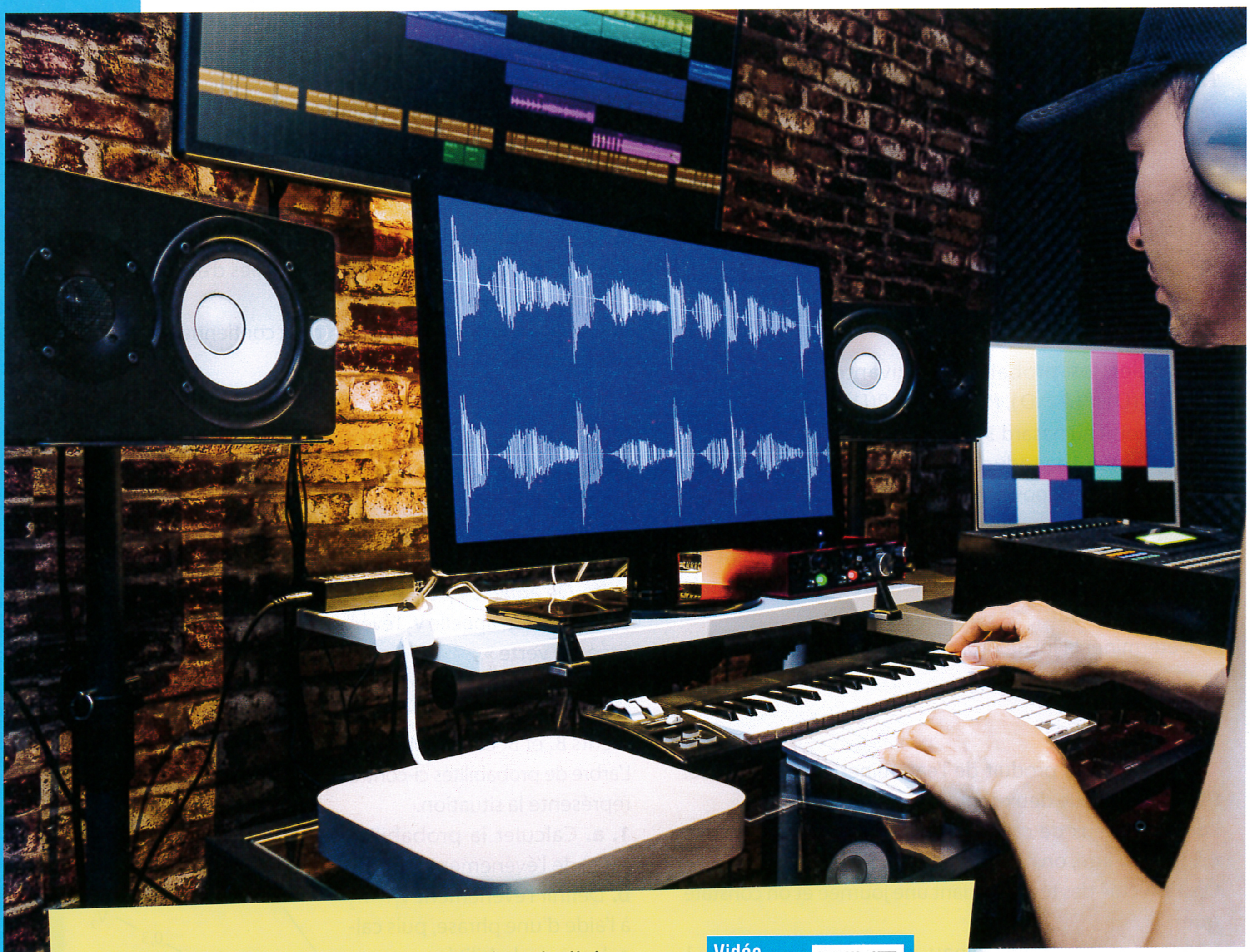
8 Trigonométrie

CAPACITÉS

- Effectuer des conversions de degré en radian, de radian en degré.
- Résoudre, par lecture sur le cercle trigonométrique, des équations du type $\cos(x) = a$ et $\sin(x) = a$.
- Connaître et utiliser les relations entre sinus et cosinus des angles associés.
- Utiliser ces relations pour justifier les propriétés de symétrie des courbes des fonctions circulaires.



Le son est une variation de la pression de l'air en un point au cours du temps. Les instruments de musique émettent des sons complexes, composés de plusieurs sons dits purs car impossibles à trouver dans la nature. Le diapason réussit toutefois à émettre un son pur. On peut visualiser les sons grâce à l'oscilloscope.

Quelle est la forme de la courbe d'un son pur ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 171 et **TP** p. 188

Vidéo
Visualisons les sons !
▶ lienmini.fr/10333-221

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash
Diaporama
10 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10333-222

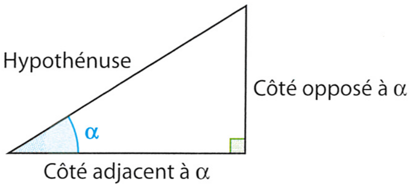
1 La trigonométrie dans le triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, on définit le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu α de la façon suivante :

$\cos\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$ $\sin\alpha = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{hypothénuse}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}$

On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

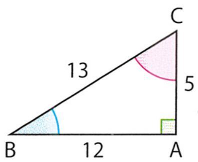


2 Les fonctions paires et les fonctions impaires

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **paire** si, pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.
La courbe représentative de f dans un repère orthogonal est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si, pour tout nombre réel x, $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.
La courbe représentative de f dans un repère orthogonal est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.



	a	b	c	d	Aide
1. Dans le triangle ABC rectangle en A ci-contre, $\cos\widehat{ABC}$ est égal à :	$\dfrac{5}{13}$	$\dfrac{13}{12}$	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{12}{13}$	1
2. Dans le triangle ABC rectangle en A ci-contre, la valeur arrondie au degré de l'angle $\widehat{ACB}$ est :	67°	23°	66°	62°	1
3. Soit α un angle aigu dans un triangle rectangle. Si $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ alors $\cos\alpha$ est égal à :	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{\sqrt{10}}{3}$	$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	0,94	1
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 5$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Alors :	f est paire.	f est impaire.	f n'est ni paire, ni impaire.	$\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.	2
5. Lequel de ces nombres réels appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$?	$-\dfrac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$\dfrac{4\pi}{5}$	$-\dfrac{7\pi}{6}$	2
6. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2\pi}{5}$ est égal à :	$\dfrac{3\pi}{7}$	$\dfrac{9\pi}{10}$	$\dfrac{14\pi}{10}$	$\dfrac{3\pi}{10}$	2

→ Voir Corrigé p. 294

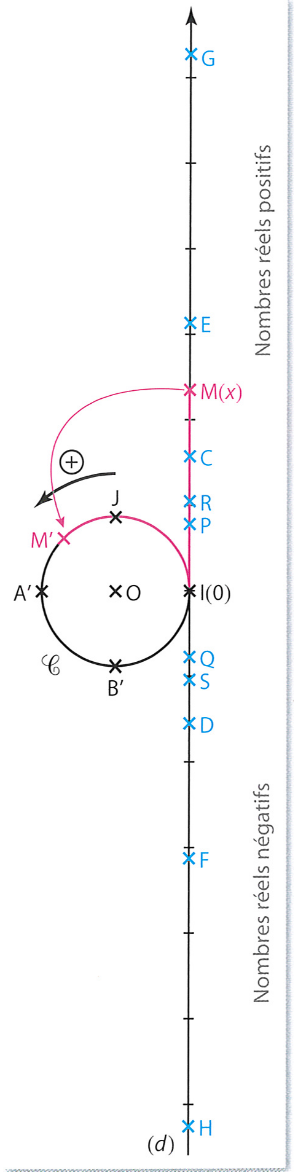
Activités

1 On enroule !

OBJECTIF Enrouler la droite numérique sur le cercle trigonométrique afin de définir la mesure en radians d'angles géométriques → Cours 1 p. 172

On considère sur le graphique ci-contre le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 sur lequel on définit un sens positif de parcours : le sens inverse des aiguilles d'une montre, dit aussi sens direct. Un tel cercle est appelé **cercle trigonométrique**.

Soit (d) la droite tangente à $\mathscr{C}$ en I. On assimile cette droite à la droite des nombres réels où I est le point d'abscisse 0. Sur cette droite (d), on place un point M d'abscisse x.



Quand on *enroule* sur le cercle $\mathscr{C}$ la demi-droite des nombres réels positifs dans le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre), et celle des nombres réels négatifs dans le **sens indirect** (sens des aiguilles d'une montre), le point M « se place » sur un unique point M′ du cercle $\mathscr{C}$ obtenu de la façon suivante :

• Si x est positif alors M′ est l'extrémité du chemin d'origine I et de longueur x parcouru sur le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

• si x est négatif alors M′ est l'extrémité du chemin d'origine I et de longueur $-x$ parcouru sur le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point M′ est dit le **point associé** à x.

1. a. Déterminer la longueur du cercle $\mathscr{C}$.
b. En déduire la longueur des arcs $\overset{\frown}{IJ}$, $\overset{\frown}{IA'}$ et $\overset{\frown}{IB'}$.

2. Sur la droite (d), on a placé les points C, D, E, F, G, H, P, Q, R et S d'abscisses respectives $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
Déterminer les points de $\mathscr{C}$ associés aux nombres réels : $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \pi, -\pi, 2\pi$ et -2π.

3. a. Construire le cercle $\mathscr{C}$ (unité graphique : 3 cm) puis les points P′, Q′, R′ et S′ respectivement associés aux nombres réels : $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
b. Quelle remarque peut-on faire sur les points du cercle $\mathscr{C}$ associés à deux nombres réels opposés ?

4. Peut-on trouver d'autres nombres réels de la droite (d) associés au point P′ du cercle $\mathscr{C}$? Si oui, en donner deux autres.

5. Construire sur le cercle $\mathscr{C}$ les point T′ et U′ respectivement associés aux nombres réels $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.

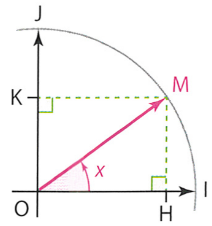
6. Si $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on dit que l'angle géométrique $\widehat{IOM'}$ a pour mesure ***x* radians**.
Par exemple, ici, l'angle $\widehat{IOJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radians car J est le point du cercle associé à $\frac{\pi}{2}$.
a. Déterminer la mesure en radians des angles géométriques $\widehat{IOA'}$, $\widehat{IOP'}$, $\widehat{IOR'}$ et $\widehat{IOT'}$.
b. Est-il facile de construire sur le cercle $\mathscr{C}$ un angle géométrique de 1 radian ? Pourquoi ?

2 Des valeurs remarquables de cosinus et de sinus

OBJECTIF Découvrir des valeurs remarquables de cosinus et de sinus → Cours 3 p. 176

On donne ci-contre une partie du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. Soit x un nombre réel appartenant à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et M le point de $\mathscr{C}$ tel que x soit la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

On note H le projeté orthogonal de M sur [OI] et K celui sur [OJ] ; le triangle OHM est donc rectangle en H.



1. a. Faire la figure dans le cas où $x=\frac{\pi}{4}$.

b. Utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle OHM pour calculer les longueurs OH et MH.

c. En déduire que $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. Faire la figure dans le cas où $x=\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer la nature du triangle OIM puis en déduire la longueur OH.

c. Utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle OHM pour calculer la longueur MH.

d. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{3}$ et de $\sin\frac{\pi}{3}$.

3 À la découverte d'une nouvelle courbe → Mémento GEOGEBRA p. 275

OBJECTIF Découvrir la courbe représentative de la fonction sinus et quelques particularités → Cours 4 p. 176

Un son pur est modélisé par une fonction sinusoïdale. Dans cette activité, nous allons construire la courbe représentative de la plus simple de ce type de fonctions : la fonction sinus.

1. Construction de la courbe avec GeoGebra

a. Créer les points O et I de coordonnées respectives $(-10\,;0)$ et $(-9\,;0)$ puis le cercle de centre O et de rayon OI.

b. Créer un curseur a allant de -8 à 16 avec un pas de 0,1.

c. Créer le point M de coordonnées $(-10+\cos a\,;\sin a)$ puis le point N de coordonnées $(a\,;y_{\mathrm{M}})$.

d. Tracer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et, après avoir changé l'unité d'angle dans le menu « Options » puis « avancé », afficher une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Déterminer le lien entre la mesure affichée et le curseur a.

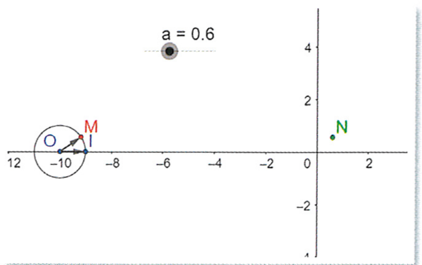
e. Justifier que les coordonnées du point N sont $(a\,;\sin a)$. Ainsi, N est un point de la courbe représentative de la fonction sinus.

2. Observation de quelques propriétés graphiques

a. Placer le curseur en $a=0$.

b. Activer la trace active du point N en faisant un clic droit sur le point puis déplacer le curseur vers la droite, de telle sorte que le point M décrive un tour complet du cercle.

c. Replacer le curseur en $a=0$ puis le déplacer vers la gauche, jusqu'à ce que le point M ait effectué un tour complet du cercle. Quelles particularités peut-on constater concernant la courbe obtenue ?



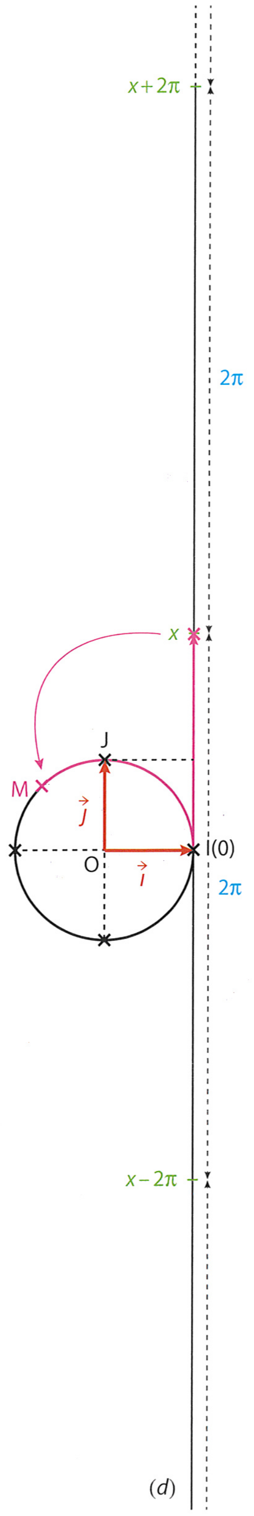
Cours

1 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, I est le point tel que $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et J le point tel que $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

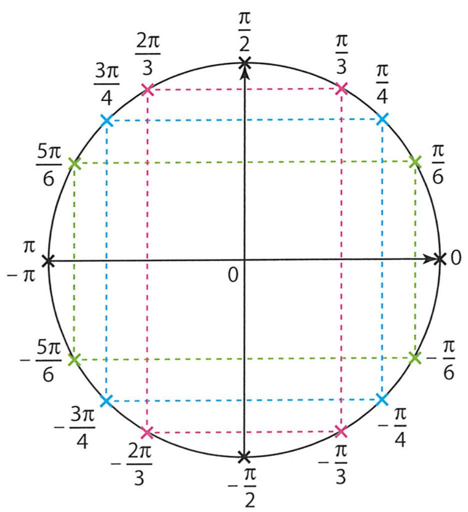
Définition Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, sur lequel on définit un sens positif de parcours : c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre. On parle aussi de **sens direct**.

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O (sa longueur est donc égale à 2π).
La droite (d), tangente à $\mathscr{C}$ en I, est munie du repère $\left(\mathrm{I}\,;\vec{j}\right)$: on l'assimile à la droite des nombres réels.
Sur la droite des nombres réels, on place un point d'abscisse x.
Quand on enroule, sur le cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite des nombres réels positifs dans le sens direct, et celle des nombres réels négatifs dans le sens indirect, chaque nombre réel x vient « s'appliquer » sur un unique point M du cercle $\mathscr{C}$.
On dit que le point M est **le point associé** au nombre réel x.
Mais x n'est pas le seul nombre réel étant associé au point M.
En effet, puisque la longueur du cercle $\mathscr{C}$ est égale à 2π, le point M est aussi le point associé aux nombres réels $x+2\pi$, $x-2\pi$… (représentés sur le graphique ci-contre).



Propriétés Soit M un point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel x.
- M est le point associé à tous les nombres réels de la forme $\boldsymbol{x+k2\pi}$ où k est un entier relatif.
- Si x' est un nombre réel tel que $\boldsymbol{x-x'=k2\pi}$ où k est un entier relatif, alors M est aussi le point associé à x'.

Points associés à connaître



→ Voir Exercices résolus 1 et 2

Exercice résolu 1 — Placer sur le cercle trigonométrique le point associé à un nombre réel donné

On enroule la droite des nombres réels sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
Déterminer les points M et N du cercle $\mathscr{C}$ respectivement associés aux nombres réels :
$x = \frac{19\pi}{3}$ et $y = -\frac{21\pi}{4}$.

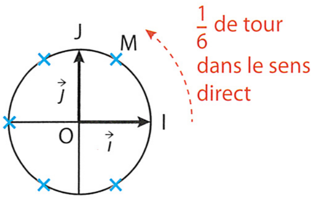
Méthode — **Pour placer sur le cercle trigonométrique un point associé**

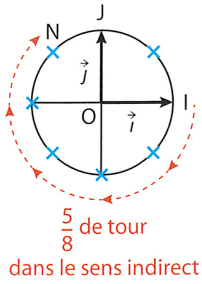
1. On **détermine**, s'il y en a, le nombre entier de tours effectués par enroulement, dans le sens direct ou indirect.
2. On **détermine** la proportion de tours restante pour placer le point associé à x sur le cercle.

Solution

$x = \frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3}$.

L'enroulement effectué correspond à 3 tours ($3 \times 2\pi$) dans le sens direct, suivi d'un sixième de tour $\left(\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{6} \times 2\pi\right)$ dans le sens direct.





$y = -\frac{21\pi}{4} = -\frac{16\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = -4\pi - \frac{5\pi}{4}$.

L'enroulement effectué correspond à 2 tours ($2 \times 2\pi$) dans le sens indirect suivi de cinq huitièmes de tour $\left(\frac{5\pi}{4} = \frac{10\pi}{8} = \frac{5}{8} \times 2\pi\right)$ dans le sens indirect.

→ Voir Exercice 43 p. 184

Exercice résolu 2 — Savoir si deux nombres réels donnés sont associés à un même point du cercle trigonométrique

1. Les nombres réels $x = \frac{19\pi}{3}$ et $y = \frac{53\pi}{3}$ sont-ils associés au même point sur le cercle trigonométrique ?

2. Même question avec les nombres réels $x = -\frac{12\pi}{7}$ et $y = \frac{30\pi}{7}$.

Méthode — **Pour savoir si deux nombres réels x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique**

1. On **calcule** $x - y$.
2. Si $x - y$ s'écrit sous la forme $k2\pi$, où k est un entier relatif, alors x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique ; si ce n'est pas le cas, alors ils ne le sont pas.

Solution

1. $x - y = \frac{19\pi}{3} - \frac{53\pi}{3} = -\frac{34\pi}{3}$.
$x - y$ ne s'écrit pas sous la forme $k2\pi$ où k est un entier relatif donc x et y ne sont pas associés au même point sur le cercle trigonométrique.

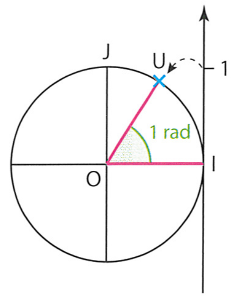
2. $x - y = -\frac{12\pi}{7} - \frac{30\pi}{7} = -\frac{42\pi}{7} = -6\pi = -3 \times 2\pi$.
$x - y$ s'écrit sous la forme $k2\pi$ où k est un entier relatif donc x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

→ Voir Exercice 44 p. 184

2 Une nouvelle unité de mesure d'angle : le radian

A Mesure en radians d'angles géométriques

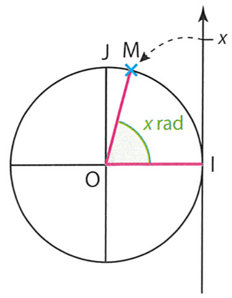
DÉFINITION Soit U le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel 1. On définit **1 radian** (1 rad) comme la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOU}$.



DÉFINITION Soit x un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\pi]$ et M le point du cercle trigonométrique de centre O associé à x.
x est appelé la **mesure en radians** de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$.

EXEMPLE • J est le point associé au nombre réel $\frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{IOJ}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$ rad.

PROPRIÉTÉ Les mesures en degrés et en radians d'un angle géométrique sont **proportionnelles**.

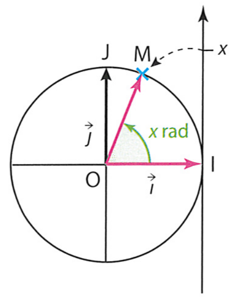


Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

B Mesures en radians d'angles orientés de vecteurs

Une autre appellation de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est $\widehat{MOI}$. Si pour aller de I à M, le chemin est aussi long que pour se rendre de M à I, il ne s'effectue pas dans le même sens. C'est pour différencier ces deux angles que l'on va définir des angles orientés de vecteurs.

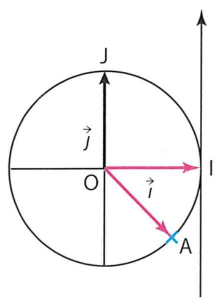
DÉFINITION Soit x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique de centre O associé à x.
On dit que x est une mesure en radians de **l'angle orienté** de vecteurs $\left(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}\right)$.



REMARQUE • M étant le point associé à tous les nombres réels de la forme $x + k2\pi$ où k est un entier relatif, l'angle orienté $\left(\vec{i}\,,\overrightarrow{OM}\right)$ admet donc x comme mesure en radians mais également tous les nombres réels de la forme $x + k2\pi$ où k est un entier relatif.

C Mesure principale d'un angle orienté de vecteurs

DÉFINITION La mesure **principale** d'un angle orienté de vecteurs est l'unique mesure de cet angle **appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$**.



EXEMPLE • $-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\,; \ldots$ sont des mesures de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i}\,,\overrightarrow{OA}\right)$. Mais la mesure principale de cet angle est $-\frac{\pi}{4}$ car c'est la seule qui appartienne à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

→ Voir Exercices résolus 3 et 4

Exercice résolu 3 — Effectuer des conversions entre degrés et radians

1. Convertir en radians les mesures d'angles géométriques suivantes données en degrés : 162° et 24°.
2. Convertir en degrés les mesures d'angles géométriques suivantes données en radians : $\frac{\pi}{9}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

Méthode — Pour effectuer des conversions entre degrés et radians

On **utilise** un tableau de proportionnalité en faisant apparaître la correspondance de référence : « π rad correspondent à 180° ».

Solution

1.

Mesure de l'angle géométrique en degrés	180	162	24
Mesure de l'angle géométrique en radians	π	x	y

$180x = 162\pi$ d'où $x = \frac{162\pi}{180}$ ou encore $x = \frac{9\pi}{10}$.

Donc 162° correspondent à $\frac{9\pi}{10}$ rad.

$180y = 24\pi$ d'où $y = \frac{24\pi}{180}$ ou encore $y = \frac{2\pi}{15}$.

Donc 240° correspondent à $\frac{2\pi}{15}$ rad.

2.

Mesure de l'angle géométrique en degrés	180	x	y
Mesure de l'angle géométrique en radians	π	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{4}$

$x\pi = 180 \times \frac{\pi}{9}$ d'où $x\pi = 20\pi$ ou encore $x = 20$. Donc une mesure d'angle de $\frac{\pi}{9}$ rad correspond à une mesure de 20°.

$y\pi = 180 \times \frac{3\pi}{4}$ d'où $y\pi = 135\pi$ ou encore $y = 135$. Donc une mesure d'angle de $\frac{3\pi}{4}$ rad correspond à une mesure de 135°.

→ Voir **Exercices 45 et 46** p. 184

Exercice résolu 4 — Déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Déterminer la mesure principale d'un angle orienté dont une mesure est $\frac{41\pi}{6}$ rad.

Méthode — Pour déterminer la mesure principale α d'un angle orienté dont on connaît une mesure *x*

1. On **écrit** que $\alpha = x + k2\pi$ où k est un entier relatif.
2. On **détermine** l'entier relatif k en utilisant l'encadrement $-\pi < \alpha \leqslant \pi$.
3. On **calcule** α en remplaçant k par la valeur obtenue précédemment dans $\alpha = x + k2\pi$.

Solution

Soit α la mesure principale cherchée ; on a donc :
$\alpha = \frac{41\pi}{6} + k2\pi$ où k est un entier relatif.

$$-\pi < \alpha \leqslant \pi \text{ ssi } -\pi < \frac{41\pi}{6} + k2\pi \leqslant \pi$$

On soustrait $\frac{41\pi}{6}$.

$$\text{ssi } -\frac{47\pi}{6} < k2\pi \leqslant -\frac{35\pi}{6}$$

On divise par 2π.

$$\text{ssi } -\frac{47}{12} < k \leqslant -\frac{35}{12}$$

Or $-\frac{47}{12} \approx -3{,}9$ et $-\frac{35}{12} \approx -2{,}9$ donc l'entier relatif k cherché est $k = -3$.

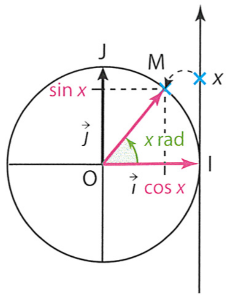
On a donc :
$\alpha = \frac{41\pi}{6} + (-3) \times 2\pi = \frac{41\pi}{6} - 6\pi = \frac{41\pi}{6} - \frac{36\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

La mesure principale de l'angle est $\frac{5\pi}{6}$ rad.

→ Voir **Exercices 49 et 50** p. 184

3 Cosinus et sinus d'angles orientés de vecteurs

A Définitions et valeurs remarquables



Définition Soit M un point du cercle trigonométrique de centre O et x une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
Le **cosinus** de x est l'abscisse du point M ; on le note $\cos x$.
Le **sinus** de x est l'ordonnée du point M ; on le note $\sin x$.

Valeurs remarquables : le tableau ci-dessous donne des valeurs de cosinus et de sinus à connaître car elles sont souvent utilisées dans les exercices.

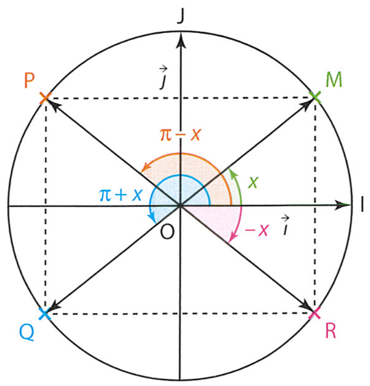
Mesure en radians x de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

→ Voir Exercice résolu 5

B Propriétés immédiates

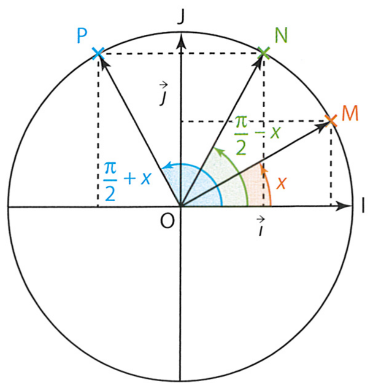
Propriétés Pour tout nombre réel x,
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$,
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(x + k2\pi) = \cos x \quad \sin(x + k2\pi) = \sin x \quad$ (k entier relatif)

Remarque • $\cos^2 x$ signifie $(\cos x)^2$.



4 Angles associés

Propriétés Pour tout nombre réel x,
- $\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$



Remarque • Le cercle trigonométrique permet de retrouver facilement ces propriétés.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Lire un cosinus et un sinus à l'aide du cercle trigonométrique

Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{6}$ et $\sin\frac{7\pi}{6}$.

Méthode — Pour lire un cosinus et un sinus à l'aide du cercle trigonométrique

1. On **place** les points correspondants aux angles donnés.
2. On **utilise** le tableau des valeurs remarquables et des symétries de la figure.

Solution

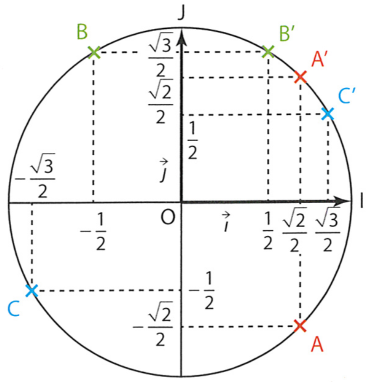
Soit A, B et C les points du cercle trigonométrique de centre O tels que $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{6}$ soient une mesure en radians des angles orientés $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OC})$.

Les valeurs du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ étant connues, on place sur le cercle les points A′, B′ et C′ tels que $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ soit une mesure en radians des angles orientés de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OB'})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OC'})$.

A et A′ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, B et B′ par rapport à l'axe des ordonnées et C et C′ par rapport à l'origine O. On en déduit que :

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.



→ Voir Exercices 52 à 54 p. 184

Exercice résolu 6 — Calculer des cosinus et des sinus en utilisant les formules des angles associés

On donne $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

En déduire les valeurs exactes de :

$\sin\frac{11\pi}{12}$, $\cos\frac{13\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Méthode — Pour calculer des cosinus et des sinus en utilisant les formules des angles associés

1. On **écrit** la mesure de l'angle sous la forme $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ ou $\frac{\pi}{2} + x$ où x est un réel dont le cosinus ou le sinus est connu.
2. On **applique** les formules des angles associés.
3. On **détermine** le cosinus ou le sinus cherché grâce au cosinus ou au sinus connu.

Solution

$\sin\frac{11\pi}{12} = \sin\left(\frac{12\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$\cos\frac{13\pi}{12} = \cos\left(\frac{12\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

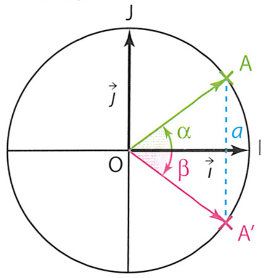
$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

→ Voir Exercices 62 à 63 p. 185

Cours

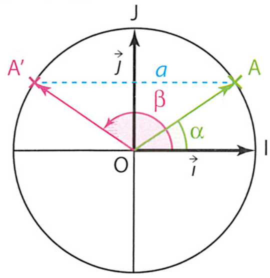
5 Équations trigonométriques

Équations de la forme $\cos x = a$
($a \in [-1\,;1]$)



Sur le cercle trigonométrique, il existe deux points A et A′ d'abscisse a ; ils sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Équations de la forme $\sin x = a$
($a \in [-1\,;1]$)



Sur le cercle trigonométrique, il existe deux points A et A′ d'ordonnée a ; ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété Si on note α une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et ß une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$ alors les équations **$\cos x = a$** et **$\sin x = a$** admettent dans $\mathbb{R}$ deux familles de solutions :
$x = a + k2\pi$ et $x = \beta + k2\pi$ où k est un entier relatif.

Remarque • Si l'équation à résoudre est $\cos x = a$ alors on peut prendre $ß = -\alpha$ et si l'équation à résoudre est $\sin x = a$ alors on peut prendre $\beta = \pi - \alpha$.

6 Fonctions trigonométriques

On s'intéresse aux deux fonctions trigonométriques définies sur $\mathbb{R}$:
cos : $x \mapsto \cos x$ et **sin** : $x \mapsto \sin x$.
On a vu dans le cours **3B** p. 176 que pour tout nombre réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Propriété Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions **périodiques** de période **2π**.

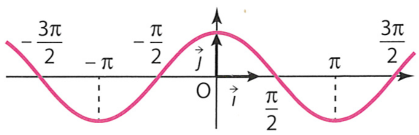
Conséquence graphique : dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
On a également vu dans le cours **4** que pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Propriétés La fonction **cosinus** est une fonction **paire**, la fonction **sinus** est une fonction **impaire**.

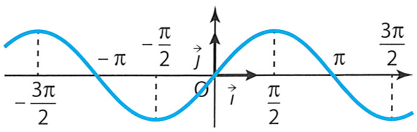
Conséquence graphique : dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de la fonction sinus est symétrique par rapport à O.

→ Voir Exercices résolus 7 et 8

Représentation graphique de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$



Représentation graphique de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$



Exercice résolu 7 — Résoudre des équations trigonométriques dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Méthode — Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations trigonométriques

1. On **place** sur le cercle trigonométrique les points A et A′ d'abscisse a si l'équation à résoudre est $\cos x = a$, ou d'ordonnée a si l'équation à résoudre est $\sin x = a$.
2. On **détermine** une mesure de chacun des angles orientés $(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$.
3. On **conclut** en donnant les deux familles de solutions.

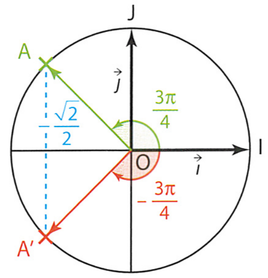
Solution

A et A′ sont les deux points du cercle trigonométrique d'abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$(\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ a pour mesure $\frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OA'})$ a pour mesure $-\frac{3\pi}{4}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$ est donc :

$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k2\pi \,;\, -\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right\}$; où k est un entier relatif.



→ Voir **Exercice 64** p. 185

Exercice résolu 8 — Résoudre des équations trigonométriques dans un intervalle I de $\mathbb{R}$

Déterminer parmi les solutions S de l'équation (E) de l'*Exercice résolu* **7** celles appartenant à $]0 \,;\, 3\pi]$.

Méthode — Pour résoudre des équations trigonométriques dans un intervalle I de $\mathbb{R}$

1. On **utilise** les deux familles de solutions de l'équation (voir ci-dessus).
2. On **détermine** parmi l'infinité de solutions de l'équation, celles qui appartiennent à l'intervalle donné.

Solution

L'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ est $S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k2\pi \,;\, -\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right\}$ où k est un entier relatif.

$0 < \frac{3\pi}{4} + k2\pi \leqslant 3\pi$ ssi $-\frac{3\pi}{4} < k2\pi \leqslant 3\pi - \frac{3\pi}{4}$

ssi $-\frac{3\pi}{4} < k2\pi \leqslant \frac{9\pi}{4}$

ssi $-\frac{3}{8} < k \leqslant \frac{9}{8}$

Or, les seuls entiers k appartenant à $\left]-\frac{3}{8} \,;\, \frac{9}{8}\right]$ sont 0 et 1.

On divise par 2π

$0 < -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \leqslant 3\pi$ ssi $\frac{3\pi}{4} < k2\pi \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4}$

ssi $\frac{3\pi}{4} < k2\pi \leqslant \frac{15\pi}{4}$

ssi $\frac{3}{8} < k \leqslant \frac{15}{8}$

Or, le seul entier k appartenant à $\left]\frac{3}{8} \,;\, \frac{15}{8}\right]$ est 1.

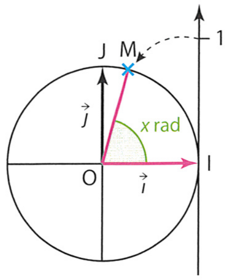
Les solutions de l'équation (E) dans l'intervalle $]0 \,;\, 3\pi]$ sont donc :

$x = \frac{3\pi}{4} + 0 \times 2\pi = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4} + 1 \times 2\pi = \frac{11\pi}{4}$ et $x = -\frac{3\pi}{4} + 1 \times 2\pi = \frac{5\pi}{4}$. Soit $S' = \left\{\frac{3\pi}{4} \,;\, \frac{5\pi}{4} \,;\, \frac{11\pi}{4}\right\}$.

→ Voir **Exercices 65 à 66** p. 185

L'essentiel

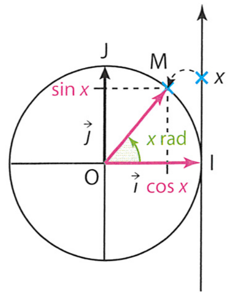
1 Une nouvelle unité de mesure d'angle : le radian



Si M est le point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel x ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) alors $\widehat{IOM}$ a pour mesure **x radians.**

π rad correspondent à 180°.

2 Cosinus et sinus d'angles orientés de vecteurs



x est une mesure en radians de **l'angle orienté** $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ ainsi que tout nombre réel de la forme $x + k2\pi$ où k est un entier relatif. Parmi toutes les mesures de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, la seule appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ est sa **mesure principale.**

Dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$: $M(\cos x\,;\sin x)$.

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\cos(x + k2\pi) = \cos x$ (k entier relatif) $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ (k entier relatif)

3 Angles associés

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

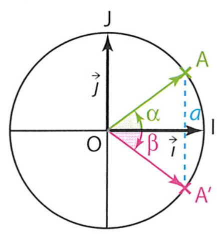
4 Équations trigonométriques

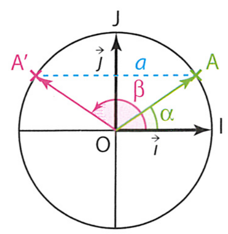
Les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ admettent dans $\mathbb{R}$ deux familles de solutions :

$x = \alpha + k2\pi$

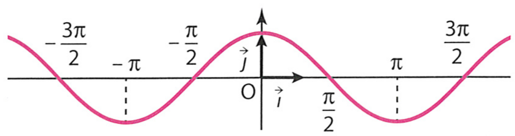
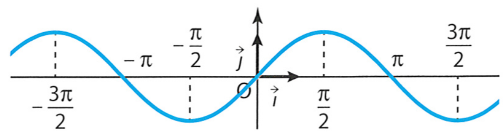
et $x = \beta + k2\pi$

où k est un entier relatif.





5 Fonctions trigonométriques

Fonction cosinus	Fonction sinus
Fonction définie sur $\mathbb{R}$, **paire** et **périodique** de période 2π	Fonction définie sur $\mathbb{R}$, **impaire** et **périodique** de période 2π
	
Courbe invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ et symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées.**	Courbe invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ et symétrique par rapport à **l'origine O du repère.**