3 Généralités sur les fonctions

CAPACITÉS

- Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.
- Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ ou une inéquation de la forme $f(x) \leqslant k$ ou $f(x) \geqslant k$.
- Interpréter le taux de variation comme pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts.

Félix Baumgartner, au moment de s'élancer.

En 2012, Félix Baumgartner a réalisé un saut historique, inscrivant trois records à son palmarès : celui de la plus haute altitude atteinte par un homme en ballon (38 969 km), le record du plus haut saut en chute libre (36 529 km), et le record de vitesse en chute libre (1 357,6 km.h^{-1}) !

Vidéo
Revivons l'exploit de Baumgartner
lienmini.fr/10333-12

Félix Baumgartner était en chute libre lors du passage du mur du son, mais l'était-il vraiment selon les sciences physiques ?

→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 56

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash

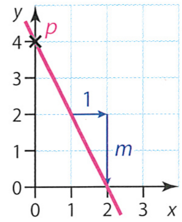
Diaporama

40 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-13

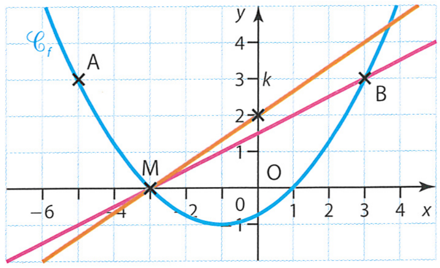
1 Fonction affine

On appelle fonction affine toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont deux nombres réels donnés. La représentation graphique de f est la droite d d'équation $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur (ou pente) et p est l'ordonnée à l'origine.



2 Déterminer l'équation d'une droite sous la forme $y = mx + p$

- **Graphiquement**, $m = \dfrac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$.
- **Par le calcul**, à partir de deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ de la droite tels que $x_A \neq x_B$, on calcule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. On remplace m par sa valeur dans l'équation et on écrit que les coordonnées du point A (par exemple) vérifient l'équation $y_A = mx_A + p$. On en déduit ainsi p.
- Les **antécédents** de k par f sont **les abscisses** des points A et B.



Vérifier les acquis de Seconde

QCM Pour chacune des questions posées, utiliser le graphique ci-contre représentant une fonction f définie sur $\mathbb{R}$; indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. (MN) est la représentation graphique de g définie par :	$g(x) = \frac{2}{3}x + 2$	$g(x) = 1{,}5x + 2$	$g(x) = \frac{-2}{3}x + 2$	$g(x) = 2x - 2{,}5$	1
2. La droite (OA) a pour équation :	$y = 3$	$y = -4$	$y = -\frac{5}{3}x$	$y = -\frac{3}{5}x$	2
3. (MB) a pour équation $y = mx + p$ avec :	$m = \frac{3}{6}$ et $p = 1{,}5$	$m = 1{,}5$ et $p = 1{,}5$	$m = -\frac{1}{2}$ et $p = 1{,}5$	$m = 2$ et $p = 2$	2
4. Le nombre -2 :	a un antécédent qui est $-3{,}5$ par f	a deux antécédents qui sont -3 et 1 par f	n'a pas d'antécédent par f	a deux images qui sont -3 et 1 par f	2
5. Le nombre 3 :	a deux antécédents par f	n'a pas d'antécédent par f	a un seul antécédent par f	n'a pas d'image par f	2
6. f vérifie :	$f(0) = -\frac{3}{4}$	$f(0) = -3$	$f(-1) = 0$	$f(-1) = 1$	2
7. $B(3\,;3) \in \mathscr{C}_f$ avec f définie par :	$f(x) = 2x - 2$	$f(x) = 2x^2 - 3x$	$f(x) = 0{,}25(x+1)^2 - 1$	$f(x) = 2x^2 - 3$	2

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Le problème de la casserole

GEOGEBRA

STI2D INGÉNIERIE

OBJECTIF Modéliser une situation réelle → Cours 1 p. 58

On se propose de montrer que pour un volume V fixé, la casserole « économique », c'est-à-dire qui utilise le moins de métal pour sa fabrication, est celle dont le rayon est égal à la hauteur. L'aire des surfaces latérales (fond + bord) doit donc être minimale.
On désigne pour la suite par r le rayon du fond de la casserole, h la hauteur et S l'aire des surfaces latérales.

1. Exprimer le volume V de la casserole en fonction de r et h. En déduire une expression de h en fonction de V et r.

2. Justifier que $S = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

3. Conjecturer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique la propriété de la casserole « économique ».

Lienmini.fr/10333-14

4. On donne le tableau de variations de la fonction S qui à tout nombre réel strictement positif r associe l'aire latérale de la casserole ; dans ce tableau, r_0 est tel que $r_0^3 = \dfrac{V}{\pi}$ (r_0 est la « racine cubique » de $\dfrac{V}{\pi}$, voir chap. 4). Conclure.

r	0	r_0	$+\infty$
$S(r)$	‖ ↘	$f(r_0)$	↗

2 Chute libre en parachutisme et en physique

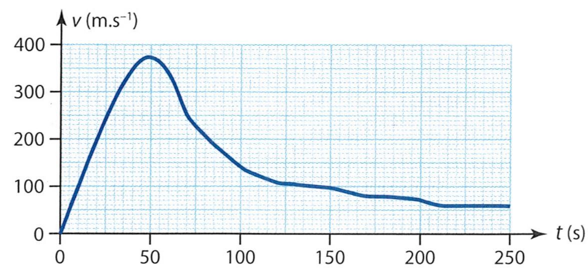
PHYSIQUE

OBJECTIF Calculer un taux de variation → Cours 3 p. 60

L'Autrichien Félix Baumgartner a franchi le mur du son (c'est-à-dire dépassé la vitesse de 340 m.s^{-1}, soit 1 224 km.h^{-1}) après quelques dizaines de secondes de chute libre et a ensuite ouvert son parachute. Sa chute libre a duré 4 minutes 19 secondes. Le graphique ci-dessous donne l'évolution de la vitesse atteinte par Baumgartner en fonction du temps.

1. Par lecture du graphique, répondre aux questions suivantes (donner des valeurs approchées à l'unité) :
a. À quel moment a-t-il dépassé la vitesse du son ?
b. Quand a-t-il atteint sa vitesse maximale ?

2. Ici, la vitesse est-elle fonction du temps ?



3. On souhaite calculer l'accélération moyenne de Baumgarten à divers moments entre le début de son saut et le moment où il a atteint sa vitesse maximale.
L'accélération moyenne a entre deux instants t_1 et t_2 se calcule ainsi : $a = \dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$. On dit que a est le taux de variation de la vitesse entre ces deux instants. a s'exprime ici en m.s^{-2}. Calculer l'accélération moyenne entre les instants $t = 0$ et $t = 10$; entre les instants $t = 10$ et $t = 30$; entre les instants $t = 30$ et $t = 50$. Arrondir au dixième les résultats.

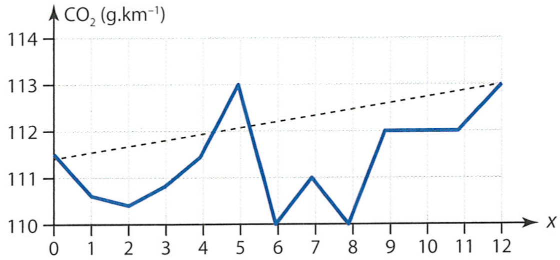
4. En physique, un corps dit « en chute libre » et lâché sans vitesse initiale a une accélération de 9,81 m.s^{-2}. D'après les réponses à la question **3.**, peut-on considérer que Baumgartner était « en chute libre » selon les lois de la physique ? Si oui, sur quelle période ?

3 Alerte pollution

ENVIRONNEMENT

OBJECTIF Découvrir un cas de modélisation particulier → Cours 1 p. 58

Le graphique ci-contre donne les émissions moyenne de CO_2 (exprimées en grammes de CO_2 par kilomètre) des voitures neuves, immatriculées chaque année en France, entre les points représentant juillet 2017 et juillet 2018. x_i représente le rang du mois (rang 0 pour juillet 2017).



1. On souhaite modéliser ces émissions moyennes de CO_2 par une fonction f. Pour ce faire, on a tracé une droite en pointillés entre juillet 2017 et juillet 2018. Cette droite est la représentation graphique de la fonction f. Déterminer l'expression de cette fonction.

2. En 2014 les émissions moyenne de CO_2 étaient de 114 g de CO_2 par km. Comparer ce résultat à celui obtenu en utilisant le modèle.

3. L'Europe souhaite atteindre 60 g de CO_2 par km en 2030 pour les voitures particulières neuves. Selon ce modèle, la France atteindra-t-elle cet objectif ? Argumentez

4 Un smash sinon rien ! PYTHON GEOGEBRA

PHYSIQUE

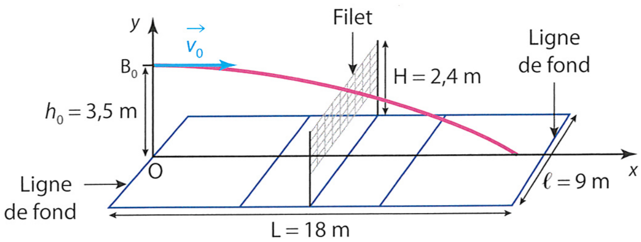
OBJECTIF Modéliser dans le cas d'une fonction avec des paramètres → Cours 2 p. 58

Au volley-ball, le service smashé est le type de service pratiqué le plus fréquemment par les professionnels. Après la course d'élan, le serveur saute de façon à frapper le ballon en un point B_0 situé à la hauteur h au-dessus de la ligne de fond du terrain. La hauteur h_0 désigne alors l'altitude initiale du centre du ballon. Le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$ du ballon est horizontal et perpendiculaire à la ligne de fond du terrain. Le mouvement a lieu dans le plan (xOy). On sait que la hauteur du ballon, en fonction de la distance x qu'il a parcourue, est : $h(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2}x^2 + h_0$ avec $g \approx 9{,}81$. m .s^{-2}

1. À l'aide de la calculatrice ou de Geogebra, construire la courbe représentative de h pour $v_0 = 21$ m·s^{-1} et $h_0 = 3{,}5$ m.

2. Le ballon touchera-t-il le filet ?

3. Déterminer la distance parcourue par le ballon au moment où il touche le sol, c'est-à-dire déterminer la valeur de x pour laquelle $h(x) = 0$.



4. a. On considère le programme suivant.
Que renvoie la fonction h ?

```
from lycee import *

def h(x,v0):
    g=9.81
    h0=3.5
    return -g/(2*v0**2)*x**2+h0

def filet(v0):
    if h(9,v0)>2.4 :
        return 1
    return 0
```

b. Interpréter la capture d'écran suivante :

```
...module lycee actif....
>>> filet(21)
1
```

c. Proposer un programme qui permette de déterminer la vitesse minimale pour laquelle la balle passe le filet.

Cours

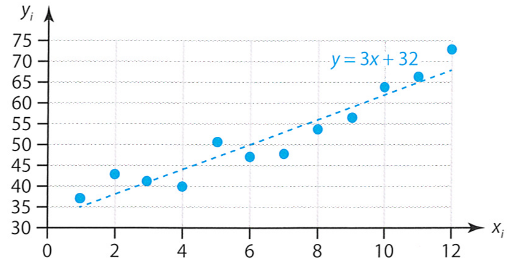
1 Modélisation et fonctions

A Introduction

Les fonctions permettent de modéliser des situations où deux grandeurs sont liées (dépendantes).
Dans certains cas, une fonction se dégage de façon évidente, dans d'autres, des relevés de données et leur représentation graphique peuvent amener à choisir un modèle décrivant le lien entre les variables par une fonction.

Exemple 1 • Un restaurateur propose uniquement des menus tout compris à 15 € ; il ne peut préparer plus de 60 menus par jour. Si x désigne le nombre de clients ayant commandé un menu et y la recette, alors x et y sont liés par la relation $y = 15x$, avec x entier naturel et $x \in [0;60]$.

Exemple 2 • On étudie l'évolution du nombre d'abonnements à un jeu vidéo en ligne au cours du temps.
x_i représente le rang du mois (rang 1 pour janvier) et y_i le nombre d'inscriptions en milliers. On donne aussi le nuage de points associé.
On peut construire une droite passant « au plus près de ces points », ici la droite d'équation $y = 3x + 32$.



→ Voir Exercice résolu 1

B Définition d'une fonction

Définition I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. Lorsqu'à chaque nombre réel x appartenant à I, on associe un seul nombre réel y, on définit une fonction f sur I. I est appelé « l'ensemble de définition de la fonction f ».

On note $f : x \mapsto y$ et on lit « la fonction f qui à x associe y ».
Alors $y = f(x)$ et on lit « y égal f de x ».

Remarques
- On dit que y est **l'image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f.
- On utilise aussi la notation $f : \begin{array}{l} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y \end{array}$ qui donne en plus l'ensemble de définition I.
- Si x est un réel appartenant à I, alors $f(x)$ est un réel. Il ne faut pas confondre f et $f(x)$. Ainsi, on dit « la fonction racine carré » plutôt que « racine carrée de x ».

Histoire des maths

En 1717, le mathématicien **Jean Bernoulli** donne une première définition de la notion de fonction :
« On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes ».

2 Divers modes de représentation d'une fonction

Une fonction peut être définie à l'aide d'une **représentation graphique** ou d'une **expression littérale.**

Exemple • La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par :
$f(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 10$ avec $g \approx 9{,}81\,\text{ms}^{-2}$ (accélération de la pesanteur).
Cette fonction modélise la distance verticale parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur de 10 m pendant le temps t écoulé en secondes depuis le lâcher. Cette fonction est définie sur $[0;+\infty[$ car t est une grandeur positive.

→ Voir Exercice résolu 2

Exercice résolu 1 — Modéliser une situation à l'aide d'une fonction

Matthieu doit prendre le bus chaque matin pour se rendre au lycée ; il observe les tarifs :
Formule A : un ticket de bus coûte 1,30 € sans abonnement.
Formule B : avec un abonnement mensuel de 10 €, le ticket coûte 1 €.
Déterminer les fonctions qui donnent le tarif en fonction du nombre de tickets achetés.

Méthode — Pour modéliser une situation à l'aide d'une fonction

❶ S'il existe une relation de dépendance entre les variables, alors on peut **exprimer** l'une en fonction de l'autre et définir ainsi une fonction f.
❷ On **décrit** les variables puis on « **traduit** l'énoncé » pour obtenir l'expression littérale de f.

Solution

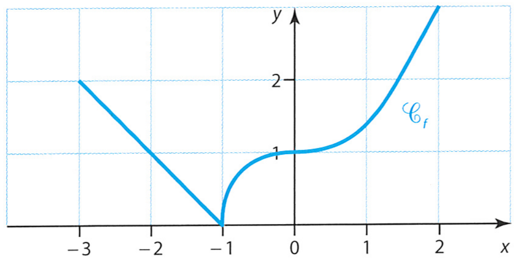
Désignons par :
- x le nombre de tickets achetés ;
- $f_A(x)$ le tarif avec la formule A ;
- $f_B(x)$ le tarif avec la formule B.

Alors $f_A(x) = 1{,}3x$ et $f_B(x) = 1 \times x + 10 = x + 10$.

→ Voir Exercices 20 à 23 p. 66

Exercice résolu 2 — Résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) \leqslant k$

Soit f la fonction définie sur $[-3;2]$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$.
Résoudre graphiquement dans $[-3;2]$:
1. l'équation $f(x) = 1{,}4$.
2. l'inéquation $f(x) \leqslant 1{,}4$.

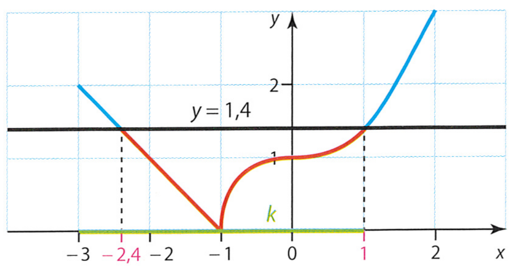


Méthode — Pour résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) \leqslant k$

❶ On **trace** la droite d'équation $y = k$. On repère les points de $\mathscr{C}_f$ situés sur droite. On lit leurs abscisses.
❷ On **repère** les points de $\mathscr{C}_f$ situés sur, en dessous (ou au-dessus) de la droite d'équation $y = k$. Dans l'intervalle donné, on **détermine** l'ensemble des abscisses de ces points.

Solution

1. On trace la droite d'équation $y = 1{,}4$. Cette droite coupe $\mathscr{C}_f$ en deux points. On lit leurs abscisses. Les solutions sont $-2{,}4$ et 1.
2. On trace la droite d'équation $y = 1{,}4$.
On repère les points de $\mathscr{C}_f$ situés en dessous de cette droite (en rouge).
On détermine l'ensemble des abscisses (en vert) appartenant à $[-3;2]$.
S étant l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 1{,}4$, on a : $S = [-2{,}4;1]$.



→ Voir Exercices 28 à 30 p. 67

3 Taux de variation

A Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. a et b sont deux nombres réels distincts appartenant à I. Le taux de variation de f entre a et b est le nombre réel $\tau(a,b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Remarques

- On utilise la lettre grecque τ (qui se lit « Tau ») pour désigner le taux de variation.
- Le taux de variation est aussi appelé **taux d'accroissement.**
- On dit indifféremment : « le taux de variation de f entre a et b » ou « le taux de variation de f sur l'intervalle $[a\,;b]$ ».

Exemple 1 • La fonction carré

Le taux de variation de la fonction carré entre a et b, deux réels distincts, est :

$$\tau(a,b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-a^2)}{(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=b+a$$

Exemple 2 • Les fonctions affines

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=mx+p$, où m et p sont deux nombres réels.

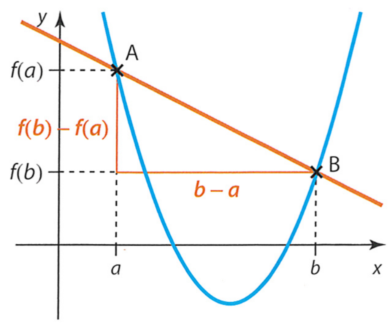
Le taux de variation de f entre a et b est :

$$\tau(a,b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{mb+p-ma-p}{b-a}=\frac{m(b-a)}{b-a}=m$$

Le taux de variation de f ne dépend pas de a et b. Il est égal au coefficient directeur de la droite, représentation graphique de la fonction f.

→ Voir Exercice résolu 3

B Interprétation géométrique



Le taux de variation est la pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts de la courbe.

Exemple • Le taux de variation de f entre les points A et B est la pente (le coefficient directeur) de la droite passant par les points A et B de coordonnées $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$.

Certaines grandeurs correspondent à des taux de variation :

- **La vitesse moyenne** v entre deux instants t_1 et t_2 est le taux de variation de la distance parcourue d par rapport à la durée de l'intervalle de temps :

$$\text{vitesse moyenne entre } t_1 \text{ et } t_2=\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}.$$

- **L'accélération moyenne** sur un intervalle de temps est le taux de variation de la vitesse v par rapport à la durée de l'intervalle de temps :

$$\text{accélération moyenne entre } t_1 \text{ et } t_2=\frac{v(t_2)-v(t_1)}{t_2-t_1}.$$

→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 — Calculer un taux de variation à partir d'une expression littérale

Dans chacun des cas suivants, calculer le taux de variation de f entre 2 et 6.

1. $f(x) = -7x + 3$.

2. $f(x) = x^3 - 6x$.

Méthode — Pour calculer le taux de variation à partir d'une expression littérale

1 Si l'expression littérale est celle d'une fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, alors le taux de variation entre deux réels a et b distincts est égal à m.

2 Pour une autre expression littérale, on **calcule** les images de a et b, c'est-à-dire $f(a)$ et $f(b)$.

Solution

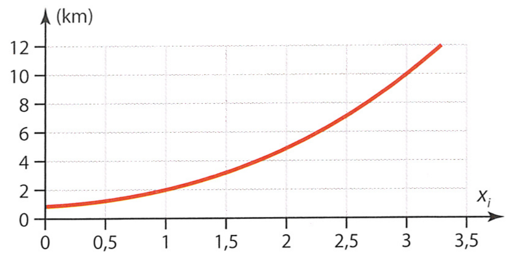
1. On reconnaît la forme $f(x) = mx + p$ avec $m = -7$ et $p = 3$.
Le taux de variation de f entre 2 et 6 est donc $\tau(2, 6) = -7$.

2. $f(2) = 2^3 - 6 \times 2 = -4$. $f(6) = 6^3 - 6 \times 6 = 180$.
Le taux de variation de f entre 2 et 6 est donc :
$$\tau(2, 6) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{180 - (-4)}{6 - 2} = \frac{184}{4} = 46$$

→ Voir Exercices 31 à 35 p. 67

Exercice résolu 4 — Calculer un taux de variation à partir de la courbe d'une fonction

La courbe ci-contre représente la distance d (en km) parcourue par un randonneur en fonction du temps t (en h).



1. Calculer le taux de variation de d entre 1 et 3.

2. Interpréter graphiquement ce nombre.

3. Interpréter concrètement le taux de variation de d entre 1 et 3.

Méthode — Pour calculer un taux de variation à partir d'une courbe

1 On **repère** sur l'axe des abscisses les deux valeurs a et b entre lesquelles on veut calculer le taux de variation.

2 On **repère** les points A et B de la courbe d'abscisses a et b. On lit leurs ordonnées respectives $d(a)$ et $d(b)$.

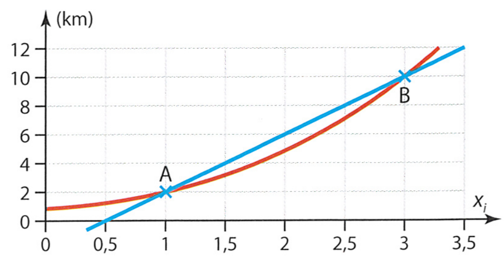
3 Le taux de variation est le coefficient directeur de la droite (AB). On le **lit** graphiquement ou on le **calcule**.

Solution

1. Soit A le point de la courbe d'abscisse 1, son ordonnée est 2 donc A (1 ; 2). Soit B le point de la courbe d'abscisse 3, son ordonnée est 10 donc B (3 ; 10).
Le taux de variation de d entre 1 et 3 est $\tau(1, 3) = \frac{10 - 2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$.

2. Comme le taux de variation est la pente de la sécante à la courbe passant par deux points distincts, la sécante (AB) à la courbe a pour pente 4.

3. Le taux de variation de d entre 1 et 3 est la variation de la distance (en km) par rapport au temps (en h) : c'est la vitesse moyenne du randonneur entre les instants $a = 1$ h et $b = 3$ h.



→ Voir Exercices 36 à 40 p. 68

4 Fonctions monotones et signe du taux de variation

A Fonctions monotones sur un intervalle

Vocabulaire

Une fonction est **monotone** sur un intervalle I si elle garde le même sens de variation sur I (croissant ou décroissant).

DÉFINITION

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
f est strictement **croissante** sur I si, pour tous nombres réels a et b de I tels que $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{f(a) < f(b)}$.
f est strictement **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels a et b de I tels que $\boldsymbol{a < b}$, alors $\boldsymbol{f(a) > f(b)}$.
f est **constante** sur I si et seulement si il existe un nombre réel k tel que, pour tout nombre réel x de I, $\boldsymbol{f(x) = k}$.

REMARQUE • f est croissante (respectivement décroissante) sur I si, pour tous nombres réels a et b de I tels que $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement $f(a) \geqslant f(b)$).

EXEMPLE • Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-3\,;5]$. L'étude des variations de f a permis de montrer que f est strictement décroissante sur $]-3\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;5]$. On obtient ainsi le tableau de variations ci-contre.
Parfois, on trouve écrit « **Variations de f** » à la place de « $\boldsymbol{f(x)}$ ».
La double barre indique que $-3 \notin \mathrm{I}$.

f	-3	1	5
$f(x)$	‖ ↘	$f(1)$	↗ $f(5)$

→ Voir Exercice résolu 5

B Taux de variation et sens de variation

PROPRIÉTÉS

f désigne une fonction définie sur un intervalle I.
Si pour tous réels distincts a et b de I :
$\boldsymbol{\tau(a,b) > 0}$ alors f est strictement **croissante** sur I.
$\boldsymbol{\tau(a,b) < 0}$ alors f est strictement **décroissante** sur I.
$\boldsymbol{\tau(a,b) = 0}$ alors la fonction f est **constante** sur I.

DÉMONSTRATION

$\tau(a,b) > 0$ signifie que $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de même signe car un quotient de deux nombres réels est positif si et seulement si le numérateur et le dénominateur sont de même signe (positif ou négatif).
Cela signifie que f conserve l'ordre : elle est strictement croissante.
Si par contre $\tau(a,b) < 0$, alors $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de signes contraires.
Cela signifie que f inverse l'ordre : f est strictement décroissante.

EXEMPLE • Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Comme le taux de variation d'une fonction affine est égal à m, on en déduit que si $m < 0$, alors f est strictement décroissante, si $m > 0$, f est strictement croissante et si $m = 0$, f est constante sur $\mathbb{R}$.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Montrer qu'une fonction est monotone sur un intervalle

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Méthode — Pour montrer qu'une fonction est monotone sur un intervalle

1. On **considère** deux réels a et b tels que $a < b$.
2. On **compare** $f(a)$ et $f(b)$. On conclut en fonction du signe trouvé de $f(a) - f(b)$.

Solution

f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit a et b deux réels distincts appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et tels que $a < b$.

$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.

Comme $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$.

Ainsi $\frac{b-a}{ab} > 0$ donc $f(a) > f(b)$.

f est donc strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

→ Voir Exercice 37 p. 68

Exercice résolu 6 — Déterminer les variations d'une fonction à partir du signe du taux de variation

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 2x$.
Déterminer le sens de variation de g sur $[-1\,;+\infty[$.

Méthode — Pour déterminer les variations d'une fonction à partir du signe du taux de variation

1. On **considère** deux réels a et b quelconques de l'intervalle sur lequel on veut étudier le sens de variation de la fonction.
2. On « **calcule** » le taux de variation $\tau(a, b)$.
3. On **étudie** son signe puis on **conclut**.

Solution

Soit a et b deux réels distincts appartenant à l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.
On a donc :
$a \geqslant -1$
$b \geqslant -1$
et $a \neq b$.

$$\tau(a, b) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{(b^2 + 2b) - (a^2 + 2a)}{b - a}$$
$$= \frac{b^2 - a^2 + 2b - 2a}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a) + 2(b-a)}{b - a}$$

$= b + a + 2$ (on a simplifié le quotient par $b - a$).

Comme $a \geqslant -1$ et $b \geqslant -1$ et $a \neq b$ alors $a + b > -1 + (-1)$, soit $a + b + 2 > 0$.

$a + b + 2 = b + a + 2 = \tau(a, b)$.

$\tau(a, b) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.

→ Voir Exercices 61 et 62 p. 71

L'essentiel

1 Modélisation et fonctions

Quand deux grandeurs mesurables sont dépendantes l'une de l'autre, on dit que l'une est **fonction de** l'autre. Une relation algébrique permet souvent de passer de l'une à l'autre.

Par exemple, l'aire $\mathscr{A}$ d'un carré est *fonction de* son côté c. La relation algébrique liant ces deux grandeurs est : $\mathscr{A} = c \times c$.

2 Divers modes de représentation d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction f** sur I, c'est associer à chaque nombre réel x de I un seul nombre réel y. On note $\boldsymbol{f : x \mapsto y}$ **et** $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Une fonction peut être définie à l'aide :
- d'une expression littérale.
- d'une courbe.
- d'un tableau de valeurs.

3 Taux de variation

Pour une fonction f définie sur un intervalle I et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I, le **taux de variation de f entre a et b** est le nombre réel $\tau(a,b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Cas des fonctions affines : leur taux de variation est constant. Il est égal au **coefficient directeur** (**la pente**) de la droite représentant graphiquement la fonction f.

4 Fonctions monotones et signe du taux de variation

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est strictement croissante ou strictement décroissante ou constante.

- Une fonction f est strictement **croissante** sur un intervalle I si elle **conserve l'ordre** sur cet intervalle, c'est-à-dire que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- Une fonction f est strictement **décroissante** sur un intervalle I si elle **inverse l'ordre** sur cet intervalle c'est-à-dire que pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.
- Une fonction f est **constante** sur un intervalle I s'il existe un nombre réel k, tel que pour tout réel x de I, $f(x) = k$.

On résume souvent l'étude des variations d'une fonction dans un **tableau de variations**.

Le taux de variation d'une fonction permet de déterminer sa monotonie.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si pour tous réels distincts a et b de I,
- $\boldsymbol{\tau(a,b) > 0}$ alors f est strictement **croissante** sur I.
- $\boldsymbol{\tau(a,b) < 0}$ alors la fonction f est strictement **décroissante** sur I.
- $\boldsymbol{\tau(a,b) = 0}$ alors la fonction f est **constante** sur I.