4 Fonctions polynômes de degrés 2 et 3

CAPACITÉS

- Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2 pour $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2 ou 3.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du 1er degré) d'un polynôme de degré 2 ou 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Résoudre des équations de la forme $x^2 = c$ et $x^3 = c$ avec c positif.

Un nageur qui s'élance d'un plongeoir de 1,60 m suit une trajectoire parabolique. Cette dernière est fonction de la vitesse initiale et de l'angle d'inclinaison par rapport à la surface de l'eau.

En exploitant l'expression de la trajectoire du saut, peut-on trouver le point où le nageur tombera ?

Vidéo

Lançons des projectiles !

lienmini.fr/10333-18

→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 78

Pour retrouver les automatismes

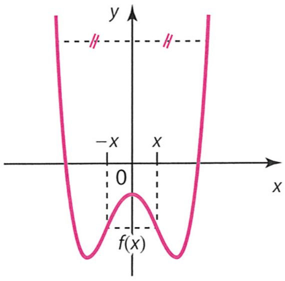
Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash
Diaporama
40 diapositives pour retrouver ses automatismes
lienmini.fr/10333-19

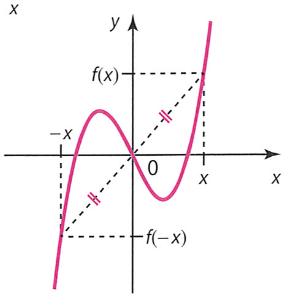
1 Parité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur tout intervalle centré en 0, c'est-à-dire du type $[-p\,;p]$ où p est un nombre réel positif.

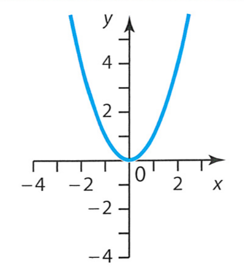
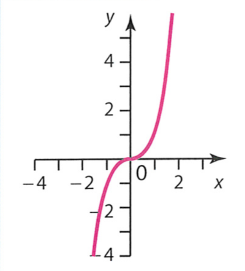
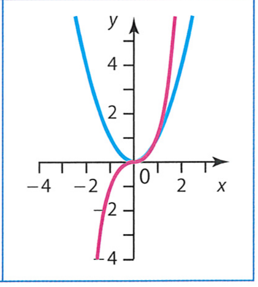
Fonction paire : on dit que f est paire si et seulement si on a, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$. La courbe d'une fonction paire est, dans un repère orthogonal, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Fonction impaire : on dit que f est impaire si et seulement si on a, pour tout réel x, $f(-x)=-f(x)$. La courbe d'une fonction impaire passe par l'origine O du repère et est symétrique par rapport à ce point.



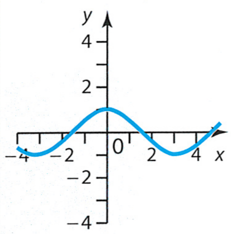
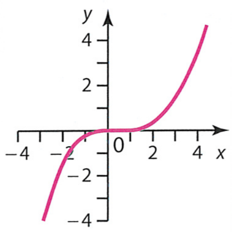
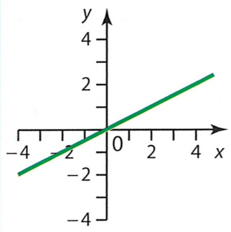
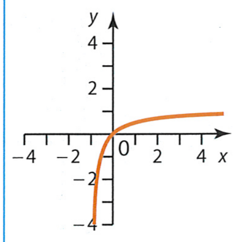
2 Courbe représentative des fonctions carré et cube

$f(x)=x^2$	$g(x)=x^3$	Comparaison
		

Remarque : si $x<1$, $x^3 \leqslant x^2$ et si $x>1$, $x^3>x^2$

Vérifier les acquis de Seconde

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. La seule fonction impaire est :					1
2. Le signe de $3-2x$ est :	négatif sur $\left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right]$	positif sur $\left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right]$	positif sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$	positif sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$	2
3. $x^2=5$ a pour solution(s)	$\dfrac{5}{2}$	(-5) et 5	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$	2
4. $x^3=8$ a pour solution(s) :	5	2	$\dfrac{8}{3}$	2 et (-2)	2

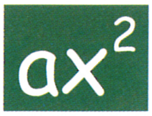
→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 À partir de la fonction carré GeoGebra

OBJECTIF Découvrir les propriétés des fonctions définies par $f(x) = ax^2$ → Cours 1A p. 80

f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$ où a est un réel (paramètre).



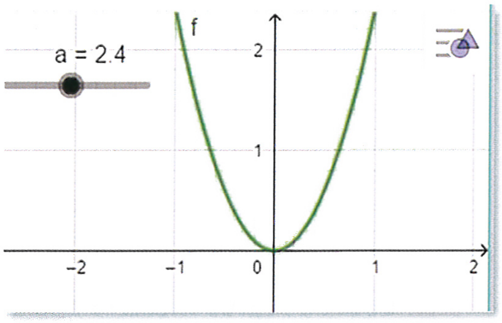
Cas $a = 2{,}4$

1. À l'aide de GeoGebra, représenter graphiquement la fonction f.

2. Calculer $f(0)$, $f(2)$ puis $f(-2)$.

3. En déduire graphiquement, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

4. Dans la barre de saisie, écrire $f(-x)$. Qu'observe-t-on sur le graphique ? Qu'elle propriété a-t-on observé graphiquement ?



Cas général

5. Ajouter un curseur a dans GeoGebra et dessiner la courbe représentative de f.

6. En faisant varier a, conjecturer le sens de variation de la fonction f.

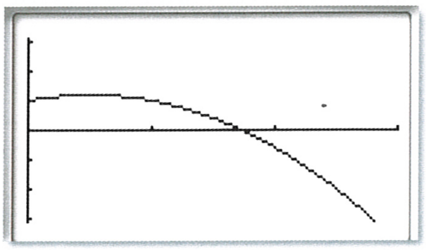
7. Est-ce utile d'envisager le cas où $a = 0$?

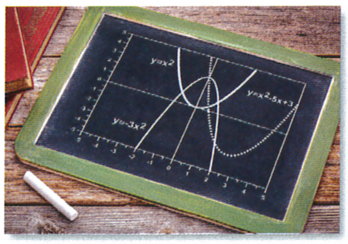
2 Plongeons dans les polynômes ! GeoGebra

OBJECTIF Découvrir les fonctions définies par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ → Cours 1C p. 82

On cherche à modéliser la trajectoire d'un saut à 1,60 mètre de l'eau.
Pour cela, on utilise la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ par $f(x) = -0{,}8x^2 + 0{,}8x + 1{,}6$ dans un repère orthonormal où l'axe des abscisses correspond au niveau de l'eau.
Ainsi les pieds du nageur partent du point A $(0\,;1{,}60)$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur la calculatrice et déterminer avec la précision permise par le graphique, les solutions de l'équation $f(x) = 0$.





2. À l'aide de GeoGebra, factoriser $f(x)$. Vérifier que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme $f(x) = -0{,}8(x + 1)(x - 2)$.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Que représentent les solutions de l'équation dans le contexte de l'exercice ?

4. Compte tenu des résultats précédents, vous semble-t-il possible de trouver cette forme factorisée entre **1** et **2** uniquement par lecture sur le graphique représentant la fonction ?

3 À vos agendas !

STMG SCIENCES DE GESTION

OBJECTIF Découvrir les propriétés des fonctions définies par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ → Cours 1C p. 82

Une entreprise vend des agendas. Le bénéfice réalisé sur un agenda dépend de la quantité produite. Pour une quantité x de centaines d'agendas comprise entre 0 et 10, le bénéfice $B(x)$ exprimé en euros est donné par : $B(x)=-200x^2+1500x-2\,200$.
Le directeur commercial cherche quelle quantité d'agendas il faudrait vendre pour que l'entreprise réalise un bénéfice.

1. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentant la fonction B. Lire graphiquement la réponse au problème posé.

2. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;10]$:
$-200(x-2)(x-5{,}5)=-200x^2+1500x-2\,200$.

b. Reproduire et compléter le tableau de signes suivant :

x	0	2	5,5	10
-200				
$x-2$				
$x-5{,}5$				
$-200(x-2)(x-5{,}5)$				

c. Retrouver le résultat de la question **1**.

4 À partir de la fonction cube

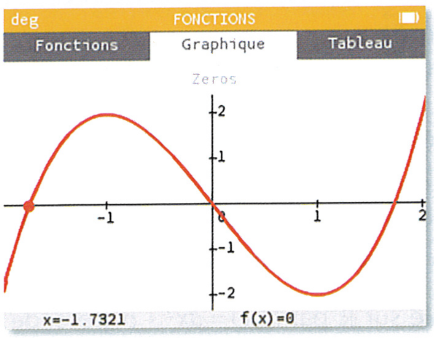
OBJECTIF Découvrir des fonctions polynômes de degré 3 → Cours 2 p. 84

Vianney pense qu'il existe des nombres réels dont le cube est égal au triple.

1. Représenter sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$.

2. Lire, avec la précision permise par le graphique, les images de -2, -1, 0 et 1.
Vianney a-t-il raison ?

3. On considère la fonction h définie pour tout nombre réel x par :
$h(x)=x^3-3x$.
h est une fonction polynôme de degré 3.



a. Afficher la courbe de la fonction h.

b. En déduire le nombre de solution de l'équation $h(x)=0$.

4. a. Factoriser x^3-3x.
En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $h(x)=0$.

b. Conclure.

Cours

1 Fonctions polynômes de degré 2

A Les fonctions $x \mapsto ax^2$

DÉFINITION On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2$ où a est un nombre réel non nul.
La courbe représentative $\mathscr{P}$ de f dans un repère orthogonal est une **parabole**.

Vocabulaire

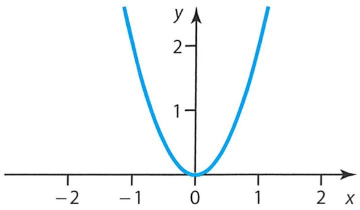
La **parabole** est une courbe plane que l'on peut définir comme l'intersection d'un cône par un plan.

REMARQUES

- Dans le cas où $a = 1$, on retrouve la fonction carré étudiée en Seconde.
- La fonction f est une fonction paire.

L'axe des ordonnées est axe de symétrie de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}$ passe par l'origine du repère. En effet, $f(0) = 0$.

EXEMPLE • Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$.
La représentation graphique de f est une parabole qui passe par l'origine du repère.



PROPRIÉTÉS Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2$.
Si $\boldsymbol{a > 0}$, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Si $\boldsymbol{a < 0}$, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

→ Voir Exercice résolu 1

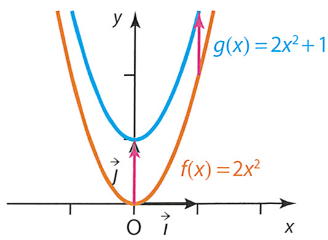
B Les fonctions $x \mapsto ax^2 + b$

DÉFINITION On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2 + b$ où a est un nombre réel non nul et b un nombre réel.
Sa courbe représentative $\mathscr{P}$ dans un repère orthogonal est une **parabole**.

REMARQUES

- Son sommet est le point $S(0\,;b)$.
- La parabole s'obtient comme image de la parabole représentant la fonction $x \mapsto ax^2$ par la translation de vecteur $b\vec{j}$.
- La parabole ainsi définie possède un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées car f est paire.
- Dans le cas où $b = 0$, on retrouve les fonctions étudiées ci-dessus

EXEMPLE • Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$.
Sa représentation graphique est une parabole. On l'obtient en effectuant sur la parabole représentant la fonction $x \mapsto 2x^2$ une translation de vecteur $\vec{j}$.



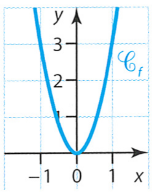
PROPRIÉTÉ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + b$ possède les mêmes variations que la fonction $x \mapsto ax^2$.

→ Voir Exercice résolu 2

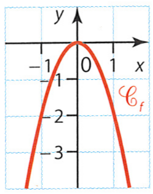
Exercice résolu 1 Associer une fonction à une parabole (1)

Pour chacune des deux fonctions f représentées ci-dessous, déterminer son expression.

1.



2.



Méthode **Pour déterminer une fonction $(x \mapsto ax^2)$ associée à une parabole**

❶ Si $\mathscr{C}$ a pour sommet l'origine du repère, l'expression de f est de la forme $f(x) = ax^2$.
❷ Si $\mathscr{C}$ est tournée vers le haut : $a > 0$, si $\mathscr{C}$ est tournée vers le bas : $a < 0$.
❸ Pour **déterminer** a : on lit l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.

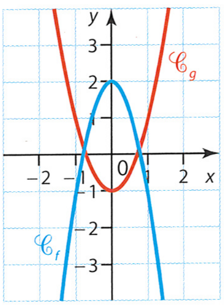
Solution

1. La parabole a pour sommet l'origine de repère. Elle est tournée vers le haut donc $a > 0$ et passe par le point A(1 ; 3) donc $a = 3$. On a donc pour tout x réel, $f(x) = 3x^2$.
2. La parabole a pour sommet l'origine de repère. Elle est tournée vers le bas donc $a < 0$ et passe par le point A(1 ; −2) donc $a = -2$. On a donc pour tout x réel, $f(x) = -2x^2$.

→ Voir Exercices 22 et 23 p. 90

Exercice résolu 2 Associer une fonction à une parabole (2)

Déterminer l'expression de chacune des fonctions f et g représentées ci-dessous.



Méthode **Pour déterminer une fonction $(x \mapsto ax^2 + b)$ associée à une parabole**

❶ Si $\mathscr{C}$ a pour axe de symétrie l'axe des ordonnées, l'expression de f est de la forme $f(x) = ax^2 + b$.
❷ Si $\mathscr{C}$ est tournée vers le haut $a > 0$, si $\mathscr{C}$ est tournée vers le bas $a < 0$.
❸ Pour **déterminer** b, on lit l'ordonnée du sommet.
❹ Pour **déterminer** a, on lit l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 qui est $f(1)$. Or $f(1) = a \times 1^2 + b = a + b$ donc la valeur de a s'obtient en résolvant cette équation, soit $a = f(1) - b$.

Solution

Fonction f : la parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle est tournée vers le bas donc $a < 0$. Son sommet a pour ordonnée 2 donc $b = 2$. Elle passe par le point A(1 ; −1) donc $f(1) = a + 2 = -1$ d'où $a = -1 - 2 = -3$. On a donc $f(x) = -3x^2 + 2$.
Fonction g : la parabole admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Elle est tournée vers le haut donc $a > 0$. Son sommet a pour ordonnée (−1) donc $b = -1$. Elle passe par le point A(1 ; 1) donc $f(1) = a - 1 = 1$ d'où $a = 1 + 1 = 2$. On a donc $f(x) = 2x^2 - 1$.

→ Voir Exercices 30 et 32 p. 90

Ⓒ Les fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

DÉFINITION On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où a est un nombre réel non nul et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. f est appelée **fonction polynôme de degré 2** et $\mathscr{P}$ est une **parabole.** Elle est tournée vers le haut si $a > 0$ et vers le bas si $a < 0$. L'expression de la fonction est appelée **polynôme de degré 2.**

REMARQUE • Il existe des fonctions polynômes de degré 2 qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$. On dit qu'elles ne sont pas factorisables. La parabole qui les représente ne coupe pas l'axe des abscisses.

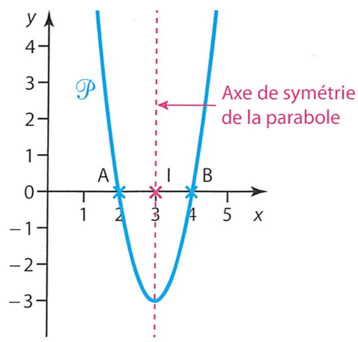
PROPRIÉTÉ Les points **d'intersection** A et B de la parabole avec **l'axe des abscisses** sont les points de coordonnées $(x_1\,;0)$ et $(x_2\,;0)$. Dans le cas où $x_1 = x_2$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0 \text{ car } a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2. \end{aligned}$$

DÉFINITION Les valeurs x_1 et x_2 sont appelées **racines du polynôme**. Ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Dans le cas où $x_1 = x_2$ on dit qu'il y a une racine **double.**

PROPRIÉTÉS $\mathscr{P}$ possède un **axe de symétrie.** Cet axe est une « droite verticale » dont l'équation est $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Le sommet de la parabole appartient à cet axe de symétrie. L'axe de symétrie passe par le point I milieu du segment [AB].

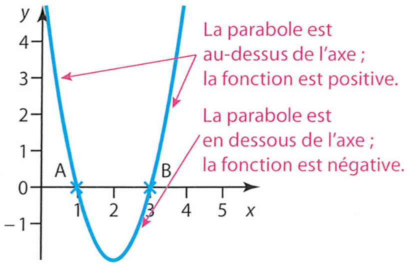


EXEMPLE • Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 3(x - 2)(x - 4)$. Elle coupe l'axe des abscisses aux points A(2 ; 0) et B(4 ; 0). L'axe de symétrie de $\mathscr{P}$ est la droite d'équation $x = \dfrac{2+4}{2}$, soit $x = 3$.

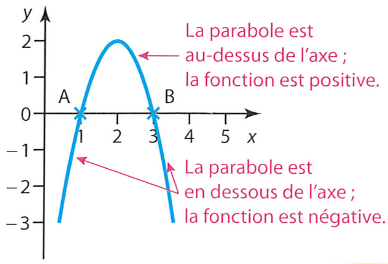
→ Voir Exercice résolu 3

PROPRIÉTÉS On suppose que $x_1 \leqslant x_2$.
Si $\boldsymbol{a < 0}$, la fonction est **négative** sauf sur l'intervalle $[x_1\,; x_2]$.
Si $\boldsymbol{a > 0}$, la fonction est **positive** sauf sur l'intervalle $[x_1\,; x_2]$.

Si $a > 0$



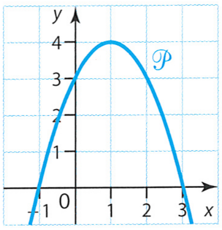
Si $a < 0$



→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 Associer une expression à une parabole (3)

Déterminer l'expression de la fonction représentée ci-dessous.



Méthode Pour déterminer une fonction $(x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2))$ associée à une parabole

1. On choisit un point $A(x_0\,;y_0)$ sur la parabole $\mathcal{P}$ tel que $x_0 \neq x_1 \neq x_2$.
2. On traduit ensuite l'appartenance de A à la parabole $\mathcal{P}$ par : $y_0 = f(x_0)$. On résout alors l'équation d'inconnue a.

Solution

$\mathcal{P}$ possède deux points d'intersection avec l'axe des abscisses donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$.
Donc $f(x) = a\,(x-(-1))(x-3) = a(x+1)(x-3)$.
$\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;3)$ donc $f(0) = 3$ soit $a(0+1)(0-3) = 3$ d'où $a = -1$.
Donc $f(x) = -(x+1)(x-3)$.

→ Voir Exercice 39 p. 91

Exercice résolu 4 Déterminer le signe de $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

1. Déterminer le signe de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2(x+3)(x-2)$.
2. Vérifier le résultat en dressant un tableau de signes.

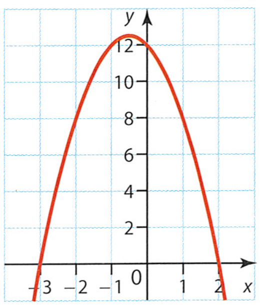
Méthode Pour déterminer le signe de $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 < x_2$

1. Si $a < 0$ la fonction est négative sauf sur l'intervalle $[x_1\,;x_2]$ et si $a > 0$ la fonction est positive sauf sur l'intervalle $[x_1\,;x_2]$
2. Tableau de signes : on consacre une ligne à chacun des termes : a, $(x - x_1)$ et $(x - x_2)$ puis on applique la règle des signes d'un produit.

Solution

1. $a = -2$ donc la parabole est tournée vers le bas. Par ailleurs, $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. La fonction sera donc négative sauf sur l'intervalle $[-3\,;2]$.
2. On vérifie à l'aide du tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	



→ Voir Exercice 40 p. 91

Cours

D Factorisation d'un polynôme connaissant une racine

PROPRIÉTÉ Les fonctions polynômes de **degré 2** s'écrivent sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels et $a \neq 0$.
Cette expression est la forme développée du polynôme.
On admet que si x_1 est une racine du polynôme, alors le polynôme est factorisable par $(x - x_1)$.

EXEMPLE • Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$. On remarque que 1 est une racine du polynôme car $f(1) = 0$. $f(x)$ est donc factorisable par $(x - 1)$. Il existe deux réels c et d tels que, pour tout x réel, $f(x) = (x - 1)(cx + d)$. Pour trouver les nombres c et d, on développe $(x - 1)(cx + d) = cx^2 + (d - c)x - d$ et on identifie les coefficients. On obtient : $c = 1$; $d - c = -3$ et $-d = 2$. D'où $f(x) = (x - 1)(x - 2)$.

→ Voir Exercice résolu 5

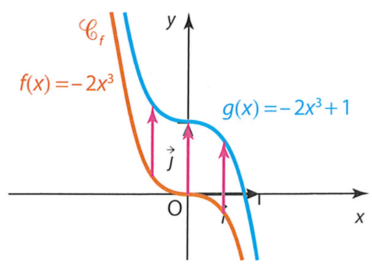
2 Fonctions polynômes de degré 3

A Les fonctions $x \mapsto ax^3 + b$

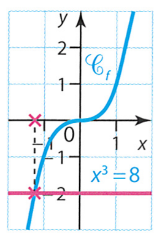
DÉFINITION On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^3 + b$ où a est un nombre réel non nul et b un nombre réel et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Cette fonction est une fonction **polynôme de degré 3**.

PROPRIÉTÉS
Si $\boldsymbol{a > 0}$, la fonction est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
Si $\boldsymbol{a < 0}$, la fonction est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ $\mathscr{C}_f$ s'obtient en effectuant sur la courbe représentant la fonction $x \mapsto ax^3$ une **translation** de vecteur $b\vec{j}$.



DÉFINITION
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = x^3$.
Pour tout réel c, l'équation $f(x) = c$ admet une solution unique.
Cette solution est appelée **racine cubique** de c ; on la note $\sqrt[3]{c}$ ou $c^{\frac{1}{3}}$.
Graphiquement, $\mathscr{C}_f$ coupe une et une seule fois la droite d'équation $y = c$.



EXEMPLES
- L'équation $x^3 = 8$ admet une unique solution : $x = \sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.
- L'équation $x^3 = -2$ admet une unique solution : $x = \sqrt[3]{-2}$.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Factoriser une expression de degré 2 connaissant une racine

Après avoir trouvé une racine, déterminer l'expression factorisée de la fonction g puis une seconde racine éventuelle.

$g(x) = -2x^2 + 6x + 8$ pour tout x réel.

Méthode — **Pour factoriser une expression de degré 2 connaissant une racine**

1. On **détermine** une racine dite « évidente » : x_1. On sait alors que l'expression est factorisable par $(x - x_1)$.
2. L'expression de la fonction peut alors **s'écrire** sous la forme $(x - x_1)(cx + d)$.
3. On **développe** alors cette expression et on **identifie** les coefficients avec ceux de l'expression développée, ce qui permet de trouver les valeurs de c et d.
4. Une fois que l'on a trouvé la forme factorisée, on peut **déterminer** la seconde racine.

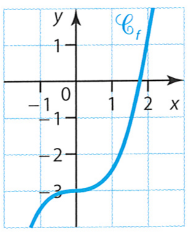
Solution

On remarque que $g(-1) = 0$ donc l'expression est factorisable par $(x - (-1))$, soit $(x + 1)$.
Il existe donc deux nombres c et d tels que $g(x) = (x+1)(cx+d)$.
Or $(x+1)(cx+d) = cx^2 + dx + cx + d = cx^2 + (d+c)x + d$.
On identifie alors les coefficients des deux expressions :
$c = -2$; $d + c = 6$ et $d = 8$. Soit $c = -2$ et $d = 8$.
Donc $g(x) = (x+1)(-2x+8) = (x+1)\times(-2)(x-4) = -2(x+1)(x-4)$.
La seconde racine est donc 4.

→ Voir Exercice 19 p. 89

Exercice résolu 6 — Associer une expression à une courbe

Déterminer l'expression de la fonction f représentée ci-contre sachant qu'elle est du type $x \mapsto ax^3 + b$.



Méthode — **Pour déterminer l'expression d'une fonction du type $x \mapsto ax^3 + b$ à partir de sa courbe**

1. On **cherche** l'ordonnée du point d'abscisse 0 de la courbe, c'est la valeur de b.
2. On **remplace** b par sa valeur dans l'équation $y = ax^3 + b$.
3. On **cherche** les coordonnées d'un point A de la courbe.
4. On **remplace** x et y par les coordonnées du point A dans l'équation $y = ax^3 + b$.
5. On **détermine** la valeur de a.

Solution

$b = -3$, donc l'équation est $y = ax^3 - 3$.
On repère le point A(2 ; 1) sur la courbe.
On a donc $1 = a \times 2^3 - 3$ d'où $a = \frac{1}{2}$.
La fonction représentée ici est donc la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3$.

→ Voir Exercice 48 p. 92

B Les fonctions $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Définition On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ où a est un nombre réel non nul et x_1, x_2 et x_3 trois nombres réels et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. Cette fonction est une fonction **polynôme de degré 3**.

Remarques

- On peut avoir l'égalité entre x_1 et x_2. Dans ce cas, l'expression de la fonction sera : $f(x)=a(x-x_1)^2(x-x_3)$. Si x_1, x_2 et x_3 sont égaux, $f(x)=a(x-x_1)^3$.
- Il existe des fonctions polynômes de degré 3 qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
- Dans le cas particulier où $x_1=x_2=x_3=0$, on retrouve les fonctions définies par $f(x)=ax^3$.

Propriété Les **points d'intersection** de la courbe avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x_1\,;0)$, $(x_2\,;0)$ et $(x_3\,;0)$.

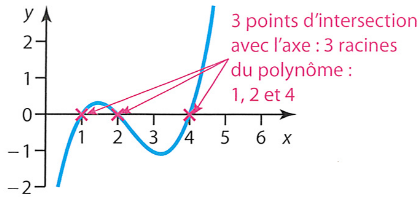
Démonstration

$f(x)=0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$

$\Leftrightarrow x-x_1=0$ ou $x-x_2=0$ ou $x-x_3=0$ car $a\neq 0$

$\Leftrightarrow x=x_1$ ou $x=x_2$ ou $x=x_3$.

Définition x_1, x_2 et x_3 sont appelées **racines du polynôme**. Ce sont les solutions de l'équation $f(x)=0$.



Exemple • Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}5(x-1)(x-2)(x-4)$. Le polynôme possède 3 racines : 1, 2 et 4.

Remarque • On peut n'avoir qu'une seule racine ou deux racines.

→ Voir Exercice résolu 7

Propriété Pour étudier le signe de la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, on dresse un tableau de signes.

Exemple • Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}5(x-1)(x-2)(x-4)$.

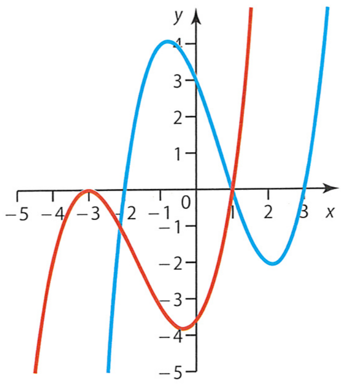
x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
0,5		+		+		+		+	
$x-1$		−	0	+		+		+	
$x-2$		−		−	0	+		+	
$x-4$		−		−		−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

On retrouve ce que l'on aurait pu conjecturer sur le graphique dans la marge.

→ Voir Exercice résolu 8

Exercice résolu 7 Déterminer les racines d'un polynôme de degré 3

On a représenté ci-contre les courbes de deux fonctions polynômes de degré 3.
Déterminer leurs racines.



Méthode Pour déterminer les racines d'un polynôme de degré 3

1. On **cherche** les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.
2. Leurs abscisses sont les racines du polynôme de degré 3.

Solution

La courbe bleue possède trois points d'intersection donc on a trois racines : -2, 1 et 3.
La courbe rouge possède deux points d'intersection donc on a deux racines : -3 et 1.
Remarque : (-3) est une racine double du polynôme.

→ Voir Exercice 55 p. 92

Exercice résolu 8 Déterminer le signe d'un polynôme de degré 3

Étudier le signe de chacune des fonctions polynômes :
1. $f(x)=-2(x-1)(x-4)(x+3)$.
2. $g(x)=3(x+1)^2(x-5)$.

Méthode Pour déterminer le signe d'un polynôme de degré 3

1. On **cherche** chacune des racines.
2. On **dresse** un tableau de signes en n'oubliant pas de faire apparaître le signe de a et en appliquant la règle du signe des expressions du type $ax+b$.
3. On **applique** la règle du signe d'un produit pour compléter la dernière ligne.

Solution

1. $-2(x-1)(x-4)(x+3)=0$ si $x=1$, $x=4$ ou $x=-3$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. $3(x+1)^2(x-5)=0$ si $x=-1$ ou $x=5$.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Remarque : $x+1$ est au carré dans l'expression donc (-1) est racine double : on lui consacre deux lignes dans le tableau

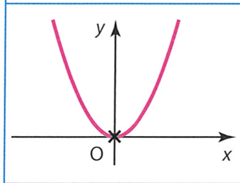
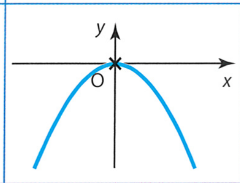
→ Voir Exercice 14 p. 89

L'essentiel

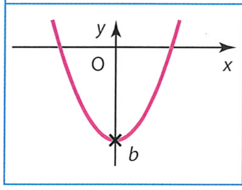
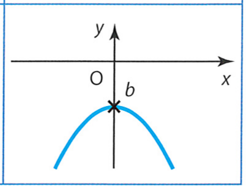
Les fonctions **polynômes de degré 2** étudiées sont les fonctions qui peuvent s'écrire sous l'une des trois formes : $f(x) = ax^2$; $f(x) = ax^2 + b$ ou $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a réel non nul et b, x_1, x_2 des réels.

Leur **forme développée** peut s'écrire $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b, c des réels. Elles sont représentées par des **paraboles**.

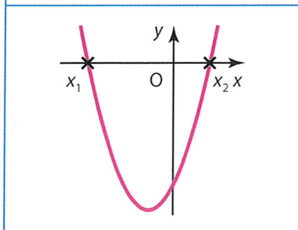
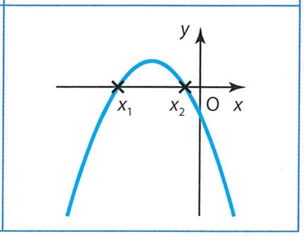
Les fonctions $x \mapsto ax^2$

$a > 0$	$a < 0$
	

Les fonctions $x \mapsto ax^2 + b$

$a > 0$	$a < 0$
	

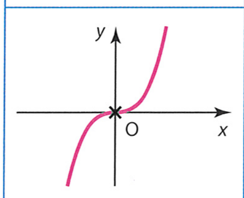
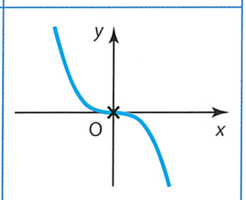
Les fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leqslant x_2$.

$a > 0$	$a < 0$
	

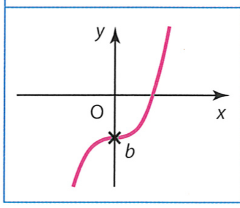
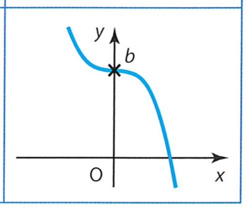
Les paraboles peuvent avoir deux ou un point (cas $x_1 = x_2$) d'intersection avec l'axe des abscisses. Les abscisses de ces points d'intersection sont les **racines** du polynôme, c'est-à-dire les valeurs en lesquelles la fonction s'annule.

Les fonctions **polynômes de degré 3** étudiées sont les fonctions qui peuvent s'écrire sous l'une des trois formes : $f(x) = ax^3$; $f(x) = ax^3 + b$ ou $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

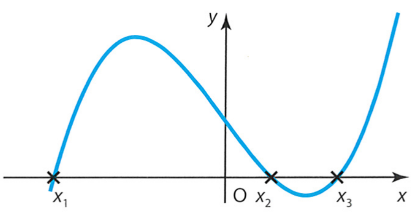
Les fonctions $x \mapsto ax^3$

$a > 0$	$a < 0$
	

Les fonctions $x \mapsto ax^3 + b$

$a > 0$	$a < 0$
	

Les fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec a avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$.



Les courbes peuvent avoir trois, deux ou un seul point d'intersection avec l'axe des abscisses. Les abscisses de ces points d'intersection sont les **racines du polynôme**, c'est-à-dire les valeurs en lesquelles la fonction s'annule.