1 Questions Flash — BAC

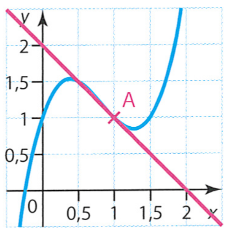
Diaporama

53 diapositives pour maîtriser ses automatismes

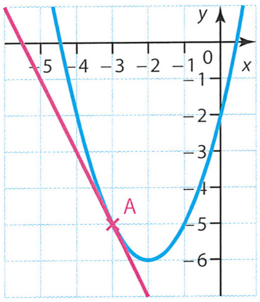
lienmini.fr/10333-25

Lire graphiquement le nombre dérivé

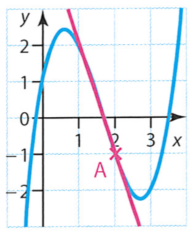
2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique figure ci-contre ainsi que la tangente au point A d'abscisse 1.
Lire $f'(1)$.



3 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique figure ci-contre ainsi que la tangente au point A d'abscisse (-1).
Lire $g'(-1)$.

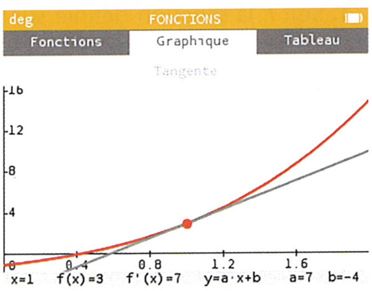


4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique figure ci-contre ainsi que la tangente au point A d'abscisse 2.
Lire $f'(2)$.



Obtenir graphiquement l'équation réduite d'une droite

5 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$ et T la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 1. À l'aide de l'écran de la calculatrice, donner le coefficient directeur de T ainsi que son ordonnée à l'origine (la calculatrice nous donne l'équation de la tangente, il suffit d'interpréter cette équation).



6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$ et T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
Donner le coefficient directeur de T ainsi que son ordonnée à l'origine.

Appliquer une formule

7 Donner l'expression de la dérivée de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 7x$.

8 Donner l'expression de la dérivée de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}5x^2 + 2{,}5x - 1{,}5$.

9 Donner l'expression de la dérivée de h définie sur $[-10\,;10]$ par $h(x) = 50x^3 - 37x^2 + 26x - 45$.

10 Donner l'expression de la dérivée de t définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$.

Déterminer le sens de variation d'une fonction polynôme du 1er degré ou factorisée du 2nd degré

11 Déterminer le sens de variation de f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4x^2 + 2x - 7$.

12 Déterminer le sens de variation de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x + 2$.

13 Déterminer le sens de variation de h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 3$.

Déterminer les extremums d'une fonction polynôme de degré $\leqslant 3$

14 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signes de la dérivée figure ci-dessous :

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f possède-t-elle des extremums ? Si oui, combien ? S'agit-il de minimums ou de maximums ?

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 2x - 7$.
Cette fonction admet un minimum.
Déterminer en quel point.

16 Soit une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;6]$ qui admet un maximum en (-1) et un minimum en 2.
Donner un tableau de signes possible pour la fonction f'.

Exercices

Pour commencer

PASTILLE BLANCHE *L'exercice est corrigé en fin de manuel*

Nombre dérivé

→ Aide Cours 1A et 1C p. 104

Question de cours

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
1. Calculer le taux de variation de f au point d'abscisse 2.
2. En déduire le nombre dérivé de f en 2.

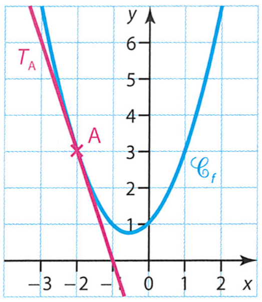
18 Déterminer le taux de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ au point d'abscisse (-2).
En déduire $f'(-2)$.

19 Déterminer le taux de variation de la fonction inverse au point 1. En déduire le nombre dérivé de la fonction inverse au point 1.

20 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a :
$\dfrac{g(-2+h) - g(-2)}{h} = -5 + h$ où h est un nombre réel non nul.
Déterminer $g'(-2)$.

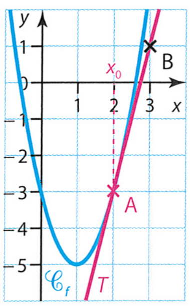
21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a :
$\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = h^2 + 2h + 2$. Déterminer $f'(1)$.

22 Soit f la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre.
On a tracé T_A la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
1. Lire graphiquement le coefficient directeur de T_A.
2. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

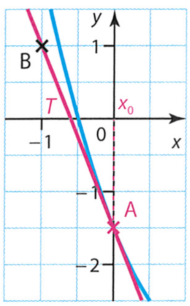


23 Dans chacun des cas suivants, $\mathscr{C}_f$ est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On a représenté la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse x_0. Déterminer graphiquement $f'(x_0)$.

1.

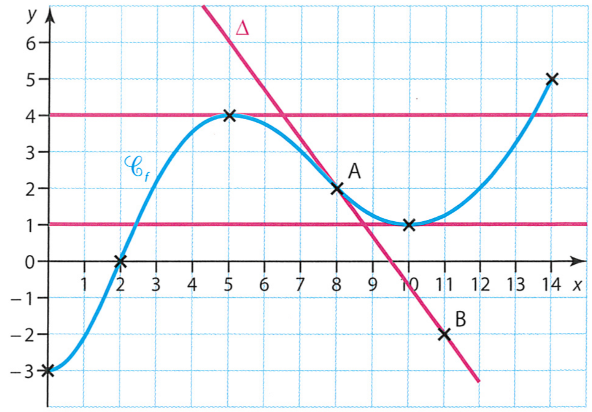


2.



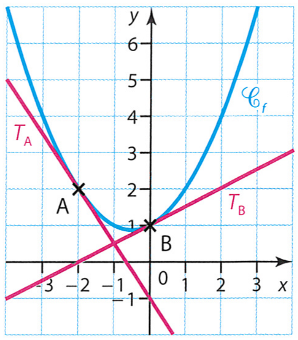
24 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 6$
À l'aide de la calculatrice, déterminer $f(3)$ et $f'(3)$ et en déduire l'équation réduite de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 3.

25 Soit f' une fonction définie sur $[0\,;14]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé.
La droite Δ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A$(8\,;2)$ et passe par le point B$(11\,;-2)$.



Déterminer graphiquement :
1. $f(5)$, $f'(5)$ et $f'(8)$.
2. une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.
3. une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 8.

26 On a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f ainsi que les deux tangentes aux points A et B.
1. Déterminer graphiquement $f(-2)$ et $f'(-2)$ puis déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.
2. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$ puis déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B.



QCM

27 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a :
$\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = h - 3$ où h est un réel non nul.
On a alors :
a. $f'(0) = -3$. **b.** $f'(4) = -3$. **c.** $f'(-3) = 4$.
2. g est une fonction telle $g(2) = -1$ et $g'(2) = 3$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ de g au point d'abscisse 2 est :
a. $y = -x + 5$ **b.** $y = 3x - 3$ **c.** $y = 3x - 7$
3. La courbe d'une fonction f admet au point A$(-2\,;3)$ une tangente T parallèle à l'axe des abscisses.
T a pour équation :
a. $y = 3$ **b.** $y = 0$ **c.** $x = -2$

Fonction dérivée

→ Aide Cours 2 p. 106

Question de cours

28 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=4x^3-6x^2+9x+2$.
Calculer $f'(x)$.

29 Dans chacun des cas suivants, g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de g'.
1. $g(x)=x^2$. **2.** $g(x)=-x^2+3x$.
3. $g(t)=1+t^2$. **4.** $g(q)=3q^2-q+3$.

30 Dans chacun des cas suivants, h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de h'.
1. $h(x)=5x^2+4x-5$. **2.** $h(x)=12x-4x^2-7$.
3. $h(t)=-t^2-2t+5$. **4.** $h(q)=3-2q+7q^2$.

31 Dans chacun des cas suivants, i est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de i'.
1. $i(x)=2x^2+4x-1$. **2.** $i(t)=-t^2+3t+2$.
3. $i(q)=2(q-3)^2$.

32 Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
1. $I(x)=0{,}001x^2-0{,}002x+0{,}0075$.
2. $B(q)=3q^2-2q+7$.

33 Dans chacun des cas suivants, g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de g'.
1. $g(x)=3x^3-x^2+3$. **2.** $g(x)=5x^3+4x^2-5x+1$.
3. $g(t)=12t-4t^3-7t^2-2$. **4.** $g(q)=-q^3-2q+5q^2+7$.

34 Dans chacun des cas suivants, h est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de h'.
1. $h(x)=3-2x^2+7x-x^3$. **2.** $h(x)=x^3-2x^2+4x-8$.
3. $h(t)=2t(t-3)^2$.

35 Dans chacun des cas suivants, i est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $i'(x)$.
1. $i(x)=x^3-\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{7}{4}$.
2. $i(x)=-0{,}2x^3+5{,}7x^2+0{,}3x+6{,}4$.

36 Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.
1. $V(t)=0{,}0013t^3-0{,}005t^2-0{,}032t+0{,}0125$.
2. $C(q)=q^3+5q^2-3q-8$.

37 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. Calculer $f(2)$ et $f'(2)$ et en déduire l'équation réduite de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 2.

38 En procédant comme dans l'exercice **37**, déterminer dans chacun des cas suivants, l'équation réduite de la tangente T à la courbe de la fonction au point d'abscisse x_0.
1. $g(x)=2x^2-5x+2$ et $x_0=1$.
2. $h(x)=-2x^3+0{,}5x^2-x$ et $x_0=-2$.
3. $j(x)=0{,}5x^2-3x+2{,}5$ et $x_0=3$.

Vrai ou faux

39 *Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.*
1. Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+2$ alors $f'(x)=0$.
2. Si la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=x^3-3x^2-9x+3$ alors $g'(x)=(x-3)(3x+3)$.
3. Si la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-2x^3+4$ alors $h'(-1)=10$.
4. Si la fonction C est définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$C(q)=-4q^2+16q-5$ alors la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

QCM

40 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;8]$ par $f(x)=2x^2-8x+3$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est :
a. $y=0$ **b.** $y=-5$ **c.** $y=2$
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-4\,;4]$ par $g(x)=-2x^2+x-5$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 est :
a. $y=-5$ **b.** $y=x$ **c.** $y=x-5$
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par $h(t)=-5t^2+60t-75$. L'équation de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse (-1) est :
a. $y=70t-70$ **b.** $y=70t-210$ **c.** $y=70t-140$

41 Recopier et compléter les phrases suivantes :
1. Si la fonction dérivée d'une fonction f est négative sur $[-3\,;2]$ alors f est ....
2. Si la fonction dérivée d'une fonction f est positive sur $[2\,;5]$ alors f est ....

42 Reproduire et compléter le tableau de variation suivant :

x	-5		-2		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f							

Exercices

Pour commencer

Dans les exercices 43 à 47, f est une fonction définie sur l'intervalle I dont on connaît l'expression de la fonction dérivée. Dresser le tableau de variation de la fonction f après avoir étudié le signe de $f'(x)$.

43 f est définie sur $[-2\,;4]$ et $f'(x)=2x-4$.

44 f est définie sur $[-1;5]$ et $f'(x)=9-3x$.

45 f est définie sur $[-2\,;6]$ et $f'(x)=-6x$.

46 f est définie sur $[-4\,;4]$ et $f'(x)=(2x-2)(x+2)$.

47 f est définie sur $[-1;2]$ et $f'(x)=-5x(x-1{,}2)^2$

Dans les exercices 48 à 51, dresser le tableau de variation complet de la fonction donnée sur l'intervalle I après avoir étudié le signe de sa dérivée.

48 f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par :
$f(x)=4x^2-2x+5$.

49 g est la fonction définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par :
$g(x)=-x^2+4x+2$.

50 h est la fonction définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par $h(x)=1-x^2$.

51 k est la fonction définie sur $\mathrm{I}=[-2\,;2]$ par :
$k(x)=x+2x^2+3$.

52 Soit f la fonction définie sur $[2\,;5]$ par :
$f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+4x+1$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[2\,;5]$ $f'(x)=(x-4)(2x-1)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[2\,;5]$.

53 Soit la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par :
$f(x)=-x^3+1{,}5x+6x+1$.
À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats ci-contre.

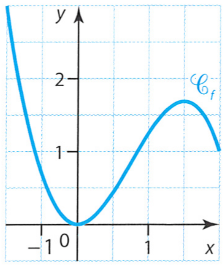
1 f (x)
→ $-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+1$
2 f' (x)
→ $-3x^2+3x+6$
3 Factoriser (f' (x))
→ $-3\ (x-2)\ (x+1)$

1. Résoudre l'équation $f'(x)=0$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[-3\,;3]$.

54 Soit g la fonction définie sur $[-1;1]$ par :
$g(x)=x^3-16{,}5x^2+72x+5$.
1. Calculer $g'(x)$.
2. Justifier que pour tout x appartenant à $[2\,;5]$:
$g'(x)=(3x-9)(x-8)$.
3. Résoudre l'équation $g'(x)=0$.
4. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le tableau de variation de g sur $[0\,;10]$.

55 Soit R la fonction définie sur $[-1;\ 1]$ par :
$R(x)=2x^3-x^2+6$.
1. Calculer $R'(x)$ puis factoriser $R'(x)$.
2. Étudier le signe de $R'(x)$ et en déduire le tableau de variation de R sur $[-2\,;4]$.

56 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$ et donnée par sa courbe représentative ci-contre. Déterminer, dans un tableau, le signe de $f'(x)$.



Vrai ou faux

57 On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-10\,;14]$:

x	-10		-3		5		14
Variations de f	1	↗	5	↘	-4	↗	-1

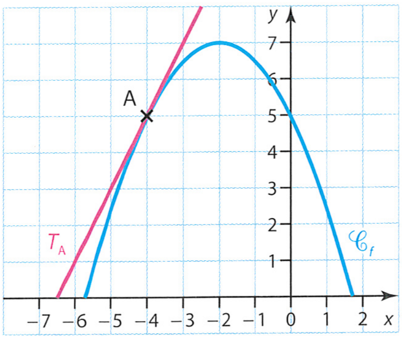
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies, fausses ou si l'on ne peut pas répondre. Justifier.
1. Sur $[5\,;14]$, $f'(x)$ est négatif.
2. Pour tout réel x de l'intervalle $[-10\,;14]$, $f(x)>-6$.
3. $f'(2)<0$.
4. Sur $[-10\,;-3]$, $f(x)$ est positif.
5. $f'(-3)=f'(14)$.

QCM

58 *Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.*
Soit B une fonction définie sur $[0\,;50]$ par :
$B(x)=-x^2+52x-480$.
1. $B'(x)=$
a. $2x+52$ **b.** $-2x$ **c.** $-2x+52$
2. La tangente à la courbe représentative de la fonction B au point d'abscisse 26 est :
a. parallèle à l'axe des abscisses.
b. parallèle à l'axe des ordonnées.
c. oblique.
3. Sur l'intervalle $[0\,;50]$, la fonction B est :
a. croissante. **b.** décroissante. **c.** pas monotone.
4. La fonction B admet :
a. un maximum pour $x=26$.
b. un minimum pour $x=26$.
c. un maximum pour $x=50$.

Nombre dérivé

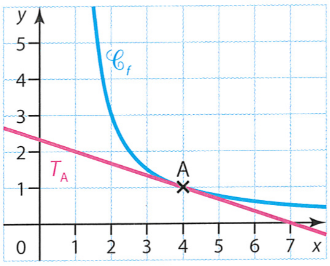
59 Soit f la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous. On a tracé la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.



1. a. Lire $f(-4)$.
b. Lire graphiquement le coefficient directeur de la tangente T_A. En déduire $f'(-4)$.
c. Déterminer une équation de T_A.
2. On admet que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0 a pour équation $y=-2x+5$. Quel est le coefficient directeur de T_B ? Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

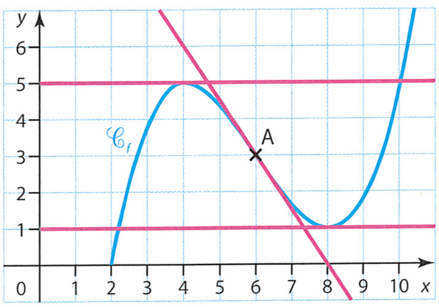
→ Voir **Exercice résolu 2** p. 105

60 Soit f la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre. On a tracé la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.



1. a. Lire graphiquement $f(4)$ et $f'(4)$.
b. Déterminer une équation de T_A.
2. On admet que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2 a pour équation $y=-3x+9$. En déduire $f'(2)$.

61 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



1. a. Déterminer graphiquement $f(4)$, $f'(4)$ et $f'(6)$.
b. Donner le signe de $f'(1{,}5)$). Justifier.
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
a. $f(x)=0$. **b.** $f(x)\geqslant 0$. **c.** $f'(x)=0$. **d.** $f'(x)\geqslant 0$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

62 Soit f une fonction définie sur $[-5\,;7]$ dont le tableau de variation est le suivant.

x	-5		-2		2		7
Variations de f	0	↗	3	↘	-3	↗	1

De plus $f(0)=1$ et $f'(0)=-2$; $f(5)=-2$ et $f'(5)=\dfrac{1}{2}$.
Tracer une courbe susceptible de représenter f (faire apparaître toutes les données de l'énoncé y compris les tangentes aux points d'abscisses 0 et 4).

63 ALGO **Tester un programme**

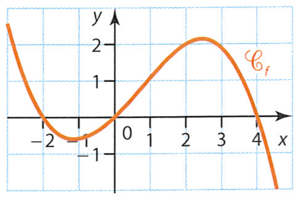
On considère la fonction g définie par $g(x)=x^2+x$.
On donne l'algorithme ci-contre :

$A \leftarrow \ldots$
$P \leftarrow \ldots\ldots$
$H \leftarrow 1$
Pour I allant de 1 à P
$\quad T \leftarrow \dfrac{(A+H)^2+(A+H)-(A^2+A)}{H}$
$\quad H \leftarrow \dfrac{H}{10}$
Afficher T
Fin Pour

1. Faire tourner l'algorithme pour $A=1$ et $P=5$. Quel résultat obtient-on ?
2. Que permet de conjecturer cet algorithme ?

→ Voir **Exercice résolu 1** p. 105

64 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique figure ci-contre.
Pour quelles valeurs de x a-t-on $f'(x)\times f(x)=0$?



→ Voir **Exercice résolu 5** p. 109

Fonction dérivée

65 STMG Une entreprise commercialise des enceintes bluetooth. Une étude de marché permet d'estimer que la vente pour le mois à venir sera comprise entre 1 500 et 3 000 unités. On s'intéresse au bénéfice de l'entreprise sur la vente des enceintes bluetooth produites.
On modélise le bénéfice de l'entreprise, exprimé en centaines d'euros, par la fonction f définie sur $[15\,;30]$ par : $f(x)=-2x^2+90x-400$, où x représente le nombre de centaines d'enceintes bluetooth produites.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in[15\,;30]$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[15\,;30]$.
3. Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Quel est alors son montant ?

→ Voir **Exercices résolus 4 et 5** p. 107, 109

Exercices

Pour s'entraîner

66 PYTHON Dans une usine pharmaceutique, une unité de production fabrique un médicament qu'elle vend par lots. Sa capacité de production est limitée à 60 lots par mois. On admet que le bénéfice (en €) en fonction du nombre x de lots fabriqués et vendus en un mois est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par :
$f(x) = -10x^2 + 860x - 4\,000$.

1. Déterminer le bénéfice maximal ainsi que le nombre de lots fabriqués et vendus correspondant à ce bénéfice maximal.

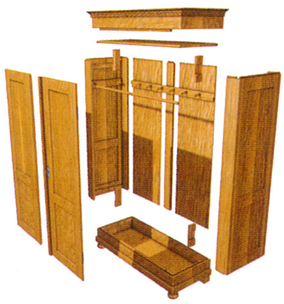
2. Pour répondre à cette question, Magdalena a décidé de programmer en Python l'algorithme ci-contre permettant d'obtenir le bénéfice maximal.
Vérifier son code.

```python
from math import *
def f(x):
    return -10*x*x+860*x-4000

xmax=0
pas=1
x=0
while x<60:
    if f(xmax)<f(x):
        xmax=x
    x=x+pas
print(xmax,f(xmax))
```

→ Voir **Exercice résolu 6** p. 109

67 Un placard a la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur. On suppose $x \in [0\,;12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).



1. Déterminer le volume $V(x)$ en dm³ de ce placard.

2. Calculer $V'(x)$ pour tout $x \in [0\,;12]$.

3. Vérifier que 4 et 12 sont racines du polynôme $3x^2 - 48x + 144$. En déduire une factorisation de $V'(x)$ puis le signe de $V'(x)$.

4. Déterminer les variations de la fonction V.

5. Quelles dimensions doit-on choisir pour le placard afin d'obtenir un volume maximal ?

68 Soit g une fonction définie sur $[-4\,;3]$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm. Le tableau de signes de $g'(x)$ est le suivant :

x	-4		-2		0		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a également le tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	0	2	3
$g(x)$	5	2	1	3	1	-2

De plus, $g'(-3) = \dfrac{-3}{2}$ et $g'(2) = -2$.
Tracer une courbe possible pour $\mathscr{C}_g$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -3, -2, 0 et 2.

69 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x_A = 4$. Calculer l'ordonnée de A puis écrire les coordonnées de A.

3. Calculer $f'(4)$. En déduire le coefficient directeur de la tangente T_A à $\mathscr{C}_f$ en A.

4. Déterminer une équation de T_A. Tracer $\mathscr{C}_f$ ainsi que T_A.

5. Soit B le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T_B à $\mathscr{C}_f$ au point B. Tracer T_B.

6. a. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

b. En déduire les coordonnées du point C de $\mathscr{C}_f$ où la tangente T_C est parallèle à l'axe des abscisses.

c. Tracer T_C et en donner une équation.

→ Voir **Exercice résolu 3** p. 107

70 Une entreprise produit une quantité mensuelle q, exprimée en centaines, de composants électroniques destinés au tableau de bord d'une automobile.
Leur coût de production, exprimé en milliers euros, est défini par : $C(q) = q^3 - 9q^2 + 15q + 38$ pour $0 \leqslant q \leqslant 7$.

1. a. Calculer $C(3{,}5)$. Rédiger une interprétation de ce résultat.

b. À l'aide de la calculatrice, donner le coût de production pour 425 composants produits.

2. Calculer $C'(q)$ et montrer que $C'(q) = (3q - 3)(q - 5)$.

3. Étudier le signe de $C'(q)$ et en déduire le tableau de variation de C sur $[0\,;7]$.

4. Quel est le coût de production minimal ? Pour combien de composants produits est-il atteint ?

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer pour quelles quantités de composants produits l'entreprise a un coût de production égal à 20 000 €.

71 Suite à une augmentation du nombre de personnes malades dans un village, une organisation a mis en place une campagne de vaccination en janvier 2017. On modélise le pourcentage de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en mois, écoulé depuis janvier 2017, par la fonction p, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;25]$ par : $p(t) = -0{,}2t^2 + 4t + 25$.

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction p et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;25]$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;25]$.

3. Quel était le pourcentage de malades au début de l'étude ?

4. Quel a été le pourcentage maximum de malades durant l'épidémie ? À quel moment ce maximum a-t-il été atteint ?

5. Déterminer l'année et le mois durant lesquels la maladie aura disparu du village.

72 L'empreinte carbone est un indicateur des émissions de gaz à effet de serre qui intègre les émissions directes des ménages français (logements et voitures), les émissions de la production nationale (hors exportations), et celles associées aux produits importés.

À l'issue de la conférence de Paris sur le climat (Cop21), la France s'est engagée, d'ici 2030, à réduire ses émissions de CO_2 de 40 %, par rapport à leur niveau en 1990, estimé à 468 millions de tonnes équivalent CO_2.

On souhaite prévoir la quantité de CO_2 émise en 2030. On propose ainsi de modéliser l'évolution des émissions de CO_2 par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;39]$ par : $f(x) = -0{,}8x^2 + 19{,}2x + 470$ où x représente le nombre d'années depuis 1995.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f sur $[0\,;39]$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;39]$.

3. En déduire le tableau de variation de la fonction de f sur $[0\,;39]$.

4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	39
$f(x)$									

5. En utilisant ce tableau de valeurs, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;39]$ dans un repère orthogonal.

6. D'après ce modèle, l'engagement de la France sera-t-il tenu en 2030 ? Justifier la réponse.

73 STMG Un site de ventes privées vend des produits de luxe et notamment des stylos de marque qu'elle vend par coffret de deux mais elle ne peut fournir que 60 coffrets par mois.

On admet que le bénéfice en fonction du nombre de coffrets vendus en un mois est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $B(x) = -10x^2 + 860x - 4\,050$.

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;60]$.

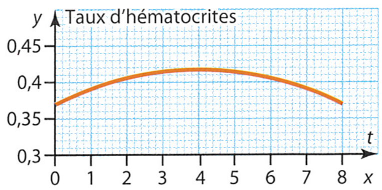
2. En déduire la valeur pour laquelle l'extremum de la fonction B est atteint.

3. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;60]$.

4. En déduire le bénéfice maximal ainsi que le nombre de coffrets vendus correspondant à ce bénéfice maximal.

74 STL TABLEUR En médecine, le taux d'hématocrite est le rapport du volume de globules rouges circulant dans le sang sur le volume total de sang. Chez l'homme, la valeur est normale si ce taux est compris entre 0,4 et 0,52.

1. Un patient arrive en urgence à l'hôpital et on mesure son taux d'hématocrite qui vaut 0,36. Pour augmenter ce taux, on lui injecte un médicament. On contrôle régulièrement son taux d'hématocrite pendant les huit premières heures. On définit sur l'intervalle $[0\,;8]$ la fonction f, qui à t, la durée écoulée en heures depuis la prise du médicament, associe le taux d'hématocrite du patient. La fonction f est représentée ci-dessous.



En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Quelle durée se sera écoulée depuis la prise du médicament pour avoir un taux d'hématocrite maximal ? Quel est alors ce taux ?

b. Pour quelles valeurs de t dans l'intervalle $[0\,;8]$, le taux d'hématocrite du patient est-il normal ?

2. Huit heures après l'injection du médicament, constatant que le taux d'hématocrite est à nouveau anormal, on injecte un autre médicament. Le taux d'hématocrite est alors donné par $g(t)$ où g est la fonction définie sur l'intervalle $[8\,;20]$ par $g(t) = -0{,}003t^2 + 0{,}09t - 0{,}17$, t représentant la durée écoulée depuis l'injection du premier médicament.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[8\,;20]$.

b. En déduire la valeur en laquelle la fonction g atteint son extremum et dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[8\,;20]$.

c. À l'aide du tableur, déterminer combien de temps après la prise de ce second médicament, le taux d'hématocrite du patient est redevenu normal.

Exercices

Pour faire le point

Tests

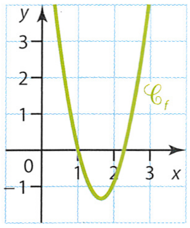
S'entraîner en ligne

lienmini.fr/10333-26

Vrai ou Faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

On donne la représentation graphique de la fonction f', dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f. On sait que $f(1) = 0$.



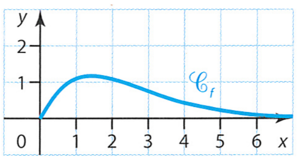
		V	F
75	La fonction f' est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.		
76	La fonction f est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$.		
77	La fonction f est croissante puis décroissante puis croissante.		
78	$\mathscr{C}_f$ admet au moins une tangente horizontale.		
79	La fonction f admet un extremum local en 1.		
80	La fonction f admet un minimum en 1,5.		
81	Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 vaut 4.		

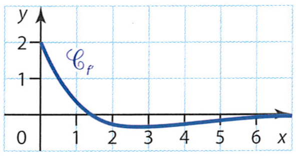
→ Vérifier les résultats p. 294

QCM

Indiquer dans chaque cas la bonne réponse.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ figure ci-contre à gauche et f' sa fonction dérivée dont la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ figure ci-contre à droite. $\mathscr{C}_{f'}$ coupe l'axe des abscisses au point $A(\sqrt{2}\,;0)$.





82 Un intervalle contenant le nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum est :

a. $[-0{,}1\,;0{,}1]$ **b.** $[1{,}4\,;1{,}5]$ **c.** $[2\,;3]$

83 Parmi les équations suivantes quelle est celle de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

a. $y = -2x$ **b.** $y = -2x + 2$ **c.** $y = 2x$

84 La courbe $\mathscr{C}_f$:

a. n'admet pas de tangente horizontale.
b. admet une tangente horizontale.
c. admet deux tangentes horizontales.

85 La fonction f est :

a. négative sur $[0\,;2{,}6]$ et positive sur $[2{,}6\,;+\infty[$.
b. positive sur $[0\,;+\infty[$.
c. positive sur $[0\,;\sqrt{2}]$ et négative sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

86 La fonction f' est :

a. négative sur $[0\,;2{,}6]$ et $f'(x) > 0$ sur $[2{,}6\,;+\infty[$.
b. $f'(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
c. $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\sqrt{2}]$ et $f'(x) < 0$ sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

87 La courbe $\mathscr{C}_f$:

a. n'admet pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
b. admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
c. admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x$.

→ Vérifier les résultats p. 294

88 In English

1. Find where $f(x) = x^2 - 3x + 8$ is increasing and where it is decreasing.
2. Find the tangent line at $x = 1$ of $f(x)$.

89 COMPÉTENCE Calculer

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
1. Calculer le taux de variation de f en 1.
2. Vérifier que, pour tout h réel non nul supérieur à (-1) :
$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}.$$
3. En déduire que la fonction racine carré est dérivable en 1 et donner la valeur de $f'(1)$.
4. Quelle est la limite du taux de variation de f en 0 ? Que peut-on en déduire ?

90

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
1. Calculer $\tau(h)$, le taux de variation de f en 1.
2. Vérifier que pour tout h réel strictement positif : $\tau(h) = \dfrac{-1}{1+h}$.
3. En déduire $f'(1)$.

91 COMPÉTENCE Chercher

En utilisant le taux de variation, expliquer qu'une fonction paire possède une fonction dérivée impaire.

92 COMPÉTENCE Raisonner

Montrer que si une fonction dérivable sur un intervalle est monotone alors sa dérivée est de signe constant.

93 COMPÉTENCE Modéliser

Une entreprise de design de luxe peut produire en un mois entre 0 et 24 mètres de tissus décoratifs.
Son coût de production a été modélisé par la fonction C définie pour tout x de l'intervalle $[0\,;24]$ par :
$C(x) = -x^3 + 30x^2 - 100x + 1000$ où x représente le nombre de mètres de tissu produits dans le mois.

Partie A : Analyse graphique

1. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative du coût sur l'intervalle en question.
2. Pour quelle production son coût est-il maximal ? minimal ?

Partie B : Coût moyen de production

On appelle coût moyen de production, le rapport :
$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$
1. À l'aide de la calculatrice, calculer le coût moyen de production pour 5 mètres puis 6 mètres de tissu.
2. Faire de même pour 15 mètres puis 16 mètres.
3. À l'aide du graphique, est-il intéressant de produire le plus de mètres de tissu possible ?

Partie C : Coût marginal

Le coût marginal d'une unité est le taux d'accroissement de la fonction coût (C) entre cette unité et la précédente : $C_M(n) = C(n) - C(n-1)$. C_M peut être assimilé à la dérivée du coût de production C.
1. Vérifier que $C'(x) = -3(x-10)^2 + 200$.
2. Pour quelle production le coût marginal est-il maximal ?
3. Vérifier que pour 10 mètres de tissu d'art, le coût moyen est égal au coût marginal.

94 COMPÉTENCE Modéliser

f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On sait $f(0) = 1$ et que la fonction est égale à sa dérivée.
1. Donner $f'(0)$.
2. On se propose de construire une courbe « approchée » de la fonction f.
a. Expliquer pourquoi $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0)$ lorsque h est proche de 0. En déduire que $f(x_0+h) \approx f(x_0) \times (1+h)$.
b. En déduire une valeur approchée de $f(0,1)$ en prenant $x_0 = 0$ et $h = 0,1$.
c. On donne l'extrait de feuille de calcul ci-contre. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule B3 qui, par recopie vers le bas, permet de compléter la colonne B ?

	A	B
1	x_0	$f(x_0)$
2	0	1
3	0,1	
4	0,2	

3. On considère l'algorithme suivant :

```
1  from lycee import*
'''
On introduit les valeurs de x_0 et h
On note y_0 pour f(x_0)
'''
h=0.1
x_0=0
y_0=1
repere.plot(x_0,y_0,'ro') #place le point de coordonnées (x_0;y_0)
10 while x_0<1:
    x_0=round(x_0+h,4) # on arrondit la valeur de x_0 à 0,0001
    y_0=round(y_0*(1+h),4)
    repere.plot(x_0,y_0,'ro')#dessine le nuage de points en rouge
repere.show()
```

a. Que fait l'instruction de la ligne 11 ? de la ligne 12 ?
b. Faire tourner l'algorithme. La courbe de la fonction obtenue semble-t-elle celle d'une droite, d'un polynôme de degré 2 ou 3 ?
c. En fait, la fonction étudiée ici, est la fonction *exponentielle*. L'instruction pour obtenir l'image d'un réel x_0 par cette fonction est $\boxed{\exp(x\_0)}$. Modifier le programme pour qu'il trace sur le même graphique les points de coordonnées $(x_0\,;\exp(x_0))$. Qu'observe-t-on ?
Remarque : la fonction exponentielle est définie comme unique fonction égale à sa dérivée et qui prend la valeur 1 en 0. Elle intervient dans de nombreux domaines. Elle permet en mathématiques d'étendre les calculs de puissances à des réels (par exemple $1{,}2^{3{,}4}$). En sciences physiques, la loi de désintégration radio-active, par exemple, amène à chercher des fonctions qui vérifient $f'(t) = -Cf(t)$, en biologie (croissance exponentielle)…

Tangente et position limite

CAPACITÉ À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, visualiser la position limite des sécantes à une courbe en un point.

Soit la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 3] par $f(x) = x^2$.

Soit A et B les points de la courbe. On a $x_A = 1$.

1. Dans cette question $x_B = 2$.

a. Représenter la courbe de cette fonction et la droite (AB) dans un repère.

b. Calculer la pente de cette droite et vérifier que son équation est $y = 3x - 2$.

2. Dans cette question, le point B va se rapprocher du point A le « plus possible ». Soit $x_B = x_A + h$.

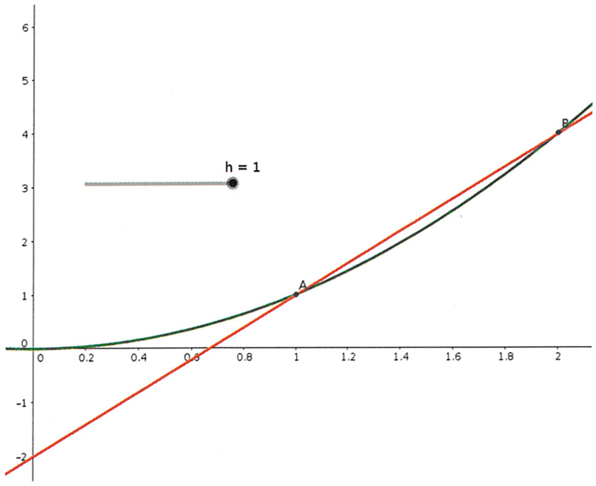
a. Donner les coordonnées du point B en fonction de h.

b. Calculer la pente p de la droite (AB) en fonction de h et vérifier que $p = 2 + h$.

c. Déterminer la limite lorsque h tend vers 0 de p.

d. Déterminer l'équation de la droite passant par A est de pente 2.

GEOGEBRA En salle informatique lienmini.fr/10333-27



1. Dessiner la fonction f définie par $f(x) = x^2$ sur [0 ; 3].

2. Placer le point A d'abscisse 1 sur la courbe de f (Point sur objet).

3. Créer un curseur h allant de 0 à 1.

4. Placer le point B d'abscisse $1 + h$ sur la courbe de f (on notera dans la zone de saisie : B=(1+h , f(1+h)).

5. Retrouver l'équation de la droite (AB) pour $h = 1$ trouvé dans l'exercice ci-dessus.

6. Faire varier le curseur pour trouver la droite limite où B se rapproche au mieux du point A. Que se passe-t-il si A et B sont confondus ?

7. Vérifier que la droite ainsi trouvée a la même équation que la tangente à la courbe au point A.

95 Un designer a créé une applique murale extérieure. L'objectif ici est de modéliser une partie du profil de la potence en forme de col de cygne (servant de support entre le mur et la lampe).

Dans un repère orthonormal du plan, on considère les trois points O, A et D de coordonnées respectives O(0 ; 0), A(6 ; 3,6) et D(6,4 ; 0).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée f' de f.

2. On souhaite que la courbe représentative de cette fonction passe par le point O et que la tangente en O ait pour coefficient directeur $-0{,}6$. En déduire les valeurs des coefficients d et c.

3. On souhaite que la courbe représentative de cette fonction passe par le point A, et que la tangente en A soit horizontale. En déduire un système d'équations dont les coefficients a et b sont solutions.

4. Montrer que ce système d'équations est équivalent au système suivant : $\begin{cases} 72a + 12b = 2{,}4 \\ 108a + 12b = 0{,}6 \end{cases}$. Résoudre ce système.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -0{,}05x^3 + 0{,}5x^2 - 0{,}6x$.

1. Calculer l'ordonnée du point E d'abscisse 4 appartenant à la courbe représentative de la fonction f.

2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point E.

Partie C

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre D passant par le point E. On admet que son rayon est $2{,}4\sqrt{2}$.

1. On considère le point B de coordonnées B(6 ; 4,4). Vérifier que la droite (BE) est tangente au cercle $\mathscr{C}$ et à la courbe représentative de f en E.

2. Dessiner le profil de la potence constitué de la portion de la courbe représentative de la fonction f en se restreignant à l'intervalle [0 ; 4] et de l'arc de cercle de centre D joignant E à F, où F est un point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 1 et d'abscisse $x_F \approx 9{,}64$.

96 La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{8t}{t^2+1}$ modélise la concentration, en mg.L^{-1}, d'un antibiotique dans le sang d'un patient t heures après l'injection.

1. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

```
1  f(t):=8t/(t^2+1)
        t -> 8*t / (t^2+1)
2  simplifier(deriver(f(t),t))
        -8*(t-1)*(t+1) / (t^4+2*t^2+1)
```

En déduire $f'(t)$.

2. Après avoir justifié que le signe de $f'(t)$ est donné par celui de $(t-1)(t+1)$, donner le signe de $f'(t)$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

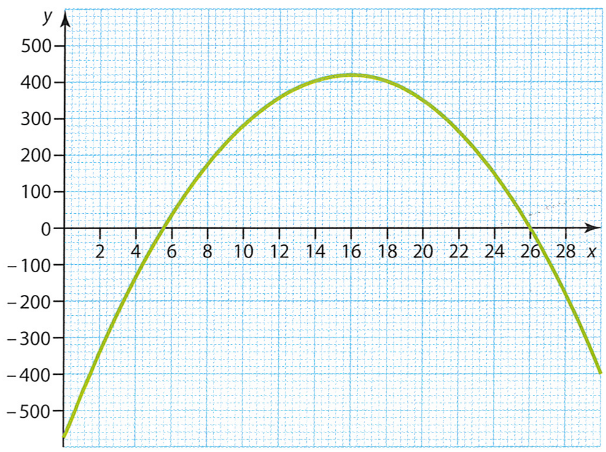
4. Au bout de combien de temps après l'injection la concentration en antibiotique dans le sang du patient est-elle maximale ? Donner cette concentration maximale.

97 Une entreprise française commercialise des pneus. La production mensuelle maximale est de 30 000 pneus. Le bénéfice (en milliers d'euros) réalisé pour la vente de x milliers de pneus vendus est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;30]$ par $B(x) = -4x^2 + 126x - 574$.

1. Calculer la dérivée de la fonction B, puis déterminer le signe de B'.

2. En déduire le tableau de variation de la fonction B.

3. On a représenté la courbe représentative de B :



a. Donner un encadrement de la plus petite des solutions de l'équation $B(x) = 0$ par deux entiers consécutifs.

b. À l'aide de la calculatrice, donner en encadrement d'amplitude 0,1 de cette solution.

c. 26 est-il solution de l'équation $B(x) = 0$? Justifier la réponse.

4. Pour quel nombre de pneus vendus le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?