Pour acquérir les automatismes

1 Questions Flash

Diaporama

11 diapositives pour maîtriser ses automatismes

lienmini.fr/10333-218

Calculer un produit scalaire avec la définition

2 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

3 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

4 Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $(\vec{u},\vec{v}) = 60°$.

5 Le triangle ABC est tel que $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

6 Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

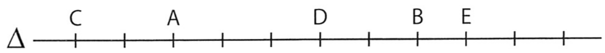
7 Le triangle ABC est tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

8 Le triangle ABC est tel que $AB = 7$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 90°$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

9 Le triangle ABC est équilatéral de côté 4. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

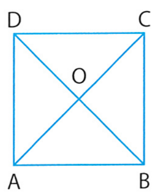
10 Le triangle ABC est isocèle de sommet A, les angles à la base ont pour mesure 75° et $AB = AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

11 Les points A, B, C, D et E sont placés sur la droite graduée Δ (unité de longueur égale à BE).



Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$.

12 ABCD est un carré de côté 1 et de centre O. Calculer les produits scalaires :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$.



Calculer un produit scalaire avec les coordonnées

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

13 On considère les vecteurs $\vec{u}(2\,;-3)$ et $\vec{v}(2\,;5)$.
1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

14 Les vecteurs $\vec{u}(-2\,;3)$ et $\vec{v}(3\,;2)$ sont-ils orthogonaux ?

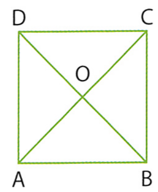
15 On considère les points A(1 ; 2), B(−1 ; −2) et C(4 ; −1).
Calculer :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,
AB et AC,
$\cos\widehat{BAC}$ et une mesure de $\widehat{BAC}$ à 1° près.

16 On considère les points A(3 ; 7), B(−6 ; 4) et C(8 ; 0).
Calculer :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,
AB et AC,
$\cos\widehat{BAC}$ et une mesure de $\widehat{BAC}$ à 1° près.

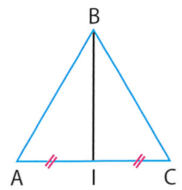
17 On considère les points A(1 ; 1), B(2 ; 3) et C(−1 ; 2). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Utiliser le projeté orthogonal pour calculer un produit scalaire

18 ABCD est un carré de côté 1 et de centre O.
En utilisant la projection, calculer les produits scalaires :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$.



19 Le triangle ABC est isocèle de sommet B et I est le milieu du segment [AC].
On a $AC = 6$ et $BI = 5$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Utiliser la formule d'Al-Kashi

20 **1.** Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Calculer BC.
2. Le triangle ABC est tel que $AB = 2$, $AC = 1$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

21 Le triangle ABC est tel que $AC = 4$, $BC = 9$ et $AB = 7$. Calculer une mesure de $\widehat{BAC}$ en degrés.

22 Le triangle ABC est tel que $AB = 7$, $AC = 9$ et $BC = 5$. Calculer une mesure de $\widehat{BAC}$ puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Définition du produit scalaire

→ Aide Cours 1 p. 194

Question de cours

23 Rappeler la formule du produit scalaire avec normes et angle.

24 Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{6}$.

2. $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=1$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$.

3. $\|\vec{u}\|=\frac{5}{4}$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{5}$ et $(\vec{u},\vec{v})=-\frac{2\pi}{3}$.

25 Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\|=7$, $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{3\pi}{4}$.

2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=6$ et $(\vec{u},\vec{v})=-\frac{\pi}{4}$.

3. $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=5$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}$.

26 Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$.

2. $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=6$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=15\sqrt{2}$.

27 Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}\|=\frac{2}{3}$, $\|\vec{v}\|=6$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\sqrt{3}$.

2. $\|\vec{u}\|=\sqrt{2}$, $\|\vec{v}\|=1$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.

28 Calculer $\|\vec{u}\|$.

1. $\|\vec{v}\|=3$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$.

2. $\|\vec{v}\|=2$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$ et $(\vec{u},\vec{v})=\pi$.

29 Calculer $\|\vec{u}\|$.

1. $\|\vec{v}\|=\frac{1}{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$.

2. $\|\vec{v}\|=1$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{-3\pi}{4}$.

30 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=2$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$.

2. En déduire $\vec{u}\cdot(2\vec{v})$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(3\vec{u}+\vec{v})$ et $(\vec{u}+\vec{v})^2$.

Dans les exercices 31 et 32, ABC est un triangle. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

31 **1.** $AB=5$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=30°$.

2. $AB=1$, $AC=2$ et $\widehat{BAC}=120°$.

32 **1.** $AB=\frac{1}{4}$, $AC=3$ et $\widehat{BAC}=45°$.

2. $AB=\sqrt{3}$, $AC=\frac{1}{3}$ et $\widehat{BAC}=150°$.

Dans les exercices 33 et 34, ABC un triangle. Déterminer la valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

33 **1.** $AB=10$, $AC=2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$.

2. $AB=\sqrt{2}$, $AC=2$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$.

34 **1.** $AB=3$, $AC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6\sqrt{3}$.

2. $AB=7$, $AC=3$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-10$.

3. $AB=\sqrt{3}$, $AC=\sqrt{6}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$.

35 Soit ABCD un carré de côté 2. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

Expression analytique

→ Aide Cours 2 p. 196

Question de cours

36 Rappeler la formule du produit scalaire avec les coordonnées dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans les exercices 37 à 38, calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

37 **1.** $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(5;4)$.

2. $\vec{u}(1;0)$ et $\vec{v}(-3;10)$.

38 **1.** $\vec{u}\left(\frac{1}{2};4\right)$ et $\vec{v}(10;7)$.

2. $\vec{u}\left(\frac{2}{3};5\right)$ et $\vec{v}(9;-3)$.

3. $\vec{u}(2;1)$ et $\vec{v}(-5;-4)$.

39 **1.** $\vec{u}\left(\frac{2}{7};3\right)$ et $\vec{v}(-21;2)$.

2. $\vec{u}(-\sqrt{2};1)$ et $\vec{v}(\sqrt{3};\sqrt{6})$.

3. $\vec{u}(-6;-2)$ et $\vec{v}\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$

40 Soit $A(-1;2)$, $B(3;5)$ et $C(7;-6)$ trois points du plan. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

3. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

41 Soit $A(0;2)$, $B(3;1)$ et $C(-1;4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2. Calculer AB et AC.

3. En déduire, en utilisant une autre expression du produit scalaire, la valeur arrondie à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Vecteurs orthogonaux

→ Aide Cours 2 p. 196

Pour les exercices 42 et 43, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.

42 **1.** $\vec{u}(-3;2)$ et $\vec{v}(2;3)$.
2. $\vec{u}(1;4)$ et $\vec{v}(4;1)$.
3. $\vec{u}(3;-4)$ et $\vec{v}(2;1{,}5)$.
4. $\vec{u}(1;0)$ et $\vec{v}(-1;1)$.

43 **1.** $\vec{u}(10^{-10};-10^{-7})$ et $\vec{v}(10^{-3};10^{-5})$.
2. $\vec{u}(-0{,}0001;0{,}000001)$ et $\vec{v}(0{,}000001;0{,}00001)$.
3. $\vec{u}=(10^{7};-10^{5})$ et $\vec{v}=(10^{-4};10^{-2})$.

44 Dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non.
1. $\vec{u}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)$.
2. $\vec{u}(-\sqrt{3};-1)$ et $\vec{v}(1;-\sqrt{3})$.
3. $\vec{u}(\sqrt{3};2)$ et $\vec{v}(-2\sqrt{2};\sqrt{6})$.
4. $\vec{u}=(-\sqrt{2};-3)$ et $\vec{v}=(3;\sqrt{2})$.

45 Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
1. $\vec{u}(-5;6)$ et $\vec{v}(x;4)$.
2. $\vec{u}(-x;3)$ et $\vec{v}(1;x+4)$.
3. $\vec{u}=(-3;2)$ et $\vec{v}=(1;x)$.

46 Déterminer le réel x pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
1. $\vec{u}(-2x;-5)$ et $\vec{v}(x;8)$.
2. $\vec{u}(x+5;x-3)$ et $\vec{v}(x;3)$.
3. $\vec{u}=(x;x+2)$ et $\vec{v}=(x+2;2)$.

47 Dans chacun des cas suivants, dire si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ou non.
1. A (1 ; 1), B (2 ; 3), C (2 ; − 1) et D (− 2 ; 1).
2. A (− 3 ; 1), B (1 ; 4), C (0 ; 5) et D (1 ; 1).
3. A (2 ; 5), B (1 ; 2), C (5 ; 4) et D (8 ; 3).

48 Soit les points A (2 ; 1), B (4 ; 2) et C (1 ; 3).
1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer AB et AC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

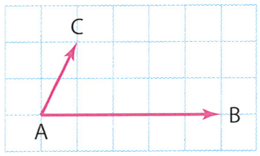
49 ALGO **Compléter un programme**
Compléter l'algorithme suivant, dans lequel x_u, y_u, x_v, y_v, p sont des nombres réels :

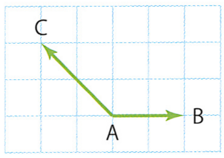
$p \leftarrow x_u x_v + y_u y_v$
Si … alors afficher « u et v sont orthogonaux »
  Sinon afficher « … »
Fin Si

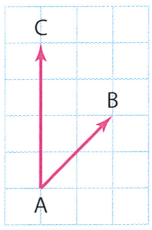
Avec le projeté orthogonal

→ Aide Cours 3 p. 198

50 L'unité de longueur est le côté d'un carreau.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

①


②


③


51 ABC est un triangle équilatéral de côté 3.
Calculer les produits scalaires suivants :
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ **3.** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AC}$

52 ABCD est un carré de centre O et de côté 4.
Calculer les produits scalaires suivants :
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$
3. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BD}$ **4.** $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DA}$

53 ABCD est un losange de centre O tel que AC = 7 et BD = 4. Calculer les produits scalaires suivants :
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
3. $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$ **4.** $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CB}$

Formule d'Al-Kashi

→ Aide Cours 4 p. 198

54 On considère un triangle ABC tel que AB = 2, AC = 3 et $\widehat{BAC}=45°$.
1. Déterminer la valeur exacte de AC.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$.

55 Déterminer une mesure des angles d'un triangle ABC tel que AB = 9, BC = 8 et AC = 7.

56 Déterminer une mesure des angles d'un triangle ABC tel que AB = 6, BC = $5\sqrt{2}$ et AC = 7.

Exercices

Pour s'entraîner

Définition du produit scalaire

57 Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

1. $\|\vec{u}\|=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\|\vec{v}\|=9$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$.

2. $\|\vec{u}\|=\frac{1}{2}$, $\|\vec{v}\|=2$ et $(\vec{u},\vec{v})=\pi$.

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 195

Vrai ou faux

58 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre, puis justifier.*

1. Si $\|\vec{u}\|=4$, $\|\vec{v}\|=6$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-12$, alors $(\vec{u},\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$.

2. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

QCM

59 *Indiquer dans chaque cas la ou les bonnes réponses.*

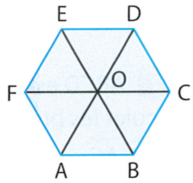
1. Si $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=5$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$, alors :

a. $\cos(\vec{u},\vec{v})=-\frac{5}{4}$ **b.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=-\frac{4}{5}$ **c.** $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{4}{5}$

2. Si $\|\vec{u}\|=14$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$, alors :

a. $\|\vec{v}\|=\frac{7}{6}$ **b.** $\|\vec{v}\|=-\frac{7}{6}$ **c.** $\|\vec{v}\|=\frac{3}{7}$

60 ABCDEF est un hexagone régulier de centre O et de côté 1.
Calculer les produits scalaires suivants :



1. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ **2.** $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$ **3.** $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DE}$

4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}$ **5.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$ **6.** $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EB}$

→ Voir **Exercice résolu 2** p. 195

Vrai ou faux

61 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.*

1. Si AB = 3, AC = 5 et $\widehat{BAC}=45°$, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\approx 7{,}9$

2. Si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$, alors l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

3. Si AB = 5, AC = 4 et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$, alors $\widehat{BAC}=60°$.

QCM

62 *Indiquer dans chaque cas la ou les bonnes réponses.*

1. Dans un triangle équilatéral ABC de côté 2 :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$ **c.** $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=2$

2. Si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$, AB = 12 et AC = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, alors :

a. $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **b.** $\cos\widehat{BAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $A\in[BC]$

3. Si A, B et C sont alignés et si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$ alors :

a. C est le milieu de $[AB]$ **b.** $C\in[AB]$ **c.** $A\in[BC]$

Expression analytique

63 Soit $A\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $B(2;-3)$ et $C\left(\frac{3}{2};4\right)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ **3.** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$

→ Voir **Exercice résolu 4** p. 197

Vrai ou faux

64 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.*

1. Soit A(– 1 ; 1), B(4 ; 2) et C(3 ; 0). $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=19$.

2. Soit $\vec{u}(x;y)$ un vecteur du plan. $\vec{u}^2=(x+y)^2$.

QCM

65 *Indiquer dans chaque cas la ou les bonnes réponses.*

1. Soit $\vec{u}(x;-y)$ et $\vec{v}(x;y)$. On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=$

a. x^2+y^2 **b.** $(x-y)(x+y)$ **c.** x^2-y^2

2. Soit A(2 ; 3), B(1 ; – 5) et C(x ; 2). Si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$, alors :

a. $x=-1$ **b.** $x=-3$ **c.** $x=3$

66 Soit A(– 2 ; 2), B(3 ; – 1) et C(2 ; 4).

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

2. Calculer AB, AC et BC.

3. En déduire les valeurs arrondies au degré près des angles du triangle ABC.

Vecteurs orthogonaux

Vrai ou faux

67 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.*

1. Soit A(1 ; 1), B(0 ; 3) et C(– 4 ; 2). Le triangle ABC est rectangle en B.

2. Si $\vec{u}(x;-2)$ et $\vec{v}(x;x-0{,}5)$ sont orthogonaux, alors $x=1$.

68 Soit A(– 3 ; 1) et B(– 2 ; 4).
Démontrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en A.

69 Soit A(– 1 ; – 3), B(2 ; 6), C(– 3 ; 1) et D(x ; – 1).
Déterminer le réel x tel que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

70 ALGO **Écrire un programme**
Écrire un algorithme qui permet de vérifier si un triangle ABC dont on connaît les coordonnées des sommets est rectangle en A ou non.

71 Soit ABCD un losange de centre O tel que AC = 6 et BD = 4.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. Quelle relation permet d'écrire $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$?

3. En utilisant l'égalité précédente, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Avec le projeté orthogonal

Vrai ou faux

72 ABC est un triangle rectangle en B avec BC = 4 et AC = 5 et H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.

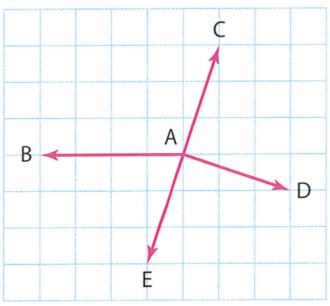
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$ **2.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 16$

3. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CH$ **4.** $CH = 3{,}2$

QCM

73 Indiquer dans chaque cas la ou les bonnes réponses.

L'unité de longueur est le côté d'un carreau.



1. a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = -12$

b. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AE} = 4$

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 4$

2. a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 12$

b. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$ **c.** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA} = -12$

3. a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ **b.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4$ **c.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4$

→ Voir Exercice résolu 5 p. 199

74 Soit ABC un triangle isocèle en A tel que AB = 6 et BC = 4. On note H le projeté orthogonal de A sur [BC].

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

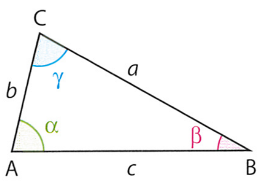
2. En utilisant une autre expression du produit scalaire, déterminer une valeur arrondie à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{ABC}$.

3. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Formule d'Al-Kashi

75 Dans cet exercice, on démontre la formule d'Al-Kashi.

On considère un triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et d'angles $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$ et $\widehat{C} = \gamma$.



1. Justifier que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

2. En remarquant que $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$, démontrer, en utilisant les notations précédentes, que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

76 Un triangle ABC est tel que AB = 5, BC = 8 et AC = 10.

1. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. On note H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). En considérant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculer la longueur AH. En déduire la longuer CH.

→ Voir Exercice résolu 6 p. 199

77 Un triangle ABC est tel que AB = 6, BC = 5 et AC = 7.

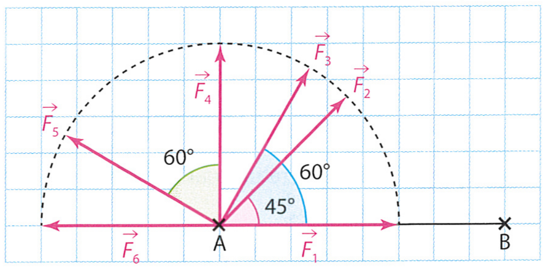
1. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. On note K le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC). En considérant le produit scalaire $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, calculer la longueur CK. En déduire la longuer BK.

78 **À chacun sa série** STI2D

Une force $\vec{F}$ s'exerce sur un wagon, son point d'application se déplaçant dans un mouvement rectiligne de A vers B.

1. Pour chacune des forces $\vec{F_1}$ à $\vec{F_6}$ représentées ci-dessous, dire si elle favorise, s'oppose ou n'a pas d'effet sur le mouvement du wagon.



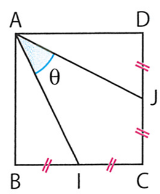
2. En Physique, le travail $W_{AB}(\vec{F})$ d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement rectiligne de A vers B est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{F} = AB \cdot F \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \vec{F})$, avec AB en mètre (m), F en Newton (N) et W en Joule (J).

Sur le graphique, un carreau représente une distance de 1 m et une force de 1 N.

Calculer le travail de chacune des 6 forces représentées. Que remarque-t-on ?

79 **À chacun sa série** STL

Soit ABCD un carré de côté a, I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD]. On cherche une mesure θ de l'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$.



1. a. Justifier que : $AI = AJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

b. En déduire une expression de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de a et $\cos\theta$.

2. Utiliser les égalités $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$ pour démontrer que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = a^2$.

3. Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\cos\theta$ et une valeur approchée (au degré près) de θ.

Exercices

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10333-219

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.

	V	F
80 Soit A(-5 ; 2), B(1 ; 3) et C(-2 ; 7). On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=23$ et $AB=37$.		
81 Un triangle ABC est tel que $AB=7$, $AC=14$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=49$. Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{3}$.		
82 Soit A(3 ; -2), B(5 ; 2), C(0 ; 5) et D(6 ; 8). Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.		
83 Soit $\vec{u}(x\,;1)$ et $\vec{v}(x\,;-3)$. Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$, alors $x=2$.		
84 Soit ABC un triangle rectangle en B. Si $BC=2$, $AC=4$ et $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=4$, alors $\widehat{BAC}=30°$.		
85 Soit A, B et C trois points non alignés du plan. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$.		
86 Soit ABCD un parallélogramme. **1.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. **2.** $AC^2=AB^2+AD^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. **3.** Sachant que $AB=4$, $AD=3$ et $\widehat{BAD}=60°$, on a $AC=37$.		
87 On considère un triangle ABC tel que $AB=5$, $BC=7$ et $AC=6$. On a : $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{5}$.		

→ Vérifier les résultats p. 294

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

88 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=2$.
a. $\vec{u}\cdot(-3\vec{v})=-3$ **b.** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{v})=12$ **c.** $(\vec{u}-\vec{v})^2=5$

89 Soit A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$, $AB=3$ et $\widehat{BAC}=120°$.
a. $AC=9$ **b.** $AC=0{,}25$ **c.** $AC=4$

90 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=0$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$.
a. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\pi$ **b.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=1{,}5$ **c.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

91 Soit A, B et C trois points tels que $AB=0{,}5$, $AC=2$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Une mesure de $\widehat{BAC}$ est :
a. $\frac{\pi}{6}$ **b.** $-\frac{\pi}{6}$ **c.** $\frac{5\pi}{6}$

92 ABC est un triangle équilatéral et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times HA$ **c.** $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=0$

93 On considère un triangle ABC tel que $AC=3$, $BC=5$ et $\widehat{ACB}=\frac{2\pi}{3}$
a. $AB=19$ **b.** $AB=\sqrt{19}$ **c.** $AB=7$

→ Vérifier les résultats p. 294

94 In English

Let ABCD be a rectangle of center O such that $AB = 4$ and $BC = 3$.

1. Using the Chasles relation, calculate $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. Justify that $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

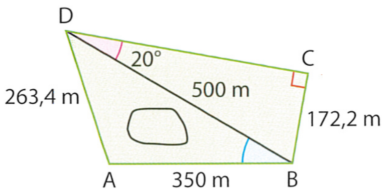
3. Determine the OC and OD lengths.

4. Using another expression of the dot product, give a value rounded to the nearest degree of the angle $\widehat{DOC}$.

95 COMPÉTENCE Calculer

Un géomètre doit déterminer l'aire d'un terrain au centre duquel se trouve une mare.

Le schéma suivant représente le terrain ainsi que les mesures qu'il a prises.



1. Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ABD}$. On donnera la valeur arrondie au degré près.

2. En déduire la longueur AC arrondie au mètre près.

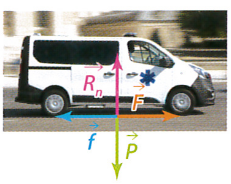
3. L'aire du triangle ABD est donnée par la formule $S = \frac{1}{2} AB \times DB \times \sin \widehat{ABD}$.

Calculer l'aire du terrain. On donnera la valeur arrondie au m^2 près.

96 COMPÉTENCE Communiquer

Une ambulance roule à vitesse constante sur une route rectiligne et horizontale.

Un schéma simplifié des forces s'exerçant sur l'ambulance est donné ci-dessous :



$\vec{F}$: force de traction de la voiture d'intensité 500 N

$\vec{f}$: résultante des forces de frottement

$\vec{P}$: poids de la voiture

$\vec{R}_n$: résistance normale de la route

1. Quelles sont les forces dont le travail est nul lors de ce déplacement ? Expliquer pourquoi.

2. Le déplacement s'effectue sur une distance de 2 km.

Calculer le travail de la force $\vec{F}$ sur la distance AB.

Ce travail est-il moteur ou résistant ? Justifier.

3. Donner, sans calcul, la valeur du travail de la résultante des forces de frottement. Justifier.

97 COMPÉTENCE Calculer

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O et de côté 2.

1. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, calculer $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2. En utilisant les égalités $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE}$, calculer $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CE}$.

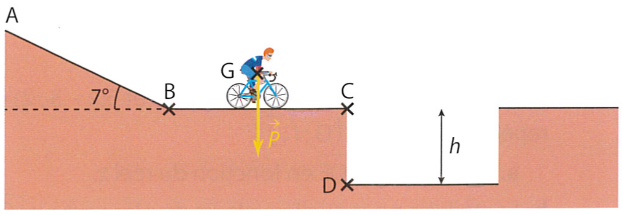
98 COMPÉTENCE Calculer

Lucas, cycliste casse-cou, entame une descente de 40 m sur une route désaffectée toujours mouillée, faisant un angle de 7° avec l'horizontale.

À la fin de la descente, la route est horizontale, mais il y a un affaissement de chaussée.

À la vue de cet affaissement, Lucas freine au maximum pour s'arrêter de sorte qu'il parcourt toute la partie horizontale en dérapant.

Le poids $\vec{P}$ auquel est soumis le système « Lucas-vélo » est représenté en G.



1. Calculer le poids arrondi à l'unité et la masse du système « Lucas-vélo » sachant que le travail effectué par ce poids pendant la descente est égal 3 822 J.

3. Quel est le travail du poids sur la partie horizontale ?

2. N'ayant pu s'arrêter, Lucas tombe en chute libre de hauteur $h = 1{,}5$ m. La seule force exercée alors est le poids.

a. Quel est le travail du poids lors de cette chute ?

b. Au point C, début de la chute, la vitesse de Lucas est de 2 m.s^{-1}. Calculer son énergie cinétique $E_c(C)$.

c. Calculer alors l'énergie cinétique au point d'impact $E_c(D)$.

d. En déduire la vitesse d'atterrissage de Lucas au fond du trou. (Arrondir à 0,1 m.s^{-1}près)

Coup de pouce

Rappels de sciences physiques

- $P = mg$ avec $g = 9{,}8$ N.kg^{-1}
- Le travail d'une force $\vec{F}$ sur un trajet de A vers B est :
$$W_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$
- L'énergie cinétique d'un point de masse m (kg) se déplaçant à la vitesse v (m.s^{-1}) est : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.
- Théorème de l'énergie cinétique : la variation de l'énergie cinétique E_c entre C et D est égale à la somme des travaux qui s'exercent sur le système entre ces deux points. Ici : $E_c(D) - E_c(C) = W_{\overrightarrow{CD}}(\vec{P})$.

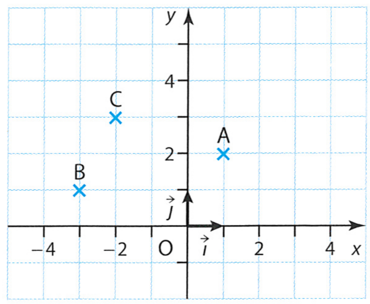
TP

Utiliser plusieurs expressions du produit scalaire

CAPACITÉ Utiliser différentes formes du produit scalaire pour calculer un angle et réinvestir ses connaissances sur les fonctions.

PARTIE 1 Un premier exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points $A(1\,;2)$, $B(-3\,;1)$ et $C(-2\,;3)$.



1. Calculer le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ après avoir déterminé leurs coordonnées.

2. Calculer les longueurs AB et AC.

3. En utilisant une autre expression du produit scalaire, déterminer une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

4. Expliquer pourquoi le signe de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ permet de dire que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

PARTIE 2 Application

Soit x un réel et les points $D(-x\,;x-2)$ et $E(x-3\,;2)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1. a. Exprimer $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}$ en fonction du réel x.

b. En déduire pour quelles valeurs de x les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont orthogonaux.

2. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

b. En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}$ est maximal.

c. Calculer alors une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{DOE}$.

d. Étudier le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x.

e. En déduire pour quelles valeurs de x l'angle $\widehat{DOE}$ est aigu.

GeoGebra — *En salle informatique* lienmini.fr/10333-220

On reprend la situation de la **Partie 2** ci-dessus.

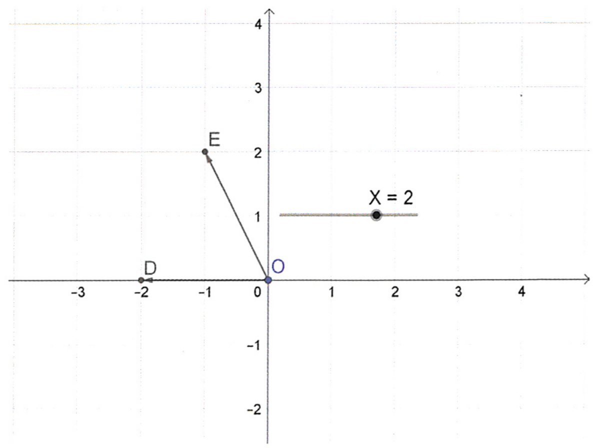
1. a. Dans un fichier GeoGebra, créer un curseur X et placer les points O, D et E.

b. Créer les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$.

c. Faire varier X et retrouver (approximativement) les valeurs de x pour lesquelles $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont orthogonaux.

d. Faire varier X et retrouver (approximativement) les valeurs de x pour lesquelles l'angle $\widehat{DOE}$ est aigu.

2. Créer dans la barre de saisie le nombre $f(x)$. Faire varier X et retrouver (approximativement) la valeur de x pour laquelle $f(x)$ est maximale.



99 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère les points I(1 ; 0) et J(0 ; 1).

1. Placer sur le cercle trigonométrique de centre O les points A et B tels que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$.

2. Quelles sont les coordonnées des points A et B ?

3. Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

4. On admet que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$.

Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, puis, en utilisant une autre expression du produit scalaire, déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$. Vérifier à l'aide de la calculatrice.

100 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Soient A(− 1 ; 3) et B(2 ; 5), $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et M(x ; y) un point de $\mathscr{C}$.

1. Si M est un distinct de A et de B, que peut-on dire de $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$? Justifier.

2. Même question si M est confondu avec A ou avec B.

3. En déduire que les coordonnées de M vérifient l'équation $x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$.

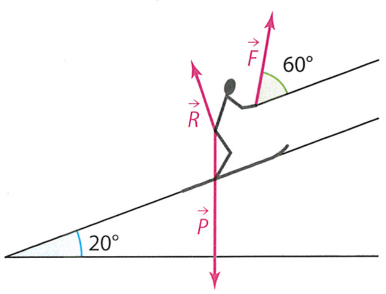
Remarque : cette équation est appelée équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$.

4. Déterminer les coordonnées du milieu I de [AB] et calculer la longueur AB. En déduire le rayon R du cercle $\mathscr{C}$.

5. Vérifier que l'équation obtenue au **3.** s'écrit aussi $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-4)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$.

101 Un skieur de masse $m = 80$ kg est tracté, à vitesse constante v, sur une piste faisant un angle de 20° avec l'horizontale.

Le skieur est soumis à trois forces : son poids $\vec{P}$, la force $\vec{F}$ exercée par la perche et la réaction $\vec{R}$ du sol, de direction perpendiculaire au sol. Il parcourt une distance de 250 m.



1. Quel est le travail de la force $\vec{R}$? Justifier.

2. Calculer le travail du poids $\vec{P}$. Arrondir à l'unité.

3. Exprimer en fonction de F le travail de la force $\vec{F}$.

4. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer F. Arrondir à l'unité.

102 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. Soient x un réel et $A(x\,;-2)$ et $B\left(x+4\,;x+\frac{3}{2}\right)$ deux points du plan.

1. Exprimer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ en fonction de x.

2. Déterminer pour quelles valeurs de x le triangle OAB est rectangle en O.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est minimal.

c. Déterminer alors une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BOA}$.

103 Lors d'un freinage face à un obstacle, le temps d'arrêt d'une voiture est la somme du temps de réaction du conducteur et du temps de freinage. Un conducteur d'une voiture qui roule à une vitesse initiale de 90 km.h^{-1} sur une route horizontale, freine à la vue d'un obstacle. Le schéma ci-dessous représente les différentes forces qui s'appliquent à la voiture (les frottements de l'air sont négligés).

$\vec{P}$: poids de la voiture avec conducteur
$P = \text{mg}$ avec $g = 9{,}8$ N.kg^{-1}

$\vec{F}$: résultante des forces de frottement

$\vec{R_n}$: résistance normale de la route (opposée au poids)

1. Quel est le travail du poids $\vec{P}$ et de la résistance normale de la route $\vec{R_n}$? Justifier.

2. Le coefficient d'adhérence des pneus est donné par la formule $f = \frac{F}{R_n}$. Exprimer F en fonction de f, m et g.

3. On note D_F la distance de freinage. Exprimer le travail de la force F en fonction de f, m, g et D_F.

a. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, démontrer que $D_F = \frac{625}{2fg}$.

b. Le coefficient d'adhérence des pneus est égal à 0,8 sur route sèche et 0,4 sur route mouillée.

Calculer alors la distance de freinage arrondie à l'unité sur route sèche puis sur route mouillée.

4. Sachant que le temps de réaction du conducteur est d'une seconde environ, calculer la distance d'arrêt du véhicule sur route sèche puis sur route mouillée.