9 Le produit scalaire

CAPACITÉS

- Calculer la projection d'un vecteur sur un axe.
- Interpréter $\|\vec{u}\| \cos(\theta)$ en termes de projection.
- Utiliser un produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs, pour calculer un angle non orienté.
- Utiliser un produit scalaire pour calculer des longueurs.

La Physique d'un avion en vol peut se résumer par l'équilibre de quatre forces opposables deux à deux : la portance et le poids, la traction et la traînée. L'énergie fournie par chacune de ces quatre forces se calcule avec un outil mathématique qui est le produit scalaire.

Le poids d'un avion l'empêche-t-il toujours d'avancer ?

Vidéo
Découvrons les forces qui s'exercent sur un avion.
lienmini.fr/10333-216

→ Pour le découvrir **Activité 1** p. 191

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash

Diaporama

14 diapositives pour retrouver ses automatismes

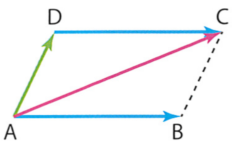
lienmini.fr/10333-217

1 Calcul vectoriel

- Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

- Dans un parallélogramme : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$



2 Calcul avec les coordonnées

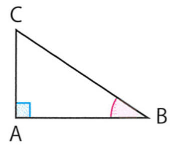
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(x_A\,;y_A)$, $B\,(x_B\,;y_B)$ et K le milieu du segment [AB]. On a :

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)$ $\quad K\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ $\quad AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3 Trigonométrie

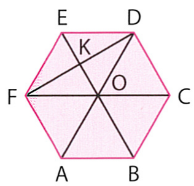
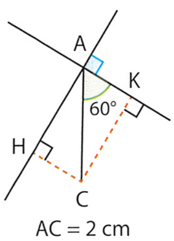
Dans un triangle ABC rectangle en A, on a :

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}$, $\sin\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}$ et $\tan\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{AB}$



Vérifier les acquis de Seconde

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. Sur cette figure, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$: 	ont la même direction.	sont colinéaires de même sens.	sont parallèles.	sont égaux.	1
2. Sur cette figure, on a :	$\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{DE}$	$\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{FK}$	$\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DF}$	$\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{CA}$	1
3. Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points A(−5 ; 2), B(3 ; 1), C(1 ; 4), D(−7 ; 5) et K le milieu du segment [AB]. Les coordonnées de :	$\overrightarrow{AB}$ sont (−2 ; −1)	K sont $\left(4\,;-\dfrac{1}{2}\right)$	K sont $\left(-1\,;\dfrac{3}{2}\right)$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ sont (10 ; 2)	2
4. En reprenant les données du **3.**, on a :	$AB=\sqrt{5}$	$BC=\sqrt{2}$	$AC=2\sqrt{10}$	$AK=\sqrt{10}$	2
5. Sur cette figure, on a : 	$AK=\dfrac{AC}{\cos 60°}$	$AK=AC\times\sin 60°$	$AK\approx 1{,}73$ cm	$AK=1$ cm	3
6. Sur cette figure, on a :	$AC=\dfrac{AH}{\cos 60°}$	$AH\approx 0{,}61$ cm	$AH=AC\times\sin 30°$	$AH\approx 1{,}73$ cm	3

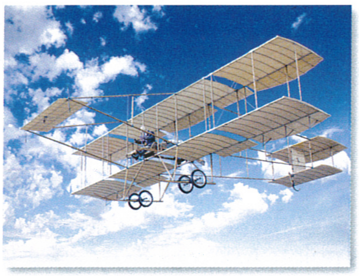
→ Voir Corrigé p. 294

Activités

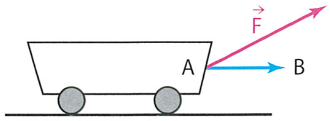
1 Coupez ! Moteur !

PHYSIQUE

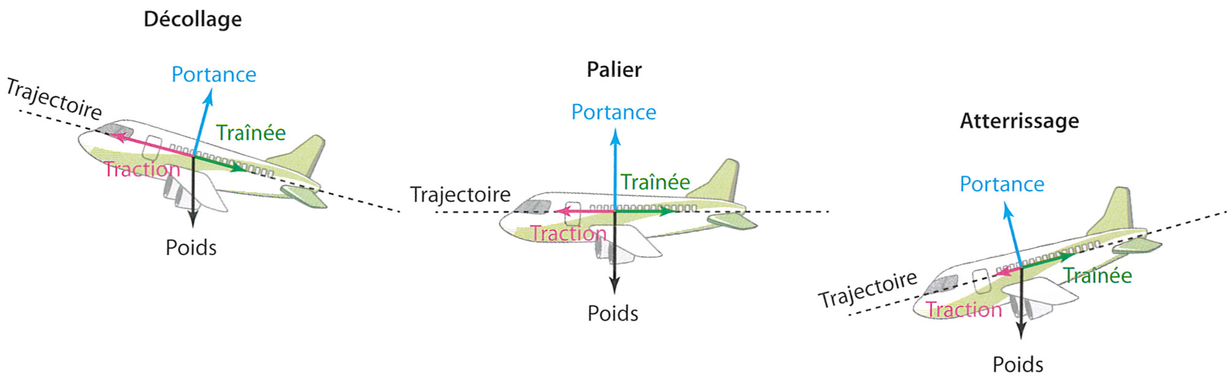
OBJECTIF Considérer le travail d'une force lors d'un mouvement rectiligne



Le **travail**, exprimé en joules (J), **d'une force constante** $\vec{F}$ agissant sur un objet en déplacement entre A et B est l'énergie fournie par cette force. Ce travail est dit **moteur** lorsque la force favorise le déplacement, **résistant** lorsque la force s'oppose au déplacement et **nul** lorsque la force n'a pas d'effet sur le déplacement.



Lorsqu'un avion vole, quatre forces principales s'exercent sur son centre : la portance, le poids, la traction (ou poussée) et la traînée.
Pour chacune des trois phases de vol, décollage, palier et atterrissage, indiquer si le travail du poids est moteur, nul ou résistant.



2 Conjecture avec GeoGebra

→ Mémento GEOGEBRA p. 275

OBJECTIF Conjecturer plusieurs formules du produit scalaire → Cours 1D, 2A et 3 p. 194, 196, 198

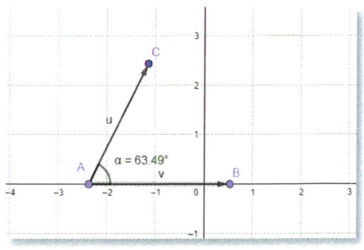
Dans un fichier GeoGebra, placer des points A et B sur l'axe des abscisses, puis créer un point libre C. Créer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Créer dans la barre de saisie le nombre $\boxed{\text{W = u*v}}$ (qui calcule le produit scalaire des vecteurs).

1. Déplacer le point C. Quel est le signe de W lorsque le travail est moteur ? résistant ?

2. Une première expression de W

a. Faire afficher l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ en radians et créer dans la barre de saisie le nombre $\boxed{\text{w1 = AB*AC*cos(}\alpha\text{)}}$.

b. Déplacer à nouveau le point C. Comparer les valeurs affichées pour W et w1. Conjecturer alors une formule pour le calcul de W.



3. Autres expressions de W

a. Créer dans la barre de saisie le nombre $\boxed{\text{w2 = x(u)*x(v)+y(u)*y(v)}}$, comparer à W et conjecturer une deuxième formule du produit scalaire.

b. Construire la perpendiculaire à (AB) passant par C, puis H, le point d'intersection de cette droite avec la droite (AB). Entrer alors dans la barre de saisie le nombre $\boxed{\text{w3 = AB*AH}}$ et conjecturer une troisième formule de W (on distinguera plusieurs cas).

Remarque : H est appelé le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

3 Travail de la résultante de deux forces

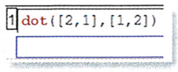
PHYSIQUE

OBJECTIF Relier le travail de la résultante de deux forces et le produit scalaire → Cours 1B p. 194

Un objet soumis (en l'un de ses points) à deux forces constantes $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ se déplace de A vers B.
Dans le plan muni un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les coordonnées respectives des points A et B et des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont $(3\,;1)$, $(5\,;2)$, $(1\,;2)$, $(-3\,;4)$.

1. Faire une figure, puis calculer les coordonnées de $\vec{F_1}+\vec{F_2}$ ainsi que celles des vecteurs $-2\vec{F_1}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2. Dans le logiciel Xcas, l'instruction dot([2,1],[1,2]) permet de calculer le produit scalaire des deux vecteurs de coordonnées respectives $(2\,;1)$ et $(1\,;2)$:



À l'aide de Xcas, comparer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F_1}$ et $\vec{F_1}\cdot\overrightarrow{AB}$.

On interprète ce résultat comme le travail exercé par la force $\vec{F_1}$ dont le point d'application se déplace de A à B suivant une ligne droite (mouvement rectiligne).

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F_2}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{F_1}+\vec{F_2}\right)$.

On interprétera ce résultat en termes de travail d'une force.

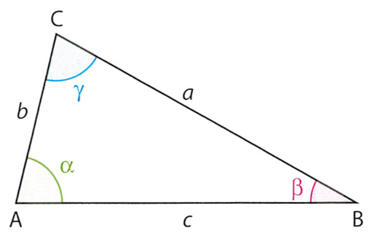
c. $\overrightarrow{AB}\cdot\left(-2\vec{F_1}\right)$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{F_1}$.

4 Conjecture de la formule d'Al-Kashi

GEOGEBRA

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

OBJECTIF Déterminer une relation entre les côtés et les angles dans un triangle → Cours 4 p. 198



On considère un triangle ABC de côtés $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$ et d'angles $\widehat{A}=\alpha$, $\widehat{B}=\beta$ et $\widehat{C}=\gamma$.

1. Une relation particulière connue

Quelle relation y a-t-il entre a, b et c lorsque ABC est rectangle en A ?

2. Conjecture à l'aide d'un logiciel

a. Sur GeoGebra, faire une figure correspondant à la situation.
Aide : créer les points A, B et C puis le triangle ABC et enfin les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

b. Créer dans la barre de saisie le nombre $\boxed{d = a^2 - b^2 - c^2 + 2{*}b{*}c{*}\cos\alpha}$.
Déplacer les points A, B ou C.
Que remarque-t-on pour d ?

c. Conjecturer alors l'expression de a^2 en fonction de b, c et $\cos\alpha$.

d. Quel résultat retrouve-t-on avec cette expression lorsque le triangle ABC est rectangle en A ?

Remarque : ce théorème généralise ainsi le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles.
Ce résultat est déjà connu du célèbre mathématicien grec Euclide dès le IIIe siècle av. J.-C. mais uniquement sous forme géométrique (sans la notion de fonction cosinus). Mais on lui associe en France uniquement le nom du mathématicien perse Al-Kashi (XIVe siècle) dès les années 1990 alors que les appellations *théorème de Pythagore généralisé* ou *loi des cosinus* étaient utilisées jusque-là. C'est ainsi d'ailleurs que l'on nomme cette propriété dans tout le reste du monde !

Cours

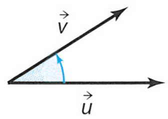
1 Définition du produit scalaire

A Norme d'un vecteur

Définition Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$, et on note $\|\vec{u}\|$, la longueur du segment [AB] : $\|\vec{u}\| = AB$.

B Produit scalaire de deux vecteurs

Définition Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$, le nombre réel défini par :
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ est nul ou si $\vec{v}$ est nul.



Exemple • Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v}) = 2\times3\times\cos\frac{\pi}{4} = 6\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

→ Voir Exercice résolu 1

Propriété Pour tout vecteur $\vec{u}$: $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Vocabulaire

Le réel positif $\vec{u}^2$ est appelé **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$.

Propriétés (admises) Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et pour tout réel k, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

C Vecteurs orthogonaux

Définition Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont dits **orthogonaux** si l'un d'eux est nul ou si leurs directions sont **perpendiculaires**.

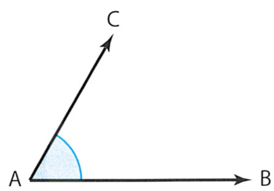
Propriété **(admise)** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **orthogonaux** si et seulement si leur **produit scalaire** est **nul**.

→ Voir Exercice résolu 2

D Produit scalaire et angle trigonométrique

Définition Soit A, B et C trois points distincts deux à deux du plan.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$



Exemple • Soit ABC un triangle tel que AB = 4 cm , AC = 3 cm et $\widehat{BAC} = 60°$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(60°) = 4\times3\times\frac{1}{2} = 6$.

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Utiliser la définition du produit scalaire avec les normes et un angle

Dans chacun des cas suivants, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sachant que $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=3$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$.

2. Calculer $\|\vec{u}\|$ sachant que $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$, $\|\vec{v}\|=4$ et $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{4}$.

3. Déterminer une valeur de $(\vec{u},\vec{v})$ sachant que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$, $\|\vec{u}\|=0{,}5$ et $\|\vec{v}\|=6$.

Méthode — Pour utiliser la définition du produit scalaire avec les normes et un angle

1. Pour calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$, on **applique** les formules du cours.
2. Pour déterminer $(\vec{u},\vec{v})$, on **s'aide de la formule** $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$, on calcule $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$.

On en **déduit** une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ à l'aide de la calculatrice.

Solution

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=5\times3\times\cos\frac{5\pi}{6}=15\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{15\sqrt{3}}{2}$.

2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ donne : $2=4\|\vec{u}\|\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, soit : $\|\vec{u}\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$ donne : $-3=0{,}5\times6\times\cos(\vec{u},\vec{v})$, soit : $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{-3}{0{,}5\times6}=-1$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ rad ou 180°.

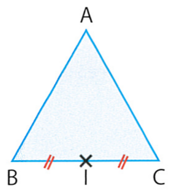
→ Voir Exercices 23 à 29 p. 202

Exercice résolu 2 — Calculer le produit scalaire avec les normes et un angle

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6 et I est le milieu du segment [BC].

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ **2.** $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$ **3.** $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BC}$ **4.** $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IA}$



Méthode — Pour calculer le produit scalaire avec les normes et un angle

1. On **détermine** la norme de chacun des vecteurs.
2. On **détermine** une mesure de l'angle formé par ces deux vecteurs.
3. On **applique** la définition.

Solution

1. Les vecteurs ont la même origine : on peut utiliser la formule $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=BC\times BA\times\cos\widehat{CBA}$.

Le triangle ABC est équilatéral, donc $\widehat{CBA}=\frac{\pi}{3}$ rad (ou 60°). On en déduit que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=6\times6\times\cos\frac{\pi}{3}=36\times\frac{1}{2}=18$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont opposés donc $\widehat{BIC}=\pi$ et $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}=3\times3\times\cos\pi=-9$.

3. Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'ont pas la même origine : on remarque que $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$,
donc $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CI}\cdot(-\overrightarrow{CB})=-\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CB}=-CI\times CB\times\cos\widehat{ICB}$.
$\widehat{ICB}=0$. On a donc $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{BC}=-3\times6\times\cos0=-3\times6\times1=-18$.

Remarque : on utilise ici la propriété $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$ (voir cours **1B**).

4. Le triangle ABC est équilatéral donc la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (IC) : les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont orthogonaux. On en déduit que $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IA}=0$ (voir cours **1C**).

→ Voir Exercices 31 à 35 p. 202

2 Expression analytique du produit scalaire

Dans toute cette partie, $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan ; cela signifie que les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et ont une norme égale à 1.

A Théorème et démonstration

THÉORÈME Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ est :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

DÉMONSTRATION • Soit, dans un repère orthonormé du plan $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$.
On utilise les propriétés vues en **1B**. On obtient :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(x\vec{i}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right)+\left(x\vec{i}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right)+\left(y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}\right)+\left(y\vec{j}\right)\cdot\left(y'\vec{j}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\vec{i}\cdot\vec{i} + xy'\vec{i}\cdot\vec{j} + yx'\vec{j}\cdot\vec{i} + yy'\vec{j}\cdot\vec{j}.$$

Or $\vec{i}\cdot\vec{i} = \left\|\vec{i}\right\|^2 = 1^2 = 1$ et $\vec{j}\cdot\vec{j} = \left\|\vec{j}\right\|^2 = 1^2 = 1$. De plus, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux donc $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$. On en déduit que $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Vocabulaire

Cette expression est appelée **l'expression analytique du produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Attention : cette expression ne s'applique que dans un repère orthonormé du plan.

EXEMPLE • Soit $\vec{u}(-2\,;3)$ et $\vec{v}(1;5)$.
On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times1+3\times5 = 13$.

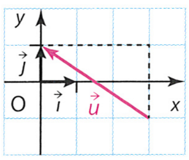
REMARQUE • En appliquant l'expression analytique du produit scalaire, on obtient les deux propriétés ci-dessous.

→ Voir Exercice résolu 3

B Norme d'un vecteur

PROPRIÉTÉ Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$, alors $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

EXEMPLE • Soit le vecteur $\vec{u}(-3\,;2)$.
On a $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

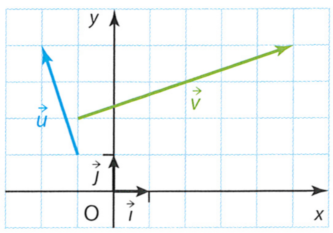


C Vecteurs orthogonaux

PROPRIÉTÉ Les vecteurs $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy' = 0$.

EXEMPLE • Les vecteurs $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(6\,;2)$ sont orthogonaux car
$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1\times6+3\times2 = 0$.

→ Voir Exercice résolu 4



Exercice résolu 3 Calculer le produit scalaire avec les coordonnées

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs $\vec{u}\left(-5\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}(1;-4)$ ainsi que les points $A(-1;7)$, $B(2;5)$, $C(8;3)$.

Calculer :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Méthode **Pour calculer le produit scalaire avec les coordonnées**

1 On **identifie** les coordonnées x, y et x', y' de chacun des vecteurs.

2 On **applique** la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

3 On **calcule** et on **simplifie** éventuellement au maximum.

Solution

1. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $x=-5$ et $y=\frac{1}{2}$ et les coordonnées de $\vec{v}$ sont $x'=1$ et $y'=-4$.

On applique la formule :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' = -5\times 1 + \frac{1}{2}\times(-4) = -5-2 = -7.$

2. On commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (rappel : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$(2-(-1)\,;5-7)$, soit $(3\,;-2)$.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont :

$(8-(-1)\,;3-7)$, soit $(9\,;-4)$.

On procède alors comme dans la question précédente :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 9 + (-2)\times(-4) = 27+8 = 35.$

→ Voir Exercices 36 à 40 p. 202

Exercice résolu 4 Étudier analytiquement l'orthogonalité de deux vecteurs

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Les vecteurs $\vec{u}(-2\,;3)$ et $\vec{v}(1;-4)$ sont-ils orthogonaux ?

2. Déterminer le réel x tel que les vecteurs $\vec{u}(x\,;2)$ et $\vec{v}(3;-1)$ soient orthogonaux.

Méthode **Pour étudier analytiquement l'orthogonalité de deux vecteurs**

1 On **calcule** le produit scalaire en utilisant la formule $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

2 On **utilise** la propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Solution

1. On calcule le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times 1 + 3\times(-4) = -2-12 = -14.$

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

2. On exprime le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de x :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = x\times 3 + 2\times(-1) = 3x-2.$

On résout l'équation $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, qui équivaut à $3x-2=0$, soit $3x=2$, d'où : $x=\frac{2}{3}$.

→ Voir Exercices 42 à 47 p. 203

3 Produit scalaire et projeté orthogonal

THÉORÈME Soit A, B et C trois points non alignés du plan, et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires **de même sens**, alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH.$$

- Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires **de sens opposés**, alors :

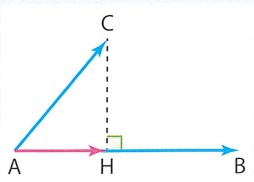
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH.$$

Vocabulaire

On dit que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est le **projeté orthogonal** du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

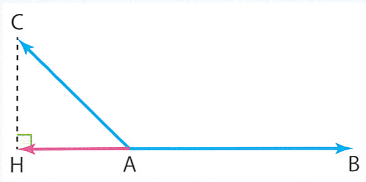
DÉMONSTRATION • En utilisant la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$. D'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$.
Or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

1er cas : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens.



$\widehat{BAH} = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

2^{e} cas : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de sens opposés.



$\widehat{BAH} = \pi$ rad ou 180° et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

REMARQUE • Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, alors les points A et H sont confondus et $AH = 0$. On retrouve alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

PROPRIÉTÉ On a $AH = AC \times \cos \widehat{HAC}$, ce qui s'écrit aussi :

$$\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AC}\right).$$

→ Voir Exercice résolu 5

4 Théorème d'Al-Kashi

On considère un triangle ABC de côtés $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et d'angles $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$ et $\widehat{C} = \gamma$.

THÉORÈME On a la formule : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ En permutant a, b, et c, on a : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

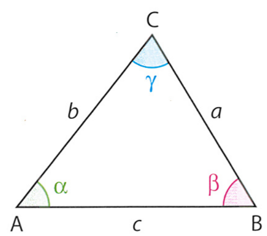
Cette formule est démontrée dans l'exercice **75**. Elle s'écrit aussi $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \times \cos\widehat{BAC}$.

REMARQUE • Si le triangle ABC est rectangle en A, on a $\cos\widehat{A} = 0$ soit $a^2 = b^2 + c^2$.
On retrouve le théorème de Pythagore.

→ Voir Exercice résolu 6

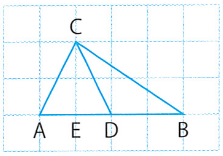
Vocabulaire

Cette formule est appelée **théorème d'Al-Kashi**, du nom d'un mathématicien perse du XV^{e} siècle.
On l'appelle aussi le « théorème de Pythagore généralisé ».



Exercice résolu 5 — Calculer le produit scalaire avec le projeté orthogonal

On considère la figure ci-dessous, l'unité de longueur étant le côté d'un carreau.



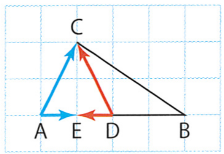
Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. **2.** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Méthode — Pour calculer le produit scalaire avec le projeté orthogonal

1. On **s'assure** que les deux vecteurs aient la même origine.
2. On **utilise** le projeté orthogonal de l'extrémité de l'un des vecteurs sur la droite passant par les extrémités de l'autre vecteur.
3. On **obtient** deux vecteurs colinéaires. On **compare** le sens.
4. On **utilise** alors le théorème.

Solution



1. E est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires **de même sens** donc :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AE = 4 \times 1 = 4$.

2. Les vecteurs n'ont pas la même origine. On remarque que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.
Donc : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
E est le projeté orthogonal du point C sur la droite (DB) et les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires **de sens opposés** donc :
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -DB \times DE = -2$.

→ Voir Exercices 50 à 53 p. 203

Exercice résolu 6 — Calculer une longueur et un angle avec la formule d'Al-Kashi

ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = 60°$.

1. Calculer la longueur BC.

2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Méthode — Pour calculer une longueur et un angle avec la formule d'Al Kashi

1. **Faire** une représentation graphique pour visualiser les longueurs et angles.
2. **Écrire** la formule correspondant aux données et à l'inconnue.
3. **Appliquer** cette formule.

Solution

1. Les données et l'inconnue BC conduisent à utiliser la formule $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \cos \widehat{BAC}$.
On a donc $BC^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos 60° = 64 + 9 - 24 = 49$ et donc $BC = 7$.

2. L'inconnue $\widehat{ACB}$ conduit à utiliser la formule $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \times BC \times AC \times \cos \widehat{ACB}$.
On a alors $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \times BC \times AC} = \dfrac{7^2 + 8^2 - 3^2}{2 \times 7 \times 8} = \dfrac{104}{112} = \dfrac{13}{14}$.
À la calculatrice, on trouve $\widehat{ACB} \simeq 21{,}79°$.

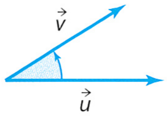
→ Voir Exercices 54 à 56 p. 203

L'essentiel

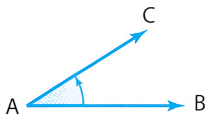
1 Différentes expressions du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

• **Avec les normes et les angles**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$



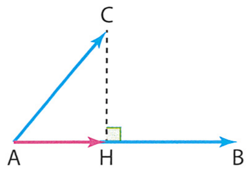
• **Avec les coordonnées**

Soit, dans un repère orthonormé du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$. On a : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

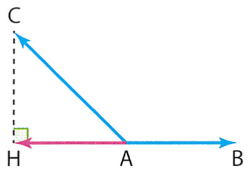
• **Avec le projeté orthogonal**

Soit A, B et C trois points non alignés du plan, et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires **de même sens,**
alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$.



Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires **de sens opposés,**
alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$.



On a : $AH=AC\times\cos\widehat{HAC}$, ce qui s'écrit aussi $\|\overrightarrow{AH}\|=\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC})$.

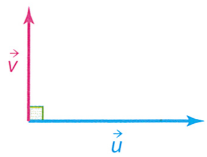
2 Propriétés du produit scalaire

• Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{0}=\vec{0}\cdot\vec{u}=0$

• Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ et pour tout réel k, on a :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ $\quad$ $\vec{u}\cdot(k\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$

• **Vecteurs orthogonaux :** $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$



3 Formule d'Al-Kashi

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$ $\quad$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\widehat{B}$ $\quad$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\widehat{C}$