5 Dérivation

CAPACITÉS

- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Construire la tangente à une courbe en un point.
- Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.
- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Le freinage d'un dragster après franchissement de la ligne.

Le dragster est un sport mécanique d'accélération. Départ arrêté, il s'agit de mettre le moins de temps possible pour franchir une distance de 402 mètres (depuis 2012, de 305 mètres). Ces engins sont propulsés par des moteurs pouvant dépasser les 8 000 chevaux[2] et le temps de course dure moins de 5 secondes, c'est très court !

Vidéo
Découvrons ces engins d'enfer.
lienmini.fr/10333-23

Si un dragster met 5 secondes à franchir la ligne, quelle sera sa vitesse instantanée au temps t = 2,5 secondes ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 103

Pour retrouver les automatismes

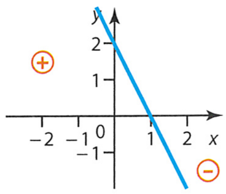
Questions Flash
Diaporama
20 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10333-24

Revoir les acquis de Seconde

1 Signe d'une fonction affine

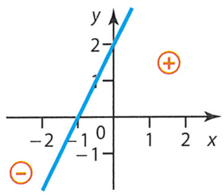
Une fonction affine est une fonction dont l'expression est du type $f(x) = mx + p$ où m et p sont des nombres réels. Cette fonction est représentée par une droite. La fonction est croissante si m est positif, décroissante si m est négatif et constante si m est nul.

Cas où $m > 0$



x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Cas où $m < 0$



x	$-\infty$	$\frac{-p}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

2 Extremums d'une fonction

On appelle **extremums** d'une fonction sur un intervalle, un **maximum** ou un **minimum** atteint par la fonction sur cet intervalle.

M est le **maximum** atteint par la fonction f sur l'intervalle I si il existe x_0 appartenant à I tel que $f(x_0) = M$ et pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.

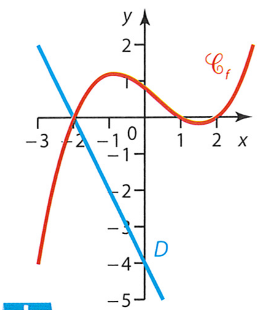
m est le **minimum** atteint par la fonction f sur l'intervalle I si il existe x_0 appartenant à I tel que $f(x_0) = m$ et pour tout x de I, $f(x) \geqslant m$.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

Soit la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

La droite D représente la fonction affine g.



	a	b	c	Aide
1. La fonction f est :	croissante sur $[-3\,;3]$.	décroissante sur $[-3\,;3]$.	décroissante sur $[-1\,;1]$.	1
2. Le coefficient directeur de la droite D est :	2	3	-2	1
3. Le signe de la fonction g est :	négatif sur $[-3\,;3]$.	négatif sur $[-2\,;+\infty[$.	positif sur $]-\infty\,;0]$.	1
4. Le signe de la fonction f est :	positif sur $[-2\,;3]$.	négatif sur $[1\,;2]$.	négatif sur $[-1\,;1{,}5]$.	1
5. Le maximum de f est :	1,3	-4	2	2

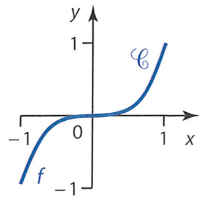
→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Taux de variation entre des points très proches TABLEUR

OBJECTIF Introduire le nombre dérivé comme limite du taux de variation → Cours 1A p. 104

f désigne la fonction définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par $f(x)=x^3-\dfrac{1}{16}x$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal du plan est donnée ci-contre.



1. Conjecturer le sens de variation de f.

2. On calcule le taux de variation entre a et b, $\tau(a\,;b)$, à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
On obtient : $a^2+b^2+ab-\dfrac{1}{16}$.

```
((b^3-1/16*b)-(a^3-1/16*a))/(b-a)
```
$$a^2+b^2+a*b-\frac{1}{16}$$

a. On étudie le signe de $\tau(a\,;b)$ pour b « proche » de a.
On écrit alors $b=a+h$ où h est un réel proche de 0.
Vérifier que $\tau(a\,;a+h)=3a^2-\dfrac{1}{16}+3ah+h^2$.

b. Que peut-on dire du signe de $\tau(1;1+h)$? de $\tau(0\,;0+h)$?

c. La conjecture est-elle validée ? On a défini ainsi le taux de variation de f en a.

3. On utilise un tableur pour conjecturer vers quelle valeur tend $\tau(0\,;0+h)$ lorsque h tend vers 0 :

h	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\tau(0\,;0+h)$									
	$h<0$, h tend vers 0 →					← $h>0$, h tend vers 0			

Quelle valeur peut-on conjecturer ? On note $f'(0)$ ce nombre limite.

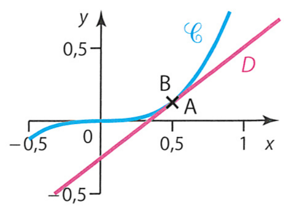
4. Conjecturer vers quel nombre, dépendant de a, tend $\tau(a\,;a+h)$.
Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu la limite de $\tau(a\,;a+h)$ lorsque h tend vers 0. Retrouve-t-on le résultat précédent ?

```
1 limite(3*a^2-1/16+h^2+3*a*h,h,0)
```
$$\frac{48*a^2-1}{16}$$

2 Tangente et droites limites → Mémento GeoGebra p. 175

OBJECTIF Définir la tangente à la courbe → Cours 1B p. 104

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique et A un point de $\mathscr{C}$. On s'intéresse à la pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer $\mathscr{C}$. Placer A sur $\mathscr{C}$ d'abscisse 1. Tracer la droite (AB) où B est un point mobile de $\mathscr{C}$ distinct du point A.

2. Faire « tendre » le point B vers le point A pour obtenir une droite D qui soit la position limite (dans le sens où B est le plus proche possible du point A) de ces sécantes. Quand B = A, D est la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

3. Lire l'équation de D lorsque $x_A=0{,}5$ et donner son coefficient directeur.

4. On définit le nombre dérivé, noté $f'(x_A)$, de la fonction f en x_A, comme le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A. Vérifier que $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

5. Créer sur un second graphique le point M de coordonnées $(x_A\,;p)$ où p est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A.

a. Activer la trace du point M. La fonction ainsi tracée s'appelle la fonction dérivée f' de la fonction f.

b. Vérifier que $f'(x)=3x^2$, soit en écrivant $f'(x)$ dans la zone de saisie, soit en traçant la fonction $x\mapsto 3x^2$ sur le graphique.

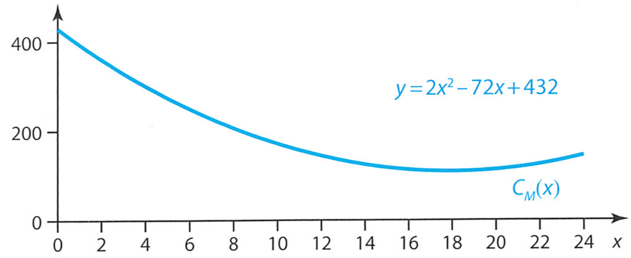
3 On bitume les coûts GeoGebra

STI2D ARCHITECTURE ET CONSTRUCTION

OBJECTIF Découvrir le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction → Cours 2D p. 108

La capacité maximale de production mensuelle d'une petite usine de bitume est de 25 tonnes. Le coût, en euros, d'une production de x tonnes est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;25]$ par $C(x)=x^3-36x^2+432x$.

1. Le **coût moyen C_M** est défini par $C_M(x)=\dfrac{C(x)}{x}$. Calculer $C_M(x)$ puis construire la courbe représentative de la fonction C_M à l'aide du logiciel GeoGebra. Déterminer les variations de la fonction C_M.



2. Calculer $C'_M(x)$, étudier son signe puis reproduire et compléter le tableau de signes ci-contre ? Quelles correspondances peut-on faire entre ce tableau et les variations trouvées au **1.** ?

x	0 …	25
Signe de $C'_M(x)$	…	0 …

3. Quel est le minimum de la fonction C_M sur l'intervalle $[0\,;25]$? Le prix de vente d'une tonne de bitume peut-il être égal à 100 euros ?

4. **Le coût marginal C_m** est donné par la fonction dérivée C'. Représenter sur le graphique précédent la fonction C_m.

5. Chaque tonne de bitume est vendue 160 euros. Tracer la courbe représentant le prix de vente unitaire sur le graphique précédent.

a. Vérifier que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.

b. Pour quelle quantité fabriquée et vendue, y a-t-il profit ?

c. Vérifier que le profit de l'entreprise est maximal lorsque le coût marginal est égal au prix de vente.

4 Accrochez-vous ! Tableur

PHYSIQUE

OBJECTIF Interpréter le nombre dérivé comme une vitesse instantanée → Cours 2A p. 106

Lors de la célèbre course *Top Fuel,* un dragster parcourt 400 m en 5 secondes !

1. Calculer la vitesse moyenne de ce véhicule en m.s^{-1} puis en km.h^{-1}.

2. La feuille de calcul ci-dessous donne la position du véhicule en fonction du temps (en mètres parcourus et en secondes).

3. Calculer la vitesse moyenne entre le départ et 2,5 secondes. On remarquera que cela correspond au taux de variation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Temps (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
2	Distance (m)	0	36,1	73,4	112	151	191	232	273	315	358	401
3												
4												

4. La distance parcourue est modélisée par la fonction suivante : $f(t)=-\dfrac{2}{15t^3}+2{,}5t^2+71t$ où t représente le temps en seconde. Vérifier à l'aide du tableur que la formule suivante doit être rentrée dans la cellule B2 : `=-2/15*B1^3+2.5*B1^2+71*B1`

5. Compléter la ligne 3 du tableur pour obtenir la vitesse moyenne du dragster depuis le début de la course.

6. La dérivée de la distance parcourue, notée f, représente la vitesse **instantanée**, notée v, du dragster. Calculer $v(t)=f'(t)$. Compléter la ligne 4 du tableur pour afficher la vitesse instantanée (en physique, on notera $v(t)=\dfrac{df}{dt}$).

7. Vérifier la vitesse du dragster en m.s^{-1} au compteur lorsqu'il franchit la ligne d'arrivée.

Cours

1 Nombre dérivé

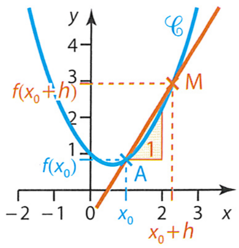
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a\,;b]$, x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. h désigne un réel non nul.

A Sécantes à une courbe et taux de variation

DÉFINITION Le **taux de variation** de la fonction f **au point d'abscisse x_0** est le nombre $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. On le note $\tau(h)$.

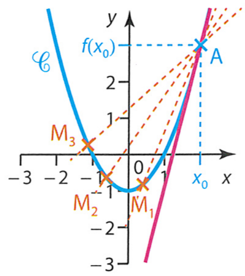
Rappel (chap. 3) : le taux de variation de la fonction f entre les points A et M d'abscisse x_0 et x_0+h est le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe $\mathscr{C}$.

→ Voir Exercice résolu 1



B Tangente et position limite

DÉFINITION La **tangente** à la courbe $\mathscr{C}$ **au point A d'abscisse x_0** est la droite passant par le point A, position limite des sécantes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par A.



C Nombre dérivé et limite du taux de variation

DÉFINITION Le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0 est la limite du taux de variation en x_0 lorsque h se rapproche de 0. On le note $f'(x_0)$.

On écrit : $\boldsymbol{f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\tau(h)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$.

PROPRIÉTÉ Le **nombre dérivé** de la fonction f en x_0 est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse x_0.

REMARQUE • Il existe certaines fonctions pour lesquelles le nombre dérivé en x_0 n'existe pas. On dira alors que la fonction n'est pas dérivable en x_0.

→ Voir Exercice résolu 2

D Équation réduite de la tangente en un point

PROPRIÉTÉ La **tangente** à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse x_0 est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$. **L'équation réduite** de cette tangente est : $\boldsymbol{y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.

EXEMPLE • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-3x+1$ et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 3. $f(3)=10$ donc $A(3\,;10)$. Soit h un nombre réel non nul.
On a : $f(3+h)=2(3+h)^2-3(3+h)+1=2h^2+9h+10$. Donc

$$\tau(h)=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{2h^2+9h+10-10}{h}=\frac{h(2h+9)}{h}=2h+9.$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2h+9)=9$ ce qui signifie que $f'(3)=9$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 3 est donc : $y=9(x-3)+10$, soit $y=9x-17$.

Exercice résolu 1 — Calculer un taux de variation en un point

Déterminer le taux de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5x^2+4$ au point d'abscisse (-2).

Méthode — Pour calculer le taux de variation en un point

1. Soit h un nombre réel non nul. On **calcule** $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$.
2. On **calcule** et on **simplifie** le quotient $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Solution

Soit h un nombre réel non nul.
On calcule $f(-2)$ et $f(-2+h)$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 5\times(-2)^2+4 \\ &= 5\times4+4 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2+h) &= 5\times(-2+h)^2+4 \\ &= 5\times\left((-2)^2+2\times(-2)\times h+h^2\right)+4 \\ &= 5\times(4-4h+h^2)+4 \\ &= 20-20h+5h^2+4 \\ &= 24-20h+5h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tau(h) &= \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \\ &= \frac{24-20h+5h^2-24}{h} \\ &= \frac{-20h+5h^2}{h} \\ &= \frac{h(-20+5h)}{h} \\ &= -20+5h. \end{aligned}$$

Le taux de variation de la fonction f au point d'abscisse (-2) est $\tau(h)=-20+5h$.

→ Voir Exercices 17 à 19 p. 112

Exercice résolu 2 — Calculer le nombre dérivé d'une fonction en x_0

Déterminer le nombre dérivé de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+4x-2$ en 5.

Méthode — Pour calculer le nombre dérivé d'une fonction f en x_0

1. On **calcule** le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction en x_0.
2. On fait ensuite **tendre** h **vers** 0 dans l'expression de $\tau(h)$.
3. Le résultat trouvé est le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Solution

Soit h un nombre réel non nul.
On calcule le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction en 5.

$$\begin{aligned} f(5) &= -3\times5^2+4\times5-2 \\ &= -75+20-2 \\ &= -57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5+h) &= -3(5+h)^2+4(5+h)-2 \\ &= -3(25+10h+h^2)+20+4h-2 \\ &= -75-30h-3h^2+20+4h-2 \\ &= -3h^2-26h-57 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \tau(h) &= \frac{f(5+h)-f(5)}{h} \\ &= \frac{-3h^2-26h-57-(-57)}{h} \\ &= \frac{-3h^2-26h}{h} \\ &= \frac{h(-3h-26)}{h} \\ &= -3h-26. \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to0}(-3h-26)=-26.$$

Donc $f'(5)=-26$. Le nombre dérivé de la fonction f au point 5 est donc égal à (-26).

→ Voir Exercices 19 à 21 p. 112

2 Fonction dérivée

A Définition

DÉFINITION Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si, pour tout nombre x_0, $f'(x_0)$ existe, on dit que la fonction f est **dérivable** sur I.
La **fonction dérivée** de f sur I, notée f', est la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre $f'(x)$.

Notation

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

PROPRIÉTÉ Les fonctions **affines** $f : x \mapsto ax + b$ avec a et b réels sont **dérivables** sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a : $f'(x) = a$.

→ Voir Exercice résolu 3

B Fonctions dérivées de : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$

PROPRIÉTÉS
La fonction **carrée** $f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a $f'(x) = 2x$.
La fonction **cube** $g : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a $g'(x) = 3x^2$.

DÉMONSTRATION • Soit x réel et h un nombre réel non nul.

$$\tau(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x.$$

C Dérivées et opérations

PROPRIÉTÉS Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.
La fonction $f + g$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
La fonction $k \times f$ est dérivable sur I et, pour tout x appartenant à I, $(k \times f)'(x) = k \times f'(x)$.

PROPRIÉTÉS Soit a, b, c, et d quatre réels, avec $a \neq 0$.
Les fonctions **polynômes de degré 2** définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2ax + b$.
Les fonctions **polynômes de degré 3** définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Déterminer la fonction dérivée avec le taux de variation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-3x^2+5x$.
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f avec le taux de variation.

Méthode — Pour déterminer la fonction dérivée avec le taux de variation

1. Soit h un nombre réel non nul et x appartenant à l'intervalle donné. On **calcule** $f(x+h)$.
2. On **calcule** et on simplifie le quotient $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
3. On fait ensuite **tendre h vers 0** dans l'expression de $\tau(h)$. L'expression ainsi obtenue est l'expression de la fonction f'.

Solution

Soit h un nombre réel non nul et x un réel. On calcule $f(x+h)$.

$$\begin{aligned} f(x+h)&=-3(x+h)^2+5(x+h)\\ &=-3(x^2+2xh+h^2)+5x+5h\\ &=-3x^2-6xh-3h^2+5x+5h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{-3x^2-6xh-3h^2+5x+5h-(-3x^2+5x)}{h}\\ &=\frac{-3x^2-6xh-3h^2+5x+5h+3x^2-5x}{h}\\ &=\frac{-6xh-3h^2+5h}{h}=\frac{h(-6x-3h+5)}{h}=-6x-3h+5. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-6x-3h+5)=-6x+5$. Donc, pour tout x réel, $f'(x)=-6x+5$.

→ Voir Exercice 89 p. 119

Exercice résolu 4 — Déterminer une fonction dérivée avec les propriétés

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction donnée sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x)=-4x+9$ sur $\mathbb{R}$.
2. $g(x)=54x^2-78x+62$ sur $\mathbb{R}$.
3. $h(t)=-\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{5}{2}t^2-\dfrac{1}{6}t+\dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode — Pour déterminer une fonction dérivée avec les propriétés

1. On **détermine** la nature de la fonction.
2. On **applique** l'une des propriétés énoncées dans le cours.

Solution

1. f est une fonction affine de la forme $f(x)=ax+b$ avec $a=-4$ et $b=9$ donc, pour tout x réel, $f'(x)=-4$.
2. g est une fonction polynôme de degré 2 de la forme $g(x)=ax^2+bx+c$ avec $a=54$ et $b=-78$ et $c=62$ donc, pour tout x réel, $g'(x)=54\times 2x-78=108x-78$.
3. h est une fonction polynôme de degré 3 de la forme $h(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{5}{2}$, $c=-\dfrac{1}{6}$ et $d=\dfrac{3}{4}$ donc, pour tout x réel, $h'(t)=-\dfrac{1}{3}\times 3t^2+\dfrac{5}{2}\times 2t-\dfrac{1}{6}=-t^2+5t-\dfrac{1}{6}$.

→ Voir Exercices 28 à 36 p. 113

D Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I tels que $\boldsymbol{a<b}$.
Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $\boldsymbol{f'(x)\geqslant 0}$ alors la fonction f est **croissante** sur $[a\,;b]$.
Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $\boldsymbol{f'(x)\leqslant 0}$ alors la fonction f est **décroissante** sur $[a\,;b]$.
Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $\boldsymbol{f'(x)=0}$ alors la fonction f est **constante** sur $[a\,;b]$.

Remarque • L'étude du signe de la fonction dérivée constitue donc un outil très utile pour déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle.

→ Voir Exercice résolu 5

E Tableau de variation, extremums

Lorsque l'on étudie le **signe de la fonction dérivée**, il est pratique de dresser aussi un tableau de variation de la fonction.

Propriété Lorsque la fonction dérivée f' s'annule et change de signe, la fonction f atteint un **extremum local**.

Remarques

• Si la fonction dérivée est **négative** puis **positive**, la fonction atteint un **minimum local**.

• Si la fonction dérivée est **positive** puis **négative**, la fonction atteint un **maximum local**.

Exemple • Soit f la fonction définie sur $[-4\,;4]$ par $f(x)=2x^3-6x-4$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, $f'(x)=3\times 2x^2-6=6x^2-6=6(x^2-1)=6(x-1)(x+1)$.
On étudie le signe de $f'(x)$ en déterminant le signe de chaque terme de l'expression constituant $f'(x)$ dans le tableau de signes de la fonction f' comme ci-contre.

x	-4		-1		1		4
6		$+$		$+$		$+$	
$\boldsymbol{x+1}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\boldsymbol{x+1}$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de la fonction f.
$f(-1)=0$ est un maximum **local** atteint pour $x=-1$.
$f(1)=-8$ est un minimum **local** atteint pour $x=1$.
On remarque que le maximum de la fonction f est 100 et que le minimum vaut -108.

x	-4		-1		1		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-108	$\nearrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	100

Remarques

• On distingue extremum **global** d'extremum **local**.
Un extremum **global** est la plus petite ou la plus grande valeur atteinte par la fonction sur l'intervalle I. Sur cet exemple, 0 est un maximum local et 100 un maximum global. -8 est un minimum local et -108 un minimum global.

• On remarquera que pour un extremum local, la **tangente est horizontale** (la dérivée s'annule). Attention, on peut avoir une tangente horizontale sans que l'on ait un extremum local (ainsi, la courbe représentant la fonction cube admet une tangente horizontale en l'origine mais il n'y a pas d'extremum en 0).

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 Déterminer le sens de variation d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 3$.
Déterminer le sens de variation de la fonction f.

Méthode **Pour déterminer le sens de variation d'une fonction**

1. On **calcule** la fonction dérivée.
2. On **détermine** son signe sur l'intervalle en factorisant. On cherche d'abord une racine évidente.
3. On **applique** la propriété du cours.

Solution

La fonction f est une fonction polynôme de degré 3, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.
Pour déterminer le signe de $f'(x)$, on doit factoriser $f'(x)$ et donc trouver les racines du polynôme.
1 est une racine car $f'(1) = 0$ donc l'expression est factorisable par $(x - 1)$.
Il existe donc deux réels a et b tels que, pour tout x réel, $f'(x) = (x - 1)(ax + b)$.
En développant, on obtient : $f'(x) = ax^2 + bx - ax - b = ax^2 + (b - a)x - b$.
On a donc : $ax^2 + (b - a)x - b = 3x^2 + 6x - 9$. On identifie les coefficients : $a = 3$ et $(b - a) = 6$ et $b = 9$. D'où $a = 3$ et et $b = 9$.
Donc $f'(x) = (x - 1)(3x + 9) = (x - 1) \times 3(x + 3) = 3(x - 1)(x + 3)$. Les deux racines du polynôme sont donc (-3) et 1.
Par ailleurs, $a > 0$ donc la parabole représentant la fonction f' est tournée vers le haut.
f' est donc positive sur $]-\infty\,;-3]$, négative sur $[-3\,;1]$ et positive sur $[1\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-3]$, décroissante sur $[-3\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

→ Voir Exercices 43 à 55 p. 114

Exercice résolu 6 Déterminer les extremums d'une fonction avec la dérivée

Soit f la fonction définie sur $[-5\,;5]$ par :
$f(x) = -3x^2 + 12x + 1$.
Déterminer les extremums de la fonction f.

Méthode **Pour déterminer les extremums d'une fonction avec la dérivée**

1. On **étudie** le signe de f' et on en **déduit** le sens de variation de f.
2. S'il existe des valeurs de I pour lesquelles la dérivée s'annule et change de signe, f admet en ces valeurs des extremums locaux.
3. Pour savoir si ces extremums sont locaux ou globaux, on **dresse** le tableau complet de variation de f sur I.

Solution

f est dérivable sur $[-5\,;5]$ et pour tout x réel appartenant à $[-5\,;5]$, $f'(x) = (-3) \times 2x + 12 = -6x + 12$.
On étudie le signe de $f'(x)$: ici f' est une fonction affine décroissante (car $-6 < 0$) qui s'annule pour $x = 2$.
$f'(x)$ est donc positive sur $[-5\,;2]$ et négative sur $[2\,;5]$.
La fonction f est donc croissante sur $[-5\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;5]$.
On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	-5		2		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-134	↗	13	↘	-14

13 est un extremum local car $f'(2) = 0$ et la fonction f' change de signe. C'est également le maximum de la fonction f.
D'après le tableau de variation, le minimum atteint par la fonction est -134. Il est atteint pour $x = -5$.

→ Voir Exercices 57 et 58 p. 114

L'essentiel

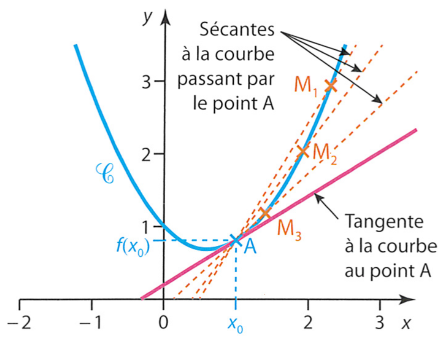
1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ et x_0 un nombre appartenant à l'intervalle I.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Le nombre dérivé de la fonction f en x_0 est la limite du taux de variation de f en x_0 lorsque h se rapproche de 0. On le note $f'(x_0)$.

On écrit : $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Tangente : la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse x_0 est la droite passant par le point A, position limite des sécantes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par A. Son **coefficient directeur** est $f'(x_0)$.



L'équation réduite de cette tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

2 Fonction dérivée

a, b, c et d sont quatre nombres réels.

Expression de la fonction f sur $\mathbb{R}$	Expression de la fonction f' sur $\mathbb{R}$
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Propriétés de dérivation : soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel. On a : $(f+g)' = f' + g'$ et $(kf)' = kf'$.

Dérivée et variations : soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I tels que $a < b$.

Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est **croissante** sur $[a\,;b]$.

Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est **décroissante** sur $[a\,;b]$.

Si, pour tout x appartenant $[a\,;b]$, $f'(x) = 0$ alors la fonction f est **constante** sur $[a\,;b]$.

Extremum : lorsque la fonction dérivée f' s'annule et change de signe, la fonction f atteint un **extremum local**.