7 Variables aléatoires

CAPACITÉS

- Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leqslant a\}$ où X désigne une variable aléatoire et calculer les probabilités correspondantes $P(X = a)$, $P(X \leqslant a)$.
- Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.
- Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p.

En se rendant à son lycée en scooter, un élève rencontre plusieurs feux sur son trajet. Chacun a une durée différente. Le premier feu reste vert 30 s, orange 5 s et rouge 25 s, le second feu reste vert 35 s, orange 5 s et rouge 20 s.

Vidéo
Découvrons la synchronisation des feux.
lienmini.fr/10333-36

Quelle est la probabilité que le feu soit vert lorsqu'il arrive au premier feu ? rouge lorsqu'il arrive au second ?

→ Pour le découvrir **Activité 3** p. 147

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash

Diaporama

20 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-37

1 Ensemble (univers) des issues. Événements, réunion, intersection, complémentaire

Lors d'une expérience aléatoire, l'ensemble des issues est appelé **univers**. On le note généralement Ω. Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.

Si A est un événement, l'événement **contraire** de l'événement A est noté $\bar{A}$. C'est l'ensemble des issues qui n'appartiennent pas à A.

Si A et B sont deux événements :

- $A \cap B$ est l'ensemble des issues qui appartiennent à A et à B. C'est l'**intersection** de A et B.
- $A \cup B$ est l'ensemble des issues qui appartiennent à A ou à B. C'est la **réunion** de A et B.

2 Loi (distribution) de probabilité. Probabilité d'un événement

Si A est un événement, sa probabilité notée $P(A)$ est la somme des probabilités des issues appartenant à A. On a : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de tirer l'As de cœur est :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{32}$	1
2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de tirer un As ou un Valet est :	$\frac{4}{32}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16}{32}$	1
3. On lance 2 dés, la probabilité d'avoir une somme égale à 7 est :	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{6}$	2
4. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. La probabilité d'avoir au moins une fois un côté pile est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	2
5. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. La probabilité d'avoir au plus une fois un côté pile est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	2
6. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cap B) = 0,15$.	$P(\bar{A}) = 0,55$ et $P(A \cup B) = 0,75$.	$P(\bar{A}) = 0,45$ et $P(A \cup B) = 0,6$.	$P(\bar{A}) = 0,55$ et $P(A \cup B) = 0,6$.	$P(\bar{A}) = 0,55$ et $P(A \cup B) = 6$.	2

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Jeux : tirage dans une urne

OBJECTIF Manipuler les notations $\{X = x_i\}$ et $\{X < x_i\}$ → Cours 1A et 1B p. 148


Une urne contient 3 boules vertes et 7 boules blanches indiscernables au toucher. On y tire n boules successivement avec remise.
X est la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes obtenues.

1. Dans cette question $n = 1$.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte ?

2. Dans cette question $n = 2$.
a. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte puis une boule blanche ?
Est-ce la même probabilité que d'obtenir une boule blanche puis une boule verte ?
b. Décrire cette situation par un arbre de probabilité.
c. Que représente l'événement « $X = 0$ » ? Quelle est sa probabilité ?
d. Calculer $P(X = 1)$ puis $P(X = 2)$.

3. Dans cette question $n = 10$.
En utilisant un tableur, on a obtenu :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,05631	0,18771	0,28157	0,25028	0,14600	0,05840	0,01622	0,00309	0,00039	0,00003	…

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules vertes ? au moins 6 boules vertes ? au moins une boule verte ?
b. Exprimer chacun des trois événements précédents à l'aide de la variable aléatoire X.
c. Quelle est la probabilité d'obtenir entre 3 et 6 boules vertes ?
On notera $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ cette probabilité.

2 On joue !

OBJECTIF Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète → Cours 1C p. 148

On considère un jeu pour lequel on lance 2 dés cubiques non truqués.
Si l'on obtient un double 6, on gagne 50 euros, sinon on perd 1 euro.
On note X la variable aléatoire donnant le gain en euros d'une partie.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?

2. Donner la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X.

3. On souhaiterait déterminer s'il est rentable de jouer à ce jeu, c'est-à-dire si, en jouant à ce jeu, on peut espérer gagner des euros et si oui, combien. Pour cela, on va calculer une moyenne en multipliant chacune des valeurs prises par X par la probabilité d'obtenir cette valeur.
Calculer cette valeur.

4. Que peut-on en conclure ?
Cette moyenne est appelée **espérance** de la variable aléatoire X.
On la note $\mathrm{E}(X)$.

5. Quel est le plus petit nombre de points que l'on peut perdre lorsque l'on ne réalise pas un double six pour lequel l'espérance $E(X)$ est négative ?

3 Y a pas le feu !

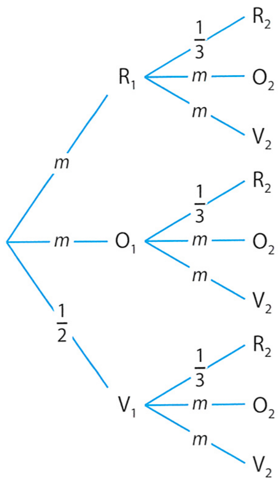
OBJECTIF Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes → Cours 2 p. 150

Pour aller au lycée, Pierre emprunte en scooter un parcours qui comporte 2 feux tricolores. Le premier feu reste vert 30 s, orange 5 s et rouge 25 s, le second feu reste vert 35 s, orange 5 s et rouge 20 s. On suppose que les fonctionnements des deux feux sont indépendants et que la probabilité de rencontrer un feu d'une certaine couleur est proportionnelle au temps durant lequel il reste allumé.

1. Déterminer la probabilité de l'événement V_1 : « le 1er feu est vert » lorsque Pierre arrive.

2. Déterminer la probabilité de l'événement R_2 « le 2e feu est rouge » lorsque Pierre arrive.

3. On représente cette situation par un arbre de probabilités sur lequel figurent toutes les issues possibles pour le premier feu V_1, O_1 et R_1 puis celles pour le second feu V_2, O_2 et R_2. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre. Sur chacune des branches, on fera figurer la probabilité m de l'événement concerné.



4. Soit l'événement noté V « Pierre rencontre les deux feux au vert ».

a. Écrire, avec les notations figurant dans l'arbre, l'événement V.

b. Pour calculer la probabilité de l'événement V, on applique le « principe multiplicatif » vu au chapitre précédent. Déterminer $P(\mathrm{V})$.

c. Calculer la probabilité que Pierre s'arrête une fois exactement (on considère que lorsque le feu est orange Pierre s'arrête) de deux façons différentes.

d. Calculer la probabilité que Pierre s'arrête au moins une fois.

4 Contrôle qualité dans une usine

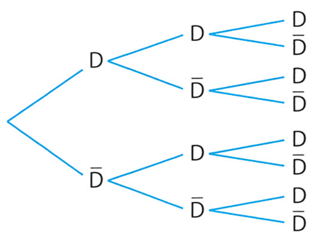
STI2D INGÉNIERIE

OBJECTIF Utiliser un arbre de probabilité pour la répétition d'épreuves de Bernoulli → Cours 4 p. 152

Une entreprise fabrique des cartes électroniques.
1 % des cartes produites sur une période d'un mois présentent un défaut. On choisit au hasard une carte électronique et on note D l'événement : « la carte électronique choisie présente un défaut ». Ainsi $P(\mathrm{D}) = 0,01$.
Le responsable du service qualité de l'entreprise prélève au hasard trois cartes électroniques dans la production mensuelle de l'entreprise. On suppose que les prélèvements sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces présentant un défaut parmi les trois cartes prélevées.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. À l'aide de l'arbre ci-contre, déterminer toutes les issues possibles de ce tirage.



3. Sur chaque branche de l'arbre, on note la probabilité de l'événement correspondant. On admet (principe multiplicatif) que la probabilité d'un événement est égale au produit des probabilités figurant sur les branches de l'arbre.
Donner les probabilités des événements $(\mathrm{D}, \mathrm{D}, \overline{\mathrm{D}})$, $(\overline{\mathrm{D}}, \mathrm{D}, \mathrm{D})$ et $(\mathrm{D}, \overline{\mathrm{D}}, \mathrm{D})$.
En déduire la probabilité de choisir deux cartes électroniques présentant un défaut.
On note cet événement $X = 2$.

4. Calculer $P(X = 1)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 0)$.

5. Calculer la probabilité de choisir au moins une carte présentant un défaut.

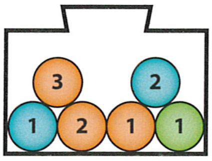
Cours

1 Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance

A Variable aléatoire discrète

Définition Ω désigne l'univers d'une expérience aléatoire ; on a défini une loi de probabilité sur cet univers. On définit une **variable aléatoire** sur Ω lorsque l'on associe un nombre réel à chaque issue.

Exemple 1 • On choisit une boule de l'urne ci-contre et on lui associe le nombre inscrit sur la boule. On définit ainsi une variable aléatoire X qui prend les valeurs : 1, 2 et 3.



On notera $\{X = x_i\}$ l'événement « la valeur x_i est obtenue » et $\{X < x_i\}$ l'événement « toutes les valeurs strictement inférieures à x_i sont obtenues ».

Exemple 2 • Lors du tirage d'une boule dans l'urne ci-contre, l'événement $\{X = 2\}$ est obtenu quand on tire la boule orange numérotée 2 ou la boule bleue numérotée 2. L'événement $\{X < 3\}$ est obtenu lorsque l'on tire soit l'une des deux boules bleues soit la boule verte soit la boule orange numérotée 2.

B Loi de probabilité

Définition Si $x_1, \ldots, x_n$ désignent les valeurs prises par X, on note $X = x_i$ les issues pour lesquelles X prend la valeur x_i. On note $P(X = x_i)$ la probabilité de cet événement.
La **loi de probabilité** de X est donnée par les x_i et $P(X = x_i)$ (i allant de 1 à n).

On présente généralement la loi de probabilité par un tableau :

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	x_1	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n
Probabilité associée $P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$\ldots$	$P(X = x_i)$	$\ldots$	$P(X = x_n)$

Remarque • La somme des probabilités doit toujours être égale à 1.

Exemple • Dans le cas précédent du tirage d'une boule dans l'urne, on obtient : $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ car il y a 3 boules numérotées « 1 » parmi les 6 boules figurant dans l'urne. $P(X = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(X = 3) = \frac{1}{6}$.

Remarque • Dans le cas du tirage d'une boule dans l'urne précédente, on a : $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

→ Voir Exercice résolu 1

C Espérance

Définition L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre $E(X)$:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_i p_i + \ldots + x_n p_n$$

Remarque • L'espérance est la moyenne pondérée des valeurs prises X.

Exemple • Avec la situation ci-dessus : $E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{5}{3}$.

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Déterminer une loi de probabilité

Lors d'une loterie, on propose des tickets. Sur les 100 tickets vendus : un seul ticket permet de gagner 50 euros, 10 rapportent 20 euros et 20 rapportent 10 euros, les autres sont perdants. Les tickets sont vendus au prix de 2 euros. Soit X la variable aléatoire qui donne le montant du gain pour l'achat d'un ticket.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Méthode — Pour déterminer une loi de probabilité

1. On **détermine** toutes les valeurs prises par la variable aléatoire.
2. On **dresse** un tableau du type :

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	…	…	…	…
Probabilité associée $P(X = x_i)$				

3. On **vérifie** que la somme des probabilités est égale à 1.

Solution

Les tickets gagnants peuvent rapporter les sommes de 50, 20 et 10 euros mais l'achat d'un ticket coûte 2 euros.
Les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X sont donc : 48, 18, 8 et -2.
On est dans un cas d'équiprobabilité. On a donc :
$P(X=48)=\frac{1}{100}$; $P(X=18)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$;
$P(X=8)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ et $P(X=-2)=\frac{69}{100}$.

D'où la loi de probabilité associée à X :

x_i	-2	8	18	48
$P(X=x_i)$	$\frac{69}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

On vérifie que la somme des probabilités est bien égale à 1 :
$\frac{69}{100}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}=1.$

→ Voir Exercice 27 p. 157

Exercice résolu 2 — Calculer et interpréter une espérance

Soit la loi de probabilité suivante associée à un gain X d'un jeu coûtant 2 € :

x_i	-2	8	18	48
$P(X=x_i)$	$\frac{69}{100}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$

Calculer et interpréter l'espérance de la variable aléatoire X.

Méthode — Pour calculer et interpréter une espérance

1. On **calcule** le nombre :
$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_ip_i + \ldots + x_np_n$.
2. On **interprète** l'espérance comme la moyenne pondérée par les probabilités des valeurs prises par la variable aléatoire.

Solution

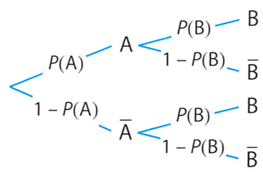
$$E(X)=(-2)\times\frac{69}{100}+8\times\frac{1}{5}+18\times\frac{1}{10}+48\times\frac{1}{100}=-\frac{69}{50}+\frac{8}{5}+\frac{18}{10}+\frac{48}{100}=-\frac{138}{100}+\frac{160}{100}+\frac{180}{100}+\frac{48}{100}=\frac{250}{100}=2{,}50$$

En moyenne, un joueur gagne 2,50 euros lorsqu'il participe à ce jeu.
Remarque : en théorie des jeux, une espérance nulle correspond à un jeu équitable.

→ Voir Exercice 27 p. 157

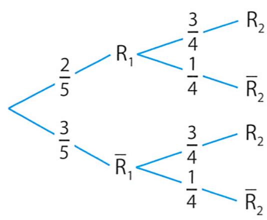
2 Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes

On se place dans le cas de deux expériences aléatoires à deux issues qui se produisent l'une après l'autre de façon indépendante (c'est-à-dire que le résultat de la 2e épreuve ne dépend pas de ce qui s'est passé lors de la 1re épreuve).



On peut alors représenter la situation par un arbre de probabilité où **A** et $\overline{\mathbf{A}}$ sont les issues de la 1re expérience et **B** et $\overline{\mathbf{B}}$ les issues de la 2e expérience.
On a alors quatre issues possibles que l'on peut noter :
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}$, $\overline{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B}$ et $\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$.
Pour calculer les probabilités correspondantes, on effectue le produit des deux probabilités figurant sur les branches du chemin correspondant dans l'arbre :
$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = P(\mathbf{A}) \times P(\mathbf{B})$.
On peut ainsi déterminer la probabilité associée à différents chemins.

Exemple • On dispose de deux urnes. À l'intérieur de la 1re, on dépose deux boules rouges et trois boules vertes. À l'intérieur de la 2e, on dépose trois boules rouges et une boule verte.
On tire une boule dans la 1re urne puis une boule dans la 2e.
On peut représenter cette situation par un arbre de probabilités.



On appelle $\mathbf{R}_1$ l'événement « tirer une boule rouge dans la première urne » et $\mathbf{R}_2$ l'événement « tirer une boule rouge dans la deuxième urne ».

- Ainsi la probabilité d'obtenir deux boules rouges est égale à :
$P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) = P(\mathrm{R}_1) \times P(\mathrm{R}_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$.
- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte est égale à :
$P(\mathrm{R}_1 \cap \overline{\mathrm{R}}_2) = P(\mathrm{R}_1) \times P(\overline{\mathrm{R}}_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$.
- La probabilité d'obtenir une boule verte puis une boule rouge est égale à :
$P(\overline{\mathrm{R}}_1 \cap \mathrm{R}_2) = P(\overline{\mathrm{R}}_1) \times P(\mathrm{R}_2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$.
- La probabilité d'obtenir deux boules vertes est égale à :
$P(\overline{\mathrm{R}}_1 \cap \overline{\mathrm{R}}_2) = P(\overline{\mathrm{R}}_1) \times P(\overline{\mathrm{R}}_2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$.

→ Voir Exercice résolu 3

3 Loi de Bernoulli

A Épreuve de Bernoulli

Définition Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une **expérience aléatoire** n'ayant que **deux issues**. On définit une variable aléatoire X qui prend la valeur 0 pour l'une des issues et 1 pour l'autre.
On pose : $\mathbf{p = P(X = 0)}$ et $\mathbf{1 - p = P(X = 1)}$.

Exemple • Une joueuse professionnelle réussit son service dans 90 % des cas.
On peut associer à cette situation une épreuve de Bernoulli. Les issues sont :
- « réussir son premier service » de probabilité $p = 0{,}9$;
- « rater son premier service » de probabilité $1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Étudier une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

Une association décide d'éditer des tickets de loterie pour récolter des fonds dans un but caritatif.
Les tickets comportent une partie à gratter et un numéro qui servira pour le tirage au sort.
36 % des tickets sont gagnants au grattage. L'association décide par ailleurs que sur les 500 tickets en vente, 45 seront gagnants lors du tirage au sort.

1. On admet que cette situation peut être modélisée par une succession de deux épreuves indépendantes et représenter l'arbre de probabilités correspondant à cette situation.

2. Calculer les probabilités des événements associés aux différents chemins.

Méthode — Pour étudier une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

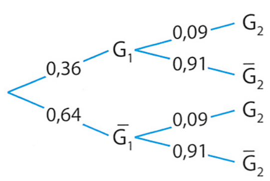
❶ On **identifie** bien les deux épreuves qui se succèdent.

❷ On **construit** un arbre sur lequel on fait figurer les probabilités correspondant à chacune des branches.

❸ Pour **calculer** les probabilités des événements associés aux différents chemins, on **multiplie** les probabilités figurant sur les branches de ce chemin.

Solution

1. L'achat d'un ticket permet de participer à deux expériences aléatoires : le grattage du ticket et le tirage au sort selon le numéro figurant sur le ticket. Ces deux événements sont indépendants (le résultat du grattage n'influence pas le résultat du tirage).
Si on note G_1 l'événement « le ticket est gagnant au grattage » et G_2 « le ticket est gagnant au tirage », la situation peut être représentée par l'arbre ci-contre.



2. $P(G_1 \cap G_2) = 0,36 \times 0,09 = 0,0324$ $\quad P(G_1 \cap \overline{G_2}) = 0,36 \times 0,91 = 0,3276$

$P(\overline{G_1} \cap G_2) = 0,64 \times 0,09 = 0,0576$ $\quad P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = 0,64 \times 0,91 = 0,5824$

→ Voir Exercices 29 et 30 p. 157

Exercice résolu 4 — Représenter une épreuve de Bernoulli

Dans une urne sont disposées des billes indiscernables au toucher. On compte 10 billes vertes et 5 billes blanches. Un joueur tire au hasard l'une des billes. Il gagne s'il tire une bille blanche.

1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une épreuve de Bernoulli.

2. Quelle est la probabilité de l'événement « le joueur gagne » ?

3. Quelle est la probabilité de l'événement « le joueur perd » ?

4. Représenter la situation par un arbre de probabilités.

Méthode — Pour représenter une épreuve de Bernoulli

❶ On **vérifie** que l'expérience aléatoire n'a que deux issues.

❷ On **identifie** l'événement concerné et son événement contraire ainsi que leur probabilité.

❸ On **vérifie** que la somme des probabilités des deux issues vaut 1.

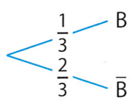
Solution

1. Cette épreuve aléatoire a deux issues : « tirer une boule blanche » notée B et « tirer une boule verte », qui est l'événement contraire de B noté $\overline{B}$. Cette situation est modélisée par une épreuve de Bernoulli.

2. $P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

3. $P(\overline{B}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. On retrouve bien : $P(B) + P(\overline{B}) = 1$.

4. La situation peut être représentée par l'arbre ci-contre.



→ Voir Exercice 34 p. 158

B Loi de Bernoulli

DÉFINITION La loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli est nommée **loi de Bernoulli de paramètre p**.
Elle est donnée par le tableau :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

PROPRIÉTÉ Son **espérance** est $E(X) = p$.

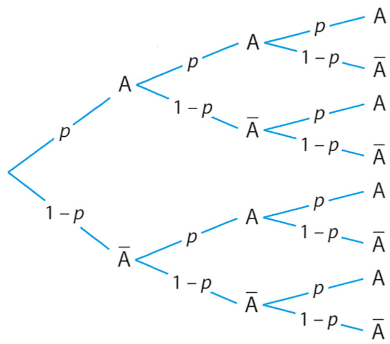
→ Voir **Exercice résolu 5**

Histoire des maths

Jacques Bernoulli est un mathématicien suisse qui a écrit l'*Ars Conjectandi* (parution en 1713, 8 ans après sa mort).
Il y aborde en particulier ces problèmes de probabilité :
« venons au dé à 6 faces, et supposons qu'il faille amener 4 as en jouant 7 coups avec un dé (…) on trouvera que le pour est au contre (…) comme 4 375 est à 27 5561 »
(1re partie chapitre 3).

4 Répétition d'épreuves aléatoires de Bernoulli

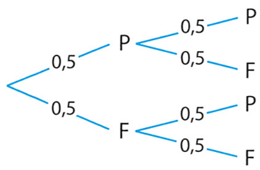
Lorsque l'on répète de **façon identique et indépendante des épreuves de Bernoulli**, on peut modéliser la situation par un arbre de probabilités.



On donne ci-contre trois répétitions de l'épreuve de Bernoulli.
Pour calculer la probabilité d'obtenir, par exemple, 2 fois **A** et donc 1 fois $\mathbf{\bar{A}}$, on repère les chemins dans l'arbre.
Ici, il y en a 3 correspondants aux événements $(\mathbf{AA\bar{A}}), (\mathbf{A\bar{A}A})$ et $(\mathbf{\bar{A}AA})$.

On calcule ensuite la probabilité associée par exemple à l'événement $(\mathbf{AA\bar{A}})$ en appliquant le principe multiplicatif : $P(\mathbf{AA\bar{A}}) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p} \times (\mathbf{1} - \boldsymbol{p})$, puis on multiplie cette probabilité par 3 puisque trois chemins conduisent à l'événement : « 2 fois **A** et donc 1 fois $\mathbf{\bar{A}}$ ».

EXEMPLE • On lance deux fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée.
On peut représenter cette situation par un arbre.
On note P l'événement « la pièce tombe sur pile » et F l'événement « la pièce tombe sur face. »



On a ainsi 50 % des premiers lancers qui amènent un « pile » puis, sur ces 50 %, de nouveau 50 % des 2e lancers qui amènent un « pile » soit au total 0,25 % des résultats finaux qui donnent deux « pile » sur les deux lancers.

Si on appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de faces « pile » obtenues à l'issue des deux lancers, la loi de probabilité associée est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

→ Voir **Exercice résolu 6**

Exercice résolu 5 Déterminer une loi de Bernoulli

Lors d'une loterie, on fait tourner une grande roue découpée en deux secteurs : un secteur vert, de 120°, et un secteur rouge, de 240°.
On associe 1 à l'événement « la roue s'arrête de tourner sur le secteur vert » et 0 à l'événement « la roue s'arrête de tourner sur le secteur rouge ».
Justifier que cette expérience est une épreuve de Bernoulli. En déterminer le paramètre et la loi de probabilité associée.
Donner l'espérance de cette loi.

Méthode **Pour déterminer une loi de Bernoulli**

1. Après avoir reconnu que c'est une épreuve de Bernoulli, on **repère** l'événement auquel on associera la valeur 1 de la variable aléatoire puis son événement contraire, auquel on associera la valeur 0.
2. On **détermine** ensuite la probabilité de l'événement associé à la valeur 1.
3. On **détermine** la probabilité de l'événement contraire et on complète le tableau.

Solution

L'expérience aléatoire a deux issues : « la roue s'arrête de tourner sur le secteur vert » et « la roue s'arrête de tourner sur le secteur rouge ». C'est donc une épreuve de Bernoulli.
Son paramètre est la probabilité que la roue s'arrête sur le secteur vert, soit $p = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$.

La loi de probabilité correspondante est :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

→ Voir Exercices 32 et 33 p. 157

Exercice résolu 6 Répétition d'épreuves de Bernoulli

Lors d'un entraînement au service, une joueuse de tennis réalise trois services. Elle réussit 9 fois sur 10 son service.
Calculer la probabilité qu'elle réussisse deux services sur les trois.

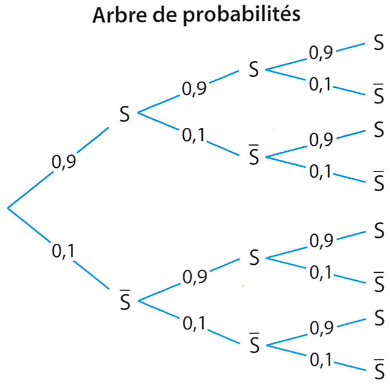
Méthode **Pour déterminer une probabilité dans le cas de répétition d'épreuves de Bernoulli**

1. On **repère** le nombre de chemins correspondant à deux services réussis.
2. On **calcule** la probabilité de l'issue correspondant à l'un de ces chemins.
3. On **multiplie** la probabilité obtenue par le nombre de chemins correspondant à l'issue.

Solution

On réalise l'arbre de probabilités correspondant. On répète trois fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli.
On note S l'événement « le service est réussi ». Sur l'arbre construit, on repère ensuite les chemins qui correspondent à deux services réussis.
La probabilité d'un événement correspondant à un chemin sur un arbre est donnée par le produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

Arbre de probabilités



Issues	Probabilités	Nombre de succès
(SSS)	$0{,}9^3$	3
$(SS\overline{S})$	$0{,}9^2 \times 0{,}1^1$	2
$(S\overline{S}S)$	$0{,}9^2 \times 0{,}1^1$	2
$(S\overline{S}\overline{S})$	$0{,}9^1 \times 0{,}1^2$	1
$(\overline{S}SS)$	$0{,}9^2 \times 0{,}1^1$	2
$(\overline{S}S\overline{S})$	$0{,}9^1 \times 0{,}1^2$	1
$(\overline{S}\overline{S}S)$	$0{,}9^1 \times 0{,}1^2$	1
$(\overline{S}\overline{S}\overline{S})$	$0{,}1^3$	0

Ainsi $P(SS\overline{S}) = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 0{,}081$. L'événement « obtenir deux succès » correspond à trois chemins.
$p = 0{,}9 \times 0{,}9 \times 0{,}1 + 0{,}9 \times 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}9 \times 0{,}9 = 3 \times 0{,}92 \times 0{,}11 = 0{,}243$.

→ Voir Exercices 41 et 42 p. 158

L'essentiel

1 Variable aléatoire discrète : loi de probabilité, espérance

Lors d'une expérience aléatoire, on obtient un ensemble d'issues. Lorsque, à chacune de ces issues, on associe un nombre réel, on crée une **variable aléatoire**.

Si, à chaque valeur prise par la variable aléatoire, on associe la probabilité que la variable aléatoire prenne cette valeur, on crée la **loi de probabilité** associée à la variable aléatoire.

On présente généralement la loi de probabilité par un tableau :

Valeurs prises par la variable aléatoire X : x_i	…	…	…	…	…	…	…	…	…
Probabilité associée $P(X = x_i)$									

On peut alors calculer **l'espérance** de la variable aléatoire notée $E(X)$:

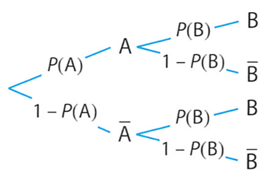
$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_ip_i + \ldots + x_np_n.$$

C'est la moyenne pondérée des valeurs prises par la variable aléatoire X, c'est donc la valeur à laquelle on peut s'attendre lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

2 Expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

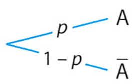
On représente la situation par un **arbre de probabilités**.

Pour calculer les probabilités correspondantes, on effectue le produit des deux probabilités figurant sur les branches du chemin parcouru dans l'arbre : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.



3 Loi de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli de paramètre p : expérience aléatoire qui possède exactement deux issues A et $\bar{A}$ de probabilité p et $1 - p$.
On le représente par un arbre.



Loi de Bernoulli de paramètre p : la loi de probabilité de X, variable aléatoire à valeurs dans $\{0 ; 1\}$, est une loi de Bernoulli.

Si $P(X = 1) = p$ on dit que son **paramètre** est p.

La loi est alors donnée par le tableau :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Son espérance est $E(X) = p$.

4 Répétition d'épreuves aléatoires de Bernoulli

Lorsque l'on répète de **façon identique et indépendante** des **épreuves de Bernoulli**, on modélise la situation par un arbre de probabilités.

On repère ensuite les chemins conduisant à l'événement dont on recherche la probabilité.

On calcule la probabilité correspondant à un chemin puis on la multiplie par le nombre de chemins.