6 Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

CAPACITÉS

- Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales.
- Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.

Estelle Mossely, première championne olympique de l'histoire de la boxe française dans la catégorie des moins de 60 kg aux jeux de Rio.

Aux Jeux olympiques de Rio, en 2016, il y eut 947 médaillés, toutes disciplines confondues. Si on donne le nombre d'hommes et de femmes pour chaque type de médailles : or, bronze et argent, on dit que l'on a « croisé » les données.

Site
Découvrons le tableau dynamique sur Rio 2016
lienmini.fr/10333-28

Quelle est la part des femmes médaillées en or parmi tous les médaillés ?

→ Pour le découvrir **Activité 1** p. 124

Pour retrouver les automatismes

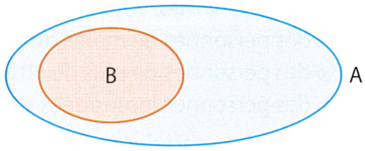
Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash
Diaporama
30 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10333-29

1 Proportions

Soit A un ensemble appelé population, ayant un nombre a d'éléments (a nombre entier non nul) et B une partie de l'ensemble A, appelée une sous-population, ayant un nombre b (nombre entier) d'éléments.

La proportion de B par rapport à A est le nombre réel $\frac{b}{a}$. Ce nombre peut aussi s'exprimer sous forme d'un pourcentage.



2 Calcul de probabilité dans une situation d'équiprobabilité

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A notée $P(A)$ est :

$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

où $A \cup B$ désigne la réunion de A et B et $A \cap B$ l'intersection de A et B.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. Dans une classe de 32 élèves, 8 élèves étudient l'italien. La proportion des élèves étudiant l'italien est :	8 %	75 %	0,25	0,05	1
2. 9 % des 800 élèves d'un lycée sont en 1re STMG. Combien sont-ils ?	72	720	9	80	1
3. La consultation chez le médecin traitant coûte 25 euros. La Sécurité sociale rembourse 70 % de cette somme. Quelle somme reste à la charge du patient ?	16,10 €	2,80 €	10 €	7,50 €	1
4. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de tirer l'As de cœur est :	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{32}$	2
5. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. La probabilité de tirer un As ou un Valet est :	$\frac{4}{32}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{16}{32}$	2
6. On lance 2 dés. La probabilité d'avoir une somme égale à 7 est :	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{6}$	2
7. On lance 2 fois de suite une pièce de monnaie. La probabilité d'avoir au moins une fois un côté pile est :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	2

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Tri sélectif

ENVIRONNEMENT

OBJECTIF Calculer des proportions de proportions → Cours 1C p. 126

Dans le cadre d'une campagne de sensibilisation sur le tri des ordures ménagères, une enquête a été menée auprès de 400 personnes d'une ville, réparties de la manière suivante :
25 % ont moins de 35 ans, 40 % ont entre 35 et 50 ans.
À la question : « Triez-vous le verre et le papier ? »,
80 % des personnes de moins de 35 ans ont répondu « oui »,
30 % des personnes de plus de 50 ans ont répondu « oui »,
35 % des personnes interrogées entre 35 et 50 ans ont répondu « oui ».

1. Quelle est la part des moins de 35 ans ayant répondu « oui » sur l'ensemble de la population ? Quelle relation lie les différentes proportions ?

2. Quelle est la part des plus de 50 ans ayant répondu « oui » sur l'ensemble de la population ?

3. Quelle est la tranche d'âge qui trie le plus ses déchets en nombre d'habitants ?

2 Les médaillés de Rio 2016

OBJECTIF Découvrir/calculer les fréquences conditionnelles → Cours 2B et 2C p. 128

Aux Jeux olympiques de Rio 2016, on a répertorié les médaillés hommes et femmes dans un tableau :

	Hommes	Femmes	Total
Or	161	137	298
Argent	163	135	298
Bronze	194	157	351
Total	518	429	947

On s'intéresse à la population de ces médaillés. On considère des parties de cette population : H pour les Hommes, F pour les Femmes, M_1, M_2, M_3 pour les médaillés d'or, d'argent et de bronze.

1. a. On note $F \cap M_1$ l'ensemble des femmes médaillées d'or et $\text{card}(F \cap M_1)$ le nombre d'éléments de cet ensemble (card est l'abréviation de « cardinal »). Déterminer $\text{card}(F \cap M_1)$.
b. Déterminer : $\text{card}(M_3 \cap H)$, $\text{card}(H)$, $\text{card}(M_3)$.

2. a. Quelle est la part (ou fréquence) des femmes médaillées de bronze parmi tous les médaillés ? On la note $f(F \cap M_3)$.
b. Donner $f(H \cap M_1)$, $f(M_2 \cap H)$, $f(H)$, $f(M_3)$.

3. On change maintenant d'ensemble de référence. Quelle est la part des médaillées d'or parmi les femmes ?
Cette fréquence est appelée **fréquence conditionnelle**. On la note $f_F(M_1)$. En indice, on note l'ensemble de référence et dans la parenthèse la population étudiée.

On a : $f_F(E_1) = \dfrac{\text{card}(F \cap E_1)}{\text{card}(F)}$. Calculer $f_{M_1}(H)$, $f_H(M_1)$, $f_{M_3}(F)$.

3 Tests en laboratoire

STL Biologie

OBJECTIF Calculer les fréquences conditionnelles → Cours 2C p. 128

Le Chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées. Dans une île, on estime que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Un test a été mis au point pour son dépistage ; on sait que :

– la probabilité qu'une personne soit atteinte par le virus et ait un test positif est de 0,147 ;

– la probabilité qu'une personne soit non atteinte par le virus et ait un test positif est de 0,0085.

Un individu est choisi au hasard dans la population de cette île.

On appelle :

M l'événement : « l'individu choisi est atteint du Chikungunya »,

T l'événement : « le test de l'individu choisi est positif ».

①	M	$\overline{M}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			1

②	M	$\overline{M}$	Total
T	cellule 1		1
$\overline{T}$			1
Total	1	1	1

1. Reproduire et compléter le tableau ① ; on remarquera ici que les probabilités des événements sont données par les fréquences.

2. Reproduire et compléter le tableau ② (fréquences conditionnelles par colonnes).

Aide : la cellule 1 contient la fréquence conditionnelle $f_T(M) = \dfrac{\text{card}(T \cap M)}{\text{card}(T)}$.

3. On observe que $f_T(M) \approx \ldots$ Que peut-on penser de ce test ?

4 Commun ou individuel ?

STMG Ressources humaines

OBJECTIF Découvrir/calculer les probabilités conditionnelles → Cours 3 p. 130

120 employés d'une entreprise, hommes et femmes, ont été interrogés sur leur moyen de locomotion pour venir travailler.

Les résultats de l'enquête sont présentés dans le tableau ci-contre.

On choisit un employé au hasard dans l'entreprise.

	H	F	Total
Transports en commun	10	20	30
Transport individuel	60	30	90
Total	70	50	120

1. On note F l'événement « la personne choisie est une femme » et C l'événement « la personne choisie utilise les transports en commun ». Donner $P(F)$, $P(C)$, $P(F \cap C)$.

2. a. Reproduire et compléter le tableau des fréquences conditionnelles par colonnes :

	H	F
Transports en commun	…	…
Transport individuel	…	…
Total	1	1

b. Donner la fréquence conditionnelle $f_F(C)$.

c. La personne choisie est une femme. On cherche la probabilité qu'elle utilise les transports en commun. Cette probabilité est appelée **probabilité conditionnelle** : c'est la probabilité que la personne utilise les transports en commun sachant que c'est une femme. On la note $P_F(C)$. Vérifier que :

$P_F(C) = \dfrac{\text{card}(F \cap C)}{\text{card}(F)}$.

3. a. Reproduire et compléter le tableau ci-contre :

	H	F	Total
Transports en commun	…	…	…
Transport individuel	…	…	…

b. En déduire la probabilité que la personne choisie soit un homme sachant qu'elle utilise les transports en commun.

c. On note I l'événement « la personne choisie utilise un transport individuel ». Déterminer $P_I(F)$.

Cours

1 Proportion

A Définition

DÉFINITION Soit une population de référence E et A une sous-population de E. La **proportion** de A dans E est le nombre réel $\frac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A et n_E l'effectif de E.

Vocabulaire

La **proportion** est aussi appelée la **fréquence**.

EXEMPLE • En 2018, il y a 2,2 milliards d'utilisateurs actifs dans le monde de Facebook dont 33 millions d'utilisateurs en France. La proportion des utilisateurs français de Facebook est : $p = \frac{33\,000\,000}{2\,200\,000\,000} = 0{,}015 = \frac{1{,}5}{100} = 1{,}5\,\%$.

REMARQUE • Comme $0 \leqslant n_A \leqslant n_E$, une proportion est un nombre réel compris entre 0 et 1.

→ Voir Exercice résolu 1

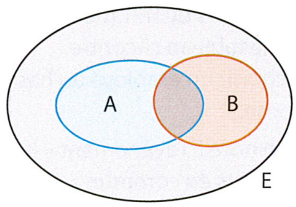
B Union et intersection

Dans cette partie, A et B sont deux sous-populations d'une population E.

DÉFINITIONS

- **L'intersection** $A \cap B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à la fois à A et à B.
- **L'union** $A \cup B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à A ou à B, c'est-à-dire ceux qui sont soit dans A, soit dans B, soit dans les deux.
- Lorsque A et B n'ont **aucun élément commun**, on dit qu'ils sont **disjoints**. On note $A \cap B = \varnothing$ où $\varnothing$ est l'ensemble vide.

PROPRIÉTÉ Soit $f(A)$, $f(B)$, et $f(A \cap B)$ les fréquences (ou proportions) respectives de A, B et de $A \cap B$ dans E. La proportion $f(A \cup B)$ de $A \cup B$ est donnée par : $\boldsymbol{f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)}$.

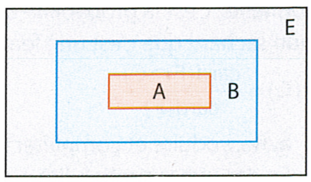


→ Voir Exercice résolu 2

C Inclusion

DÉFINITION Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent à un ensemble B, on dit que A est **inclus** dans B. On note $\boldsymbol{A \subset B}$.

PROPRIÉTÉ Soit A et B des sous-populations de E telles que $A \subset B$ et $B \subset E$. Si f_1 est la proportion de A dans B et f_2 la proportion de B dans E, alors la proportion de A dans E est : $\boldsymbol{f = f_1 \times f_2}$.



DÉMONSTRATION • Avec des notations évidentes, $f_1 = \frac{n_A}{n_B}$ et $f_2 = \frac{n_B}{n_E}$ ainsi $f_1 \times f_2 = \frac{n_A}{n_B} \times \frac{n_B}{n_E} = \frac{n_A}{n_E} = f$.

Exercice résolu 1 Calculer un effectif connaissant une proportion

Peugeot produit des voitures particulières et des utilitaires. En 2017, Peugeot a vendu 1,87 million de voitures particulières dans le monde, ce qui représente un peu plus de 85,7 % des véhicules écoulés par cette entreprise.
Calculer le nombre total de véhicules vendus par cette marque en 2017.

Méthode Pour calculer un effectif connaissant une proportion

1. On **identifie** la population de référence et la sous-population et on repère l'effectif connu.
2. On **remplace** dans la formule $f = \frac{n_A}{n_E}$ les quantités connues par leurs valeurs et on **résout** l'équation obtenue à l'aide d'un produit en croix.

Solution

La population E de référence est l'ensemble des voitures écoulées par Peugeot en 2018. Son effectif est n_E.
La sous-population A est l'ensemble des voitures particulières vendues par Peugeot en 2018.
Son effectif est $n_A = 1\,870\,000$.

On a donc : $f = \frac{n_A}{n_E}$ donc $\frac{85{,}7}{100} = \frac{1\,870\,000}{n_E}$.
Par conséquent : $85{,}7 \times n_E = 100 \times 1\,870\,000$.
Donc : $n_E = \frac{1\,870\,000 \times 100}{85{,}75} \approx 2\,182\,030$.

→ Voir Exercices 12 à 18 p. 134

Exercice résolu 2 Calculer une proportion d'une réunion

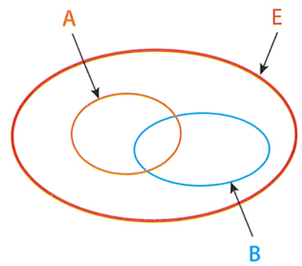
Dans un club de sport, 22,5 % des adhérents font de l'escalade, 17 % font de la natation et 5,8 % des adhérents pratiquent les deux sports.
Déterminer la part des adhérents qui pratiquent l'escalade ou la natation.

Méthode Pour calculer une proportion d'une réunion

1. On **identifie** la population de référence et les deux sous-populations.
2. On **représente** la situation par un schéma.
3. On **repère** les proportions connues.
4. On **utilise** la propriété.

Solution

E est l'ensemble des adhérents à ce club de sport.
A est la sous-population composée des adhérents pratiquant l'escalade.
On a : $f(A) = \frac{22{,}5}{100}$.
B est la sous-population composée des adhérents pratiquant la natation.
On a : $f(B) = \frac{17}{100}$.
$A \cap B$ représente l'ensemble des adhérents pratiquant à la fois l'escalade et la natation.
$f(A \cap B) = \frac{5{,}8}{100}$. Or $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.
Donc $f(A \cup B) = \frac{22{,}5}{100} + \frac{17}{100} - \frac{5{,}8}{100} = 0{,}337$.
33,7 % des adhérents pratiquent l'escalade ou la natation.



→ Voir Exercices 19 à 21 p. 134

Cours

2 Tableaux croisés

A Définition

On s'intéresse à deux caractères d'une population, par exemple le nombre d'admis au diplôme national du Brevet en série générale en fonction du sexe du candidat. On peut alors les représenter à l'aide d'un tableau croisé.

	Admis	Recalés	Total
Garçons	317 779	47 905	365 684
Filles	346 187	27 262	373 449
Total	663 966	75 167	739 133

Exemple • Réussite au DNB (série générale) selon le sexe.
346 187 filles ont ainsi obtenu le DNB en série générale.
Les deux colonne et ligne nommées « Total » sont appelées les **marges** du tableau.

→ Voir Exercice résolu 3

B Fréquences marginales

On divise chaque case du tableau par l'effectif total : on obtient ainsi dans les marges les fréquences dites **marginales**.

	A (Admis)	R (Recalés)	Total
G (Garçons)	0,4299	0,0648	0,4947
F (Filles)	0,4684	0,0369	0,5053
Total	0,8983	0,1017	1

Exemple • La proportion des élèves qui sont des garçons et qui ont eu le DNB est 0,4299 ou 42,99 %. On note $f(G \cap A)$ cette fréquence.

Remarque • La somme des valeurs contenues dans les marges est égale à 1 (ou 100 %) (attention lorsqu'il y a des arrondis à faire).

C Fréquences conditionnelles

Par lignes

On divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne correspondante. On parle de **fréquence conditionnelle** car l'ensemble de référence pour le calcul des fréquences n'est plus celui de la population totale : ce sera successivement l'ensemble des garçons puis celui des filles et enfin la population totale.

	Admis	Recalés	Total
Garçons	$\frac{317\,779}{365\,684} \approx 0{,}8690$	$\frac{47\,905}{365\,684} \approx 0{,}1310$	1
Filles	$\frac{346\,187}{373\,449} \approx 0{,}9270$	$\frac{27\,262}{373\,449} \approx 0{,}0730$	1

Exemple • Parmi les filles, la fréquence de filles ayant eu le DNB est 0,9270.
On note $f_F(A)$ cette fréquence. On a $f_F(A) = \dfrac{f(A \cap F)}{f(F)}$.

Remarques
- On ne peut pas additionner les fréquences dans une même colonne
- La somme des fréquences sur une même ligne est égale à 1.

Par colonnes

Exemple • Parmi les recalés, il y a 63,73 % de garçons. On peut dire aussi : la part des garçons parmi les recalés est égale à 0,6373.
On note $f_R(G) = 0{,}6373 = \dfrac{f(G \cap R)}{f(R)}$.

	Admis	Recalés
Garçons	$\frac{317\,779}{663\,966} \approx 0{,}4786$	$\frac{47\,905}{75\,167} \approx 0{,}6373$
Filles	$\frac{346\,187}{663\,966} \approx 0{,}5214$	$\frac{27\,262}{75\,167} \approx 0{,}3627$
Total	1	1

Remarques
- On ne peut pas additionner les fréquences dans une même ligne.
- La somme des fréquences sur une même colonne est égale à 1.

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 Lire un tableau avec des fréquences conditionnelles

Le tableau ci-contre donne la situation active des 25-29 ans par âge et sexe en % en 2015 (Bureau International du Travail).

Activité	Hommes	Femmes
En études initiales	3,2	3,4
Cumul études-emploi	3,1	3,2
En emploi	75,3	65,4
Au chômage au sens du BIT	12,3	10,2
Inactivité (hors études initiales)	6,0	17,8
Ensemble	100	100

1. Parmi les hommes, quelle est la part des hommes en « études initiales » ?

2. Chez les 25-29 ans, peut-on dire que la proportion de femmes inactives est trois fois supérieure à celle des hommes ?

Méthode Pour lire un tableau avec des fréquences conditionnelles

❶ On **repère** dans le tableau la fréquence 1 (ou 100 %)

❷ On **identifie** alors la population de référence.

Solution

1. La population E de référence est celle des hommes de 25 à 29 ans. La part des hommes est alors de 3,2 %.

2. La population de référence est celle des 25-29 ans. Chez les hommes, la part de ceux en « inactivité » est 6 % ; parmi les femmes, la part est de 17,8 % soit environ trois fois la part des hommes.

→ Voir Exercices 22 et 25 p. 135

Exercice résolu 4 Compléter un tableau croisé d'effectifs et l'exploiter

On donne le tableau suivant qui répertorie les personnes de 16 ans et le reste de la population en France métropolitaine en 2018 selon le sexe (source Insee, estimations provisoires).

	Hommes	Femmes	Total
Âge 16 ans	405 773	385 162	790 935
Âge ≠ 16 ans	30 955 666	33 065 451	64 021 117
Total	31 361 439	33 450 613	64 812 052

Construire le tableau (on donnera les valeurs en %) :

1. des fréquences marginales ;

2. des fréquences conditionnelles par lignes.

Méthode Pour compléter un tableau croisé d'effectifs et l'exploiter

❶ On **identifie** la population de référence.

❷ **Fréquences marginales :** on **divise** chaque case du tableau par l'effectif total (64 812 052).

❸ **Fréquences conditionnelles par lignes :** on divise l'effectif de chaque case par l'effectif total de la ligne correspondante.

Solution

1. Fréquences marginales

	Hommes	Femmes	Total
Âge 16 ans	0,63 %	0,59 %	1,22 %
Âge ≠ 16 ans	47,76 %	51,02 %	98,78 %
Total	48,39 %	51,61 %	100 %

2. Fréquences conditionnelles par lignes

	Hommes	Femmes	Total
Âge 16 ans	51,30 %	48,70 %	100 %
Âge ≠ 16 ans	48,35 %	51,65 %	100 %

→ Voir Exercices 22 et 23 p. 134, 135

3 Probabilités conditionnelles

A Introduction

De nombreuses situations se résument à des phrases de la forme « si … a lieu, alors la probabilité de … est … ».

Exemples

- Si je lance une pièce de monnaie (non truquée) 10 fois et qu'elle tombe sur pile, alors au 11ᵉ lancer la probabilité d'obtenir pile est égale à …
- Problème posé par Martin Gardner, auteur de jeux mathématiques : « M. Jones a deux enfants. Le plus âgé est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ? »
- On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 8, sachant que l'un des deux dés donne 4 ?

Histoire des maths

C'est le mathématicien français **Abraham de Moivre** qui avance le premier le concept de probabilité conditionnelle dans son livre *The Doctrine of Chances* (1718).

B Définition

Définition A et B désignent deux événements tels que $\text{card}(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$$

Remarque • Si $\text{card}(B) \neq 0$, alors $P_B(A) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$. On a aussi : $P_A(B) = \dfrac{f(A \cap B)}{f(A)}$.

Exemple • Le tableau ci-contre donne la répartition des élèves d'une classe de Première. On choisit au hasard un élève.
A est l'événement : « l'élève choisi est une fille » et B : « l'élève choisi est demi-pensionnaire ».
$P_A(B) = \dfrac{11}{16}$: la probabilité d'avoir choisi un élève demi-pensionnaire sachant que c'est une fille est la fréquence des demi-pensionnaires dans la population constituée des filles.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{f(A \cap B)}{f(B)} = \frac{\frac{11}{34}}{\frac{16}{34}} = \frac{11}{16}.$$

	Interne	Externe	Demi-pensionnaire	Total
Fille	2	3	11	16
Garçon	1	2	15	18
Total	3	5	26	34

→ Voir Exercice résolu 5

Propriété Si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Démonstration • On sait que $P(A \cap B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(E)}$ et $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$.

Soit : $$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(E)}}{\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(E)} \times \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(A)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = P_A(B).$$

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Calculer des probabilités conditionnelles en utilisant des effectifs

Lucie décide de faire du tri dans son garage. Elle retrouve une boîte avec 140 clous et vis. Parmi ces clous et vis, 51 sont à tête ronde, les autres sont à tête plate. Par ailleurs, il y a 85 clous dont 40 % sont à tête ronde.

1. Reproduire et compléter le tableau :

	Clous A	Vis $\bar{A}$	Total
Tête plate B	51	38	89
Tête ronde $\bar{B}$		17	
Total		55	

2. Lucie choisit un objet au hasard dans la boîte. A est l'événement : « Elle a pris un clou » et B l'événement « Elle a pris un objet à tête plate ». Exprimer les événements suivants à l'aide d'une phrase, puis déterminer leur probabilité : $A \cap B$; A sachant B ; B sachant A.

Méthode — Pour calculer des probabilités conditionnelles en utilisant des effectifs

1. On **repère** les données pour compléter au fur et à mesure le tableau.
2. On **distingue** les événements « $A \cap B$ » et « A sachant B ».
3. On **fait attention** à l'ensemble de référence dans le calcul des probabilités conditionnelles.

Solution

1. $85 \times \frac{40}{100} = 34$

	Clous A	Vis $\bar{A}$	Total
Tête plate B	51	38	89
Tête ronde $\bar{B}$	34	17	51
Total	85	55	140

« 51 sont à tête ronde »

« Elle retrouve une boîte avec 140 clous et vis. »

« il y a 85 clous »

On finit de compléter le tableau en effectuant des sommes et des différences.

2. $A \cap B$ est l'événement « l'objet choisi est un clou à tête plate ». L'effectif correspondant est situé à l'intersection de la 2[e] ligne et de la 2[e] colonne du tableau, on a donc $P(A \cap B) = \frac{51}{140}$.

A sachant B est l'événement « l'objet choisi est un clou sachant que c'est un objet à tête plate ». L'ensemble de référence est l'ensemble des 89 objets à tête plate, donc $P_B(A) = \frac{51}{89}$.

B sachant A est l'événement « l'objet choisi est à tête plate sachant que c'est un clou ». L'ensemble de référence est l'ensemble des 85 clous donc $P_A(B) = \frac{51}{85}$.

→ Voir Exercices 27 à 32 p. 136

Exercice résolu 6 — Calculer des probabilités conditionnelles en utilisant les fréquences

Deux machines A et B d'une usine fabriquent des puces électroniques. A en produit 40 % ; 5 % des puces fabriquées par A sont défectueuses, 2 % des puces produites par B sont défectueuses.
On prélève une puce au hasard.
Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A sachant qu'elle est défectueuse ?

Méthode — Pour calculer des probabilités conditionnelles en utilisant les fréquences

1. On **repère** les données pour compléter au fur et à mesure le tableau.
2. On **calcule** la fréquence $f(A \cap D)$ de $A \cap D$ et la fréquence $f(D)$ de D.
3. On effectue le **quotient** $\frac{f(A \cap D)}{f(B)}$.

Solution

D désigne l'événement « la puce est défectueuse », A « la puce a été produite par la machine A » et B « la puce a été produite par la machine B ».

$P_D(A) = \frac{f(A \cap D)}{f(D)} = \frac{0,02}{0,032} = 0,625.$

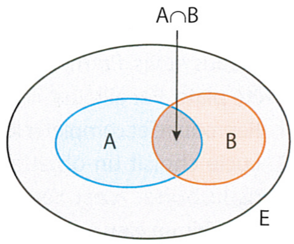
	D	$\bar{D}$	Total
A	$\frac{5}{100} \times 0,4 = 0,02$	$0,4 - 0,02 = 0,38$	$\frac{40}{100} = 0,4$
B	$\frac{2}{100} \times 0,6 = 0,012$	$0,6 - 0,012 = 0,588$	$\frac{60}{100} = 0,6$
Total	0,032	0,968	1

→ Voir Exercices 42 et 47 p. 137, 138

L'essentiel

1 Proportion

Soit une population de référence E et A une sous-population de E.



La proportion de A dans E est le nombre réel $\frac{n_A}{n_E}$ où n_A est l'effectif de A et n_E l'effectif de E.

On considère maintenant deux sous-populations A et B d'une même population E.

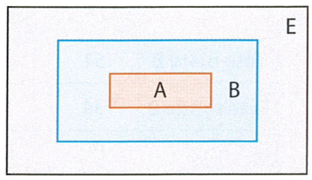
L'intersection $A \cap B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à la fois à A et à B.

L'union $A \cup B$ est la sous-population de E constituée des individus appartenant à A ou à B, c'est-à-dire ceux qui sont soit dans A, soit dans B, soit dans les deux.

Soit $f(A)$, $f(B)$, et $f(A \cap B)$ les **fréquences** (ou proportions) respectives de A, B et de $A \cap B$ dans E.

La proportion $f(A \cup B)$ de $A \cup B$ est donnée par : $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Lorsque A et B n'ont aucun élément commun, on dit qu'ils sont **disjoints**.



Deux sous-populations A et B forment une **partition d'une population** E lorsque $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.

Inclusion : soit A, B des sous-populations de E telles que $A \subset B$ et $B \subset E$.

Si f_1 est la proportion de A dans B et f_2 la proportion de B dans E, alors la proportion de A dans E est : $f = f_1 \times f_2$.

2 Tableaux croisés

Un tableau croisé est la donnée d'un tableau d'effectifs étudiant deux caractères d'une même population.

Dans un groupe de lycéens et lycéennes, la répartition des applications les plus utilisées est donnée par le tableau suivant :

	Garçons	Filles	Total
Instagram	6	12	18
Snapchat	8	9	17
Total	14	21	35

Lecture du tableau : la population étudiée est l'ensemble des jeunes d'un groupe.
Les deux caractères pris en compte sont le sexe (garçons ou filles) et l'application la plus utilisée (Instagram, Snapchat).
Dans ce tableau, il y a 9 filles qui utilisent Snapchat. De même, il y a au total 35 jeunes dans ce groupe et 14 garçons.

3 Probabilités conditionnelles

A et B désignent deux événements tels que $\text{card}(A) \neq 0$.

La **probabilité de B sachant que A est réalisé**, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$$

Si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.