Exercices

Pour acquérir les automatismes

1 Questions Flash

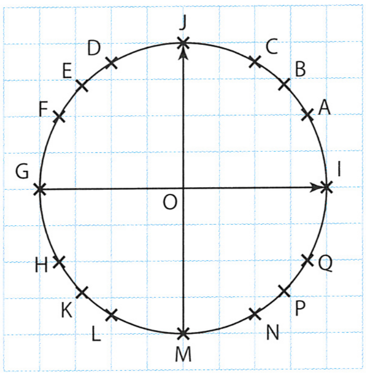
Diaporama

10 diapositives pour maîtriser ses automatismes

lienmini.fr/10333-223

Associer un point du cercle à un nombre réel

Dans les exercices 2 à 4, déterminer le point du cercle associé à chacun des nombres réels x donnés.



2 **a.** $x=\frac{\pi}{3}$
b. $x=-\frac{3\pi}{4}$
c. $x=\frac{5\pi}{6}$
d. $x=\frac{\pi}{2}$

3 **a.** $x=-\frac{\pi}{4}$ **b.** $x=-\frac{5\pi}{6}$ **c.** $x=\frac{2\pi}{3}$ **d.** $x=\pi$

4 **a.** $x=0$ **b.** $x=-\frac{2\pi}{3}$ **c.** $x=\frac{3\pi}{4}$ **d.** $x=-\frac{\pi}{2}$

Calculs sur les fractions

5 Calculer et simplifier lorsque c'est possible.

a. $\frac{13\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}$ **b.** $\frac{23\pi}{4}-\frac{7\pi}{4}$ **c.** $\frac{5\pi}{3}+\frac{23\pi}{3}$

6 Calculer et simplifier lorsque c'est possible.

a. $-\frac{9\pi}{2}+\frac{2\pi}{7}$ **b.** $-\frac{14\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}$ **c.** $\frac{31\pi}{5}+\frac{8\pi}{3}$

Dans les exercices 7 et 8, dire si le nombre réel donné peut s'écrire sous la forme $k2\pi$ où k est un nombre entier relatif.

7 **a.** 8π **b.** -5π **c.** $\frac{8\pi}{2}$ **d.** $-\frac{13\pi}{2}$ **e.** $-\frac{18\pi}{6}$

8 **a.** $\frac{24\pi}{4}$ **b.** $-\frac{20\pi}{6}$ **c.** 2019π **d.** $\frac{27\pi}{3}$ **e.** $-\frac{46\pi}{4}$

Dans les exercices 9 à 11, écrire sous la forme $\frac{a\pi}{b}$ (où a et b sont des nombres entiers non nuls) les calculs donnés :

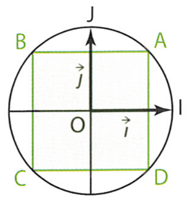
9 **a.** $\pi+\frac{13\pi}{2}$ **b.** $\pi-\frac{37\pi}{3}$ **c.** $\pi+\frac{63\pi}{4}$ **d.** $\pi-\frac{17\pi}{6}$

10 **a.** $-\pi+\frac{23\pi}{6}$ **b.** $-\pi-\frac{17\pi}{4}$ **c.** $-\pi+\frac{35\pi}{3}$ **d.** $-\pi-\frac{57\pi}{2}$

11 **a.** $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{7}$ **b.** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ **c.** $\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}$ **d.** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$

Donner une mesure d'un angle orienté

12 ABCD est un carré inscrit dans le cercle trigonométrique. Ses côtés sont parallèles aux axes du repère. Déterminer une mesure en radians des angles orientés $(\vec{i},\overrightarrow{OA})$, $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$, $(\vec{i},\overrightarrow{OC})$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OD})$.



13 Pour chacune des mesures d'angles orientés données, dire s'il s'agit ou pas de la mesure principale :

a. $-\frac{4\pi}{3}$ **b.** $\frac{7\pi}{9}$ **c.** $-\pi$ **d.** $-\frac{27\pi}{4}$ **e.** 2π **f.** π **g.** $\frac{6\pi}{13}$

Déterminer des cosinus et des sinus

Dans les exercices 14 à 16, utiliser la figure des exercices 2 à 4.

14 **1.** Compléter : $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de $(\vec{i},\ldots)$ et $\frac{5\pi}{6}$ une mesure de $(\vec{i},\ldots)$.

2. En déduire la valeur de $\cos\frac{5\pi}{6}$ et celle de $\sin\frac{5\pi}{6}$.

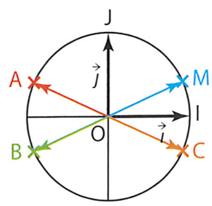
15 **1.** Compléter : $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\vec{i},\ldots)$ et $-\frac{2\pi}{3}$ une mesure de $(\vec{i},\ldots)$.

2. En déduire la valeur de $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et celle de $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

16 **1.** Compléter : $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de $(\vec{i},\ldots)$ et $\frac{5\pi}{4}$ une mesure de $(\vec{i},\ldots)$.

2. En déduire la valeur de $\cos\frac{5\pi}{4}$ et celle de $\sin\frac{5\pi}{4}$.

17 M est un point du cercle tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.



1. Citer un angle orienté dont une mesure est $-x$, $\pi-x$ puis $\pi+x$.

2. Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

a. $\cos(-x)$ **b.** $\sin(-x)$ **c.** $\cos(\pi-x)$ **d.** $\sin(\pi-x)$
e. $\cos(\pi+x)$ **f.** $\sin(\pi+x)$

Déterminer des solutions d'une équation trigonométrique

18 **1.** Sur le cercle trigonométrique, placer deux points A et A′ d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

2. En déduire deux solutions de l'équation $\cos x=-\frac{1}{2}$.

19 **1.** Sur le cercle trigonométrique, placer deux points A et A′ d'ordonnée $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. En déduire deux solutions de l'équation $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercices — Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Enroulement de la droite des réels

→ Aide Cours 1 p. 172

Question de cours

20 Soit M le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$. Donner 2 autres nombres réels ayant également le point M pour point associé.

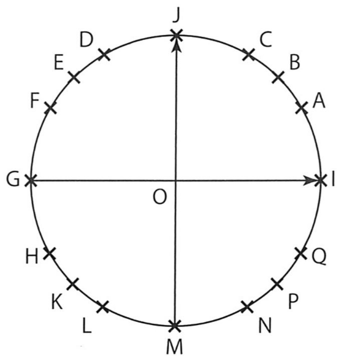
Dans les exercices 21 à 22, tracer le cercle trigonométrique et y placer les points associés aux nombres réels suivants.

21 **a.** 2π **b.** $-\frac{5\pi}{4}$ **c.** $\frac{17\pi}{6}$ **d.** $\frac{11\pi}{2}$ **e.** $-\frac{22\pi}{3}$

22 **a.** $\frac{29\pi}{6}$ **b.** $-\frac{13\pi}{4}$ **c.** 1234π **d.** $-\frac{11\pi}{3}$ **e.** $\frac{7\pi}{2}$

QCM

23 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse en utilisant la figure ci-dessous.*



1. D est le point associé à :
a. $-\frac{16\pi}{3}$ **b.** $\frac{10\pi}{3}$ **c.** $\frac{13\pi}{3}$ **d.** $-\frac{7\pi}{3}$

2. G est le point associé à :
a. 136π **b.** -255π **c.** 4π **d.** 58π

3. H est le point associé à :
a. $-\frac{19\pi}{6}$ **b.** $\frac{31\pi}{6}$ **c.** $\frac{23\pi}{6}$ **d.** $-\frac{7\pi}{6}$

4. P est le point associé à :
a. $-\frac{7\pi}{4}$ **b.** $\frac{13\pi}{4}$ **c.** $-\frac{19\pi}{4}$ **d.** $-\frac{9\pi}{4}$

5. M est le point associé à :
a. $-\frac{7\pi}{2}$ **b.** $\frac{13\pi}{2}$ **c.** $\frac{15\pi}{2}$ **d.** $\frac{21\pi}{2}$

24 Après avoir calculé $x-y$, dire si x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

1. $x=\frac{35\pi}{6}$ et $y=-\frac{\pi}{6}$.

2. $x=\pi$ et $y=-2\,019\pi$.

3. $x=-\frac{11\pi}{4}$ et $y=-\frac{21\pi}{4}$.

25 Parmi les quatre nombres réels donnés, l'un d'entre eux n'est pas associé au même point que les trois autres sur le cercle trigonométrique ; trouver lequel.

a.

$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{23\pi}{6}$

b.

-11π	-18π	0	124π

Vrai ou faux

26 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.*

1. $a=\frac{2\pi}{3}$ et $b=-\frac{16\pi}{3}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

2. $a=-\frac{15\pi}{6}$ et $b=\frac{22\pi}{6}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

3. $a=-\frac{7\pi}{5}$ et $b=-\frac{22\pi}{5}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

Le radian

→ Aide Cours 2 p. 174

Question de cours

27 Un angle orienté a pour mesure $-\frac{7\pi}{6}$.

1. Dire, en justifiant, s'il s'agit de sa mesure principale.

2. Si ce n'est pas le cas, la déterminer à l'aide du cercle trigonométrique.

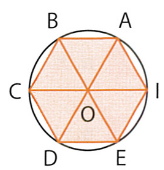
Dans les exercices 28 à 30, placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D tels que les nombres réels a, b, c et d soient des mesures respectives en radians des angles orientés $(\vec{i},\overrightarrow{OA})$, $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$, $(\vec{i},\overrightarrow{OC})$ ***et*** $(\vec{i},\overrightarrow{OD})$.

28 $a=-\frac{\pi}{2}$ $b=\frac{3\pi}{4}$ $c=\frac{5\pi}{6}$ $d=-\frac{2\pi}{3}$

29 $a=\frac{5\pi}{4}$ $b=\frac{7\pi}{6}$ $c=-11\pi$ $d=-\frac{9\pi}{2}$

30 $a=-\frac{8\pi}{3}$ $b=\frac{9\pi}{2}$ $c=-\frac{25\pi}{6}$ $d=24\pi$

31 IABCDE est un hexagone régulier.



1. Donner trois mesures différentes de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OE})$.

2. Donner la mesure principale des angles orientés $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB})$.

3. Donner une autre mesure des angles orientés de la question précédente.

32 Un angle orienté a pour mesure $\frac{77\pi}{6}$.

1. Est-ce sa mesure principale ? Justifier.

2. Déterminer l'entier relatif k tel que $-\pi < \frac{77\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi$.
En déduire la mesure principale de l'angle.

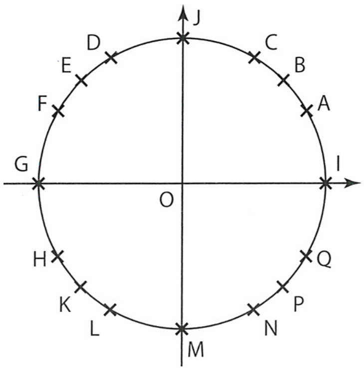
33 Un angle orienté a pour mesure $-\frac{121\pi}{3}$.

1. Est-ce sa mesure principale ? Justifier.

2. Déterminer l'entier relatif k tel que $-\pi < -\frac{121\pi}{3} + k2\pi \leqslant \pi$.
En déduire la mesure principale de l'angle.

QCM

34 *Indiquer dans chaque cas la ou les bonnes réponses en utilisant la figure ci-dessous.*



1. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est :

a. $-\frac{\pi}{2}$ **b.** $\frac{\pi}{2}$ **c.** $\frac{3\pi}{2}$ **d.** $-\frac{3\pi}{2}$

2. La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK})$ est :

a. π **b.** $-\pi$ **c.** 8π **d.** 3π

3. Une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OD})$ est :

a. $\frac{4\pi}{3}$ **b.** $\frac{7\pi}{3}$ **c.** $\frac{2\pi}{3}$ **d.** $-\frac{5\pi}{3}$

4. La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$ est :

a. $\frac{5\pi}{4}$ **b.** $-\frac{3\pi}{4}$ **c.** $\frac{3\pi}{4}$ **d.** $-\frac{11\pi}{4}$

Cosinus et sinus d'angles orientés

→ Aide Cours 3 p. 176

Question de cours

35 Rappeler la valeur de $\cos\frac{\pi}{3}$ et celle de $\sin\frac{\pi}{4}$.

En déduire celle de $\cos\frac{4\pi}{3}$ et $\sin\frac{3\pi}{4}$.

36 **1.** Rappeler la valeur de $\cos\frac{\pi}{4}$ et celle de $\sin\frac{\pi}{4}$.

2. Sur le cercle trigonométrique, placer le point A tel que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ puis le point B tel que $-\frac{3\pi}{4}$ soit une mesure de $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$.

3. En déduire la valeur de $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et celle de $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Angles associés

→ Aide Cours 4 p. 176

Question de cours

37 Justifier que pour tout nombre réel x :

1. $\sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) = 0$.

2. $\cos(\pi - x) - \cos(\pi + x) = 0$.

38 On donne $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ et $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

1. Calculer $\pi - \frac{\pi}{5}$, $\pi + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}$.

2. En déduire $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, $\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{7\pi}{10}$ et $\sin\frac{7\pi}{10}$.

Équations trigonométriques

→ Aide Cours 5 p. 178

Question de cours

39 En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$.

40 En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

41 **1.** En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Déterminer les solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]-2\pi ; \pi]$.

Vrai ou faux

42 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.*

1. L'équation $\cos x = \frac{4}{3}$ n'a pas de solution.

2. $-\frac{\pi}{2}$ est solution de l'équation $\sin x = -1$.

3. $\frac{2\pi}{3}$ est solution de l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Exercices

Pour s'entraîner

Enroulement de la droite des réels

43 Tracer le cercle trigonométrique et y placer les points associés aux nombres réels suivants.

a. $\frac{19\pi}{4}$ **b.** -125π **c.** $-\frac{43\pi}{6}$ **d.** $-\frac{15\pi}{2}$ **e.** $\frac{16\pi}{3}$

→ Voir Exercice résolu 1 p. 173

44 Dire en justifiant si les nombres réels $x = \frac{17\pi}{9}$ et $y = -\frac{10\pi}{9}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

→ Voir Exercice résolu 2 p. 173

Le radian

45 Donner la mesure en degrés des angles géométriques dont la mesure en radians est :

a. $\frac{5\pi}{6}$ **b.** $\frac{7\pi}{12}$ **c.** $\frac{9\pi}{5}$ **d.** $\frac{5\pi}{4}$ **e.** $\frac{14\pi}{9}$ **f.** $\frac{68\pi}{45}$

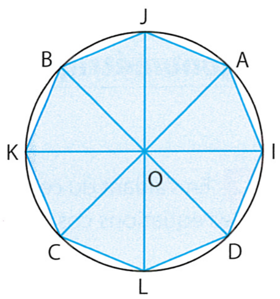
→ Voir Exercice résolu 3 p. 175

46 Donner la mesure en radians des angles géométriques dont la mesure en degrés est :

a. 5° **b.** 198° **c.** 315° **d.** 72° **e.** 40° **f.** 252°

→ Voir Exercice résolu 3 p. 175

47 IAJBKCLD est un octogone régulier.



1. Déterminer la mesure principale des angles orientés $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL})$.

2. Déterminer une mesure des angles orientés précédents dans l'intervalle $]0\,;2\pi]$.

3. Même question dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right[$.

48 Dire, en justifiant, si x et y sont des mesures d'un même angle orienté de vecteurs.

1. $x = \frac{2\pi}{7}$ et $y = -\frac{20\pi}{7}$. **2.** $x = -\frac{17\pi}{4}$ et $y = \frac{15\pi}{4}$.

3. $x = \frac{7\pi}{9}$ et $y = \frac{52\pi}{9}$.

Dans les exercices, 49 et 50, déterminer la mesure principale des angles orientés de vecteurs dont une mesure est :

49 **a.** $-\frac{7\pi}{4}$ **b.** $\frac{15\pi}{2}$ **c.** 13π **d.** 128π **e.** $\frac{29\pi}{7}$

→ Voir Exercice résolu 4 p. 175

50 **a.** $-\frac{55\pi}{6}$ **b.** $-\frac{135\pi}{4}$ **c.** $\frac{47\pi}{3}$ **d.** -1542π **e.** $\frac{52\pi}{9}$

51 ALGO PYTHON **Compléter un programme**

1. Déterminer la mesure principale de $-\frac{49\pi}{3}$ et $\frac{67\pi}{4}$.

2. L'algorithme suivant a été programmé en langage Python. Son but est de déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont on connaît une mesure écrite sous la forme $\frac{a\pi}{b}$.

```
from math import*
a=int(input("Entrer a"))
b=int(input("Entrer b"))
if a/b<=0 :
    while a/b<=-1:
        a=a+2*b
else:
    while ................ :
        a= ...............
print("La mesure principale est",a,"pi/",b)
```

a. Reproduire et compléter cet algorithme.

b. Le programmer et le tester pour valider les résultats obtenus à la question **1.**

Cosinus et sinus d'angles orientés

Dans les exercices 52 à 54, déterminer les cosinus et les sinus donnés à l'aide du cercle trigonométrique et du tableau des valeurs remarquables de cosinus et de sinus.

52 **a.** $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **b.** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **c.** $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

→ Voir Exercice résolu 5 p. 177

53 **a.** $\sin(-\pi)$ **b.** $\cos\frac{7\pi}{3}$ **c.** $\cos\frac{5\pi}{2}$

54 **a.** $\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$ **b.** $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ **c.** $\cos\frac{5\pi}{4}$

55 Déterminer une valeur possible du nombre réel x tel que $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

56 Déterminer une valeur possible du nombre réel x tel que $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

57 Déterminer une valeur possible du nombre réel x tel que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = -\frac{1}{2}$.

58 Soit x un nombre réel. En vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer le signe de $\cos x$ lorsque x décrit l'intervalle :

a. $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ **b.** $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ **c.** $\left[-\frac{\pi}{3}\,;-\frac{\pi}{6}\right]$.

59 Soit x un nombre réel. En vous aidant du cercle trigonométrique, déterminer le signe de $\sin x$ lorsque x décrit l'intervalle :

a. $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ **b.** $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ **c.** $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.

60 Soit x un nombre réel de $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos x = -\frac{1}{3}$.

1. Placer le point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}\,, \overrightarrow{OM})$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.

Coup de pouce

- Utiliser la propriété $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

61 Soit x un nombre réel de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = -\frac{1}{5}$.

1. Placer le point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}\,, \overrightarrow{OM})$.

2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

Angles associés

62 On donne $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

À l'aide des propriétés des cosinus et des sinus, en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{12\pi}{5}$, $\sin\frac{12\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{9\pi}{10}$ et $\sin\frac{9\pi}{10}$.

→ Voir Exercice résolu 6 p. 177

63 On donne $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

À l'aide des propriétés des cosinus et des sinus, en déduire les valeurs exactes $\cos\frac{7\pi}{8}$, $\sin\frac{7\pi}{8}$, $\cos\frac{9\pi}{8}$, $\sin\frac{9\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\sin\frac{3\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$.

Équations trigonométriques

64 En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $\cos x = 0$ **b.** $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\sin x = \frac{1}{2}$.

→ Voir Exercice résolu 7 p. 179

65 En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ les équations :

a. $\cos x = -1$ **b.** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

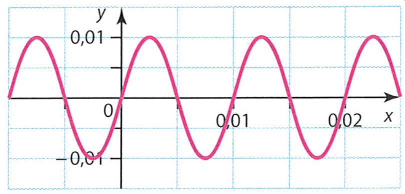
→ Voir Exercice résolu 8 p. 179

66 En s'aidant du cercle trigonométrique, résoudre dans $]0\,;4\pi]$ les équations :

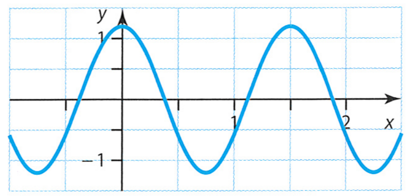
a. $\sin x = 0$ **b.** $\cos x = -\frac{1}{2}$ **c.** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dans les exercices 67 et 68, lire graphiquement la période de la fonction f donnée par sa courbe représentative.

67



68



69 Montrer que les fonctions données ci-dessous sont périodiques de période T.

a. $f : x \mapsto \sin(10\pi x)$ avec $T = 0{,}2$

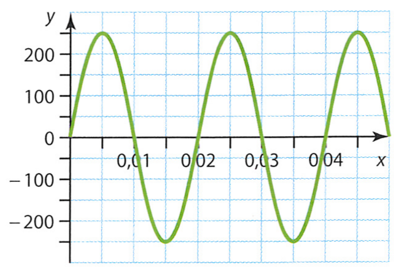
b. $f : x \mapsto \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ avec $T = \frac{\pi}{2}$

70 **À chacun sa série** STL

Lors de l'émission d'un son pur, la pression de l'air (en mP) est donnée par : $f(t) = 250\sin(100\pi t)$

où t est le temps exprimé en secondes.

On donne la courbe représentant la fonction f :



1. Lire graphiquement la période T.

2. Justifier par un calcul la valeur de T lue précédemment.

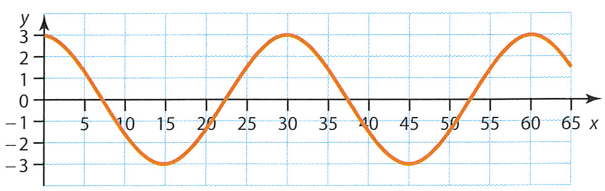
71 **À chacun sa série** STI2D

La tension (en Volts) du courant délivré par un générateur très basse fréquence est définie par : $U(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$

où t est le temps exprimé en secondes.

1. Déterminer la tension du courant à l'instant $t = 0$.

2. a. On donne la courbe représentant la tension U :



Lire graphiquement la période T.

b. Justifier par un calcul la valeur de T lue précédemment.

Exercices

Pour faire le point

Tests
S'entraîner en ligne
lienmini.fr/10333-224

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

	V	F
72 Si un angle géométrique mesure 105° alors sa mesure en radians est $\frac{7\pi}{12}$.		
73 Si un angle géométrique mesure $\frac{2\pi}{9}$ rad alors sa mesure en degrés est 38°.		
74 $-\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{27\pi}{5}$ sont des mesures en radians d'un même angle orienté.		
75 $-\frac{8\pi}{7}$ est la mesure principale d'un angle orienté ayant pour mesure $\frac{20\pi}{7}$ rad.		
76 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ est la valeur de $\sin\frac{2\pi}{3}$.		
77 $\cos\frac{8\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9}$.		
78 $\frac{17\pi}{6}$ est une solution de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.		
79 La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 2\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ est périodique de période 0,02.		

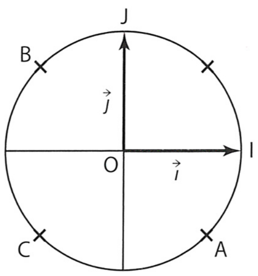
→ Vérifier les résultats p. 294

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

80 Sur le cercle trigonométrique ci-contre, le point associé au nombre réel $-\frac{13\pi}{4}$ est :

a. A   b. B   c. C



81 La mesure principale de $\frac{146\pi}{3}$ est :

a. $-\frac{2\pi}{3}$ b. $\frac{4\pi}{3}$ c. $\frac{2\pi}{3}$

82 $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ est égal à :

a. $\sin\frac{\pi}{6}$ b. $\sin\frac{5\pi}{6}$ c. $\sin\frac{7\pi}{6}$

83 Pour tout nombre réel x, $\cos(x + 7\pi)$ est égal à :

a. $\cos x$ b. $-\cos x$ c. $\sin x$

84 Si $x \in [-\pi\,;0]$ et si $\cos x = 0{,}8$ alors $\sin x$ est égal à :

a. $-0{,}6$ b. $0{,}6$ c. $0{,}2$

85 Les solutions de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ sont :

a. $-\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$ b. $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ c. $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$

→ Vérifier les résultats p. 294

86 In English

Using the properties of cosine and sine, give the exact values of:

a. $\cos\frac{49\pi}{6}$ **b.** $\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)$ **c.** $\sin\frac{19\pi}{3}$

d. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$ **e.** $\sin\left(-\frac{59\pi}{6}\right)$ **f.** $\cos\frac{31\pi}{3}$

87 COMPÉTENCE Raisonner

1. Résoudre dans $\left]-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$ l'équation $\cos X=\frac{1}{2}$.

2. Montrer que si $x\in\,]-\pi\,;\pi]$ alors $x-\frac{\pi}{4}\in\left]-\frac{5\pi}{4}\,;\frac{3\pi}{4}\right]$.

3. En posant $X=x-\frac{\pi}{4}$, en déduire les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ de l'équation $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

88 COMPÉTENCE Raisonner

1. Résoudre dans $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{13\pi}{3}\right[$ l'équation $\sin X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Montrer que si $x\in[0\,;2\pi[$ alors $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{13\pi}{3}\right[$.

3. En posant $X=2x+\frac{\pi}{3}$, en déduire les solutions dans $[0\,;2\pi[$ de l'équation $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

89 COMPÉTENCE Communiquer

Amélie affirme à son amie Auriane que l'équation $\cos(2t)=0$ n'admet dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ que deux solutions : $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.

QCM

90 COMPÉTENCE Calculer

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

1. $\cos(x+3\pi)$ est égal à :

a. $\cos x$ **b.** $-\cos x$ **c.** $\sin x$ **d.** $-\sin x$

2. $\sin(5\pi-x)$ est égal à :

a. $\cos x$ **b.** $-\cos x$ **c.** $\sin x$ **d.** $-\sin x$

3. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$ est égal à :

a. $\cos x$ **b.** $-\cos x$ **c.** $\sin x$ **d.** $-\sin x$

4. $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}-x\right)$ est égal à :

a. $\cos x$ **b.** $-\cos x$ **c.** $\sin x$ **d.** $-\sin x$

91 COMPÉTENCE Calculer

Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, dire si elle est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

1. $f:x\mapsto\sin(3x)$ **2.** $f:x\mapsto 2\cos(5\pi x)$ **3.** $f:x\mapsto 1{,}5\cos(x+1)$

Vrai ou faux

92 COMPÉTENCE Raisonner

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Pour tous nombres réels x et y, $\cos(x+y)=\cos x+\cos y$.

2. Si $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ alors $\sin(4x)\geqslant 0$.

3. Si $x\in\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ alors $\cos(3x)\geqslant 0$.

93 COMPÉTENCE Représenter

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Sur le cercle trigonométrique, représenter en rouge l'arc de cercle dont les points ont une abscisse strictement supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et en déduire les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation $\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

94 COMPÉTENCE Représenter

1. À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $\sin x=-0{,}5$.

2. Sur le cercle trigonométrique, représenter en rouge l'arc de cercle dont les points ont une ordonnée inférieure ou égale à $-0{,}5$ et en déduire les solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation $\sin x\leqslant -0{,}5$.

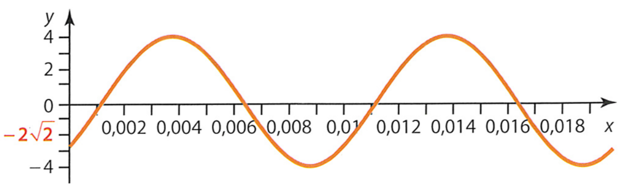
95 COMPÉTENCE Calculer

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique de période T si, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$. Pour chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$, montrer qu'elle est périodique de période T.

1. $f:x\mapsto\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ et $T=\pi$. **2.** $f:x\mapsto\sin(3\pi x)$ et $T=\frac{2}{3}$.

96 COMPÉTENCE Représenter

Dans un circuit électrique, l'intensité du courant est $i(t)=A\sin(200\pi t+\varphi)$ où t est le temps exprimé en secondes et φ, la phase à l'origine exprimée en radians. On donne ci-dessous la courbe représentative de i.



1. À l'aide de la courbe, déterminer A.

2. À l'aide de la courbe, déterminer $i(0)$ et en déduire la valeur exacte de φ.

3. Déterminer alors l'expression de $i(t)$.

TP

Étude du son émis par un diapason

CAPACITÉ Utiliser une fonction sinusoïdale pour étudier une onde sonore.

PARTIE 1 En physique

Certaines grandeurs physiques sont modélisées par des fonctions sinusoïdales dont la variable est le temps t.
Ces fonctions sont définies par $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ou $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
A est appelé *l'amplitude* ; $\omega t + \varphi$ est appelé la *phase instantanée* (elle est exprimée en radians) ; ω est appelé la *pulsation* ; φ est appelé la *phase à l'origine* (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$).
On se propose d'étudier une situation faisant intervenir une telle fonction.

PARTIE 2 Sur papier

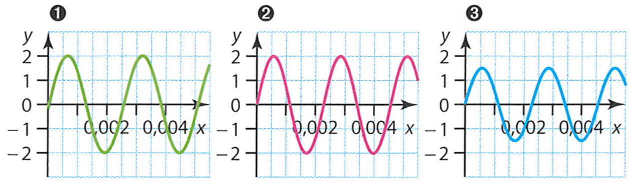
Un diapason est un outil émettant un son dit pur et permettant aux musiciens d'accorder leur instrument. On s'intéresse ici à un diapason qui, lors de l'émission d'un son, fait varier la pression de l'air (exprimée en Pascals) en fonction du temps t (exprimé en secondes) selon la relation : $P(t) = 2\sin(880\pi t)$

1. Déterminer l'amplitude A de la pression P et justifier qu'elle correspond à la valeur maximale de la pression.

2. a. Démontrer que pour tout nombre réel t de $[0\,;+\infty[$, $P(t+T) = P(t)$ avec $T = \frac{1}{440}$. Que signifie ce résultat pour la pression P ?

b. Déterminer la pulsation ω de la pression P puis établir un lien entre T et ω.

3. Parmi les 3 courbes données ci-contre, déterminer celle correspondant à la pression P ; justifier la réponse.



4. On étudie désormais la pression P sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{440}\right]$ et on se propose de déterminer à quel(s) instant(s) t, la pression de l'air est égale à la moitié de sa valeur maximale.

a. Justifier que le problème revient à résoudre dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{440}\right]$ l'équation $\sin(880\pi t) = \frac{1}{2}$.

b. Justifier que si t est dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{440}\right]$, alors la phase instantanée est dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$.

c. Résoudre l'équation $\sin X = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$ et en déduire la (les) réponse(s) au problème.

PYTHON En salle informatique

lienmini.fr/10333-225

On se propose de déterminer au bout de combien de secondes la pression sera égale au quart de sa valeur maximale pour la première fois.

1. Justifier que le problème revient à résoudre dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{1760}\right]$ l'équation $\sin(880\pi t) = \frac{1}{4}$.

2. Voici un algorithme écrit en langage Python.

```
1  from math import*
2  def P(t):
3      return sin(880*pi*t)
4  a=0
5  b=1/1760
6  e=float(input("Précision"))
7  while b-a>=e :
8      m=(a+b)/2
9      if P(m)>0.25:
10         b=m
11     else:
12         a=m
13 print("La pression est égale au quart de sa valeur maximale entre"
```

a. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'obtenir un encadrement de la solution au problème.

b. Saisir cet algorithme après avoir complété la fin de la ligne 13 qui a malencontreusement été effacée puis déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-4} de la solution au problème.

c. On souhaite déterminer maintenant au bout de combien de secondes, la pression de l'air sera égale au quart de sa valeur maximale pour la 2e fois.
Modifier cet algorithme afin qu'il réponde au nouveau problème.

97 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*

1. Si $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ alors :

a. $z = -2 + 2i$ **b.** $z = 2 + 2i$

c. $z = 2 + i\sqrt{2}$ **d.** $z = 2 - 2i$

2. Si $z = -4i$ alors :

a. $z = 4(\cos 0 + i\sin 0)$ **b.** $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

c. $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

d. $z = -4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

3. Si $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ alors :

a. $z = -1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

b. $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

c. $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d. $z = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

4. Soit A le point d'affixe $1 + i\sqrt{3}$. L'affixe du symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses a pour forme trigonométrique :

a. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b. $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

c. $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

d. $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

5. Soit E le point d'affixe $-3 + 3i$. L'affixe du symétrique de E par rapport à l'origine O du repère a pour forme trigonométrique :

a. $3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b. $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

c. $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d. $2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

98 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 4$ et $z_B = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice (unité graphique : 2 cm).

2. Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

3. Calculer l'affixe du point I milieu du segment [AB].

4. Calculer la longueur OI et déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \vec{u})$.

En déduire une forme trigonométrique de l'affixe du point I.

5. Déduire des questions **3.** et **4.** les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et de $\sin\frac{3\pi}{8}$.

99 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$. On note A′ le symétrique du point A par rapport à la droite (OB).

1. a. Écrire l'affixe du point A′ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

b. Soit I le milieu du segment [AA′]. Calculer l'affixe du point I.

2. Écrire l'affixe du point I sous forme trigonométrique.

3. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

100 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} - i$.

1. Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

2. Montrer que le triangle OAB est équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe z_E dont le module est 1 et un argument est $-\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'affixe de E sous forme algébrique.

b. Soit D l'image du point E par la translation de vecteur $-\vec{v}$.

Déterminer l'affixe du point D sous forme algébrique puis montrer que OD = DB.

c. En déduire que la droite (AD) est la médiatrice du segment [OB].

101 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = 4$.

1. En prenant comme unité graphique 1 cm, placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. a. Déterminer une forme trigonométrique de z_A et de z_B.

b. En déduire la nature du triangle AOB.

3. Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

4. Soit E le milieu du segment [OA] et D le symétrique du point A par rapport à l'axe des ordonnées.

a. Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].

b. Sans aucun calcul, démontrer que le point O est le milieu du segment [BD].