives z_A et z_B alors :

- Le point I, **milieu** du segment [AB], a pour affixe : $z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}$
- Le **vecteur** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$
- La **distance** AB est donnée par : $\mathrm{AB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}|$

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe et M son image dans le repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$.

Le **module** de z est $\rho = |z| = \mathrm{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Un **argument** de z à $2k\pi$ près est $\vartheta = \arg(z) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{OM}})$.

On a : $\cos(\vartheta) = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin(\vartheta) = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$.

La forme trigonométrique de z est soit $z = \rho\,[\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\sin(\vartheta)]$, soit $z = [\rho\,;\vartheta]$.

$|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ à $2k\pi$ près.

Soit z et z' deux nombres complexes. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ avec z' non nul.

4 Passage d'une forme à l'autre pour un nombre complexe z non nul

Forme algébrique $z = a + bi$

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\vartheta = \arg(z)$ avec $\begin{cases} \cos(\vartheta) = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\vartheta) = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$

Forme trigonométrique $z = \rho\,[\cos(\vartheta) + \mathrm{i}\sin(\vartheta)]$ ou $z = [\rho\,;\vartheta]$

$a = \rho\cos\vartheta$

$b = \rho\sin\vartheta$

1 Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour maîtriser ses automatismes

lienmini.fr/10333-208

Rechercher les parties réelle et imaginaire

2 Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 - 4\text{i}$ $\quad z_2 = 0{,}5\text{i} + 5$

$z_3 = -\sqrt{2}$ $\quad z_4 = (5 + \pi)\text{i}$

3 $1 + \text{i}\dfrac{\pi}{6}$ est-elle la forme algébrique d'un nombre complexe ? Si oui, donner sa partie réelle et sa partie imaginaire.

Calculer dans $\mathbb{C}$

4 Calculer $(1 + 4\text{i}) - (5 - \text{i})$.

5 Calculer $(2 - 3\text{i}) - (-7 + 2\text{i})$.

6 Calculer $(4 - 2\text{i}) + (-5 + 3\text{i})$.

7 Calculer $(2 + 3\ \text{i})\ (-5 + \text{i})$.

8 Calculer $(2 + 5\text{i})^2$.

9 Calculer $(2 - 3\text{i})^2$.

10 Calculer $(1 - \text{i})(2 + \text{i})$.

11 Calculer $(1 - 2\text{i}) - \dfrac{1}{2+\text{i}}$.

12 Calculer $\dfrac{3+\text{i}}{1-\text{i}}$.

Travailler sur les affixes

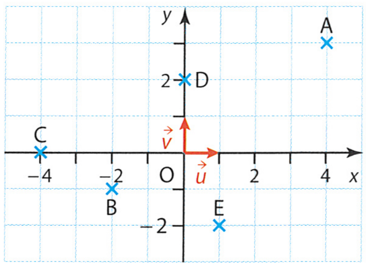
13 On donne $z_1 = 1 + \text{i}$, $z_2 = 2 - 3\text{i}$ et $z_3 = -4 - 5\text{i}$. Déterminer les coordonnées des points A, B et C, images respectives de z_1, z_2 et z_3.

14 Soit A $(-2\ ;\ 2)$, B $(5\ ;\ 1)$, C $(-1\ ;\ -1)$, D $(0\ ;\ 3)$ et E $(-4\ ;\ 0)$, cinq points du plan.
Déterminer les affixes respectives de A, B, C, D et E.

15 L'affixe du milieu du segment [AB] d'affixes respectives $z_A = 2\text{i}$ et $z_B = 1 - \text{i}$ est-elle $z = \dfrac{3-\text{i}}{2}$?

16 Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un imaginaire pur où A et B deux points d'affixes $z_A = 2 - \text{i}$ et $z_B = 9\text{i} - 2$.

17 À partir de la figure ci-contre, donner l'affixe :
– des points A, B, C D et E ;
– des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$;
– des points I et J, milieux respectifs des segments [CD] et [CE].



Calculer des modules et des arguments

18 Donner le module puis un argument de $z = -3\text{i}$ et de $z' = 701$.

19 Donner la forme trigonométrique de $z = 6 - 6\text{i}$.

20 Donner la forme trigonométrique de $z = -\dfrac{\text{i}}{2}$.

21 Soit $z = -2\text{i}$. Donner le module et un argument de z^4 et z^{2019}.

22 Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \text{i}$ et $z_B = -1 + 3\text{i}$. Calculer la distance AB.

23 Soit $z = 1 + \text{i}$ et $z' = -2\text{i}$ deux nombres complexes.
1. Déterminer le module et un argument de chacun de ces deux nombres complexes.
2. En déduire le module et un argument de $\bar{z}$ et de $-z'$.
3. En déduire le module $z \times z'$, z^3, z'^2, $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z}{z'}$.

Passer d'une forme à l'autre

24 Donner la forme algébrique de $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - \text{i}\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

25 Donner la forme algébrique de $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

26 Donner la forme algébrique de
$z = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

27 Donner la forme algébrique de $z = -\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

28 Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument π. Donner sa forme algébrique.

29 Donner la forme trigonométrique du nombre complexe de partie réelle 1 et de partie imaginaire $\sqrt{3}$.

30 Si $z = -5$, donner la forme trigonométrique de z, z^{2019} et $\dfrac{3}{z}$.