2 Suites arithmétiques et géométriques

CAPACITÉS

- Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
- Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.
- Reconnaître si une situation relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle

Si on réalise une expérimentation sur un même sol avec divers ballons, on s'aperçoit qu'un ballon de basket rebondit plus haut qu'une balle de hand-ball ou qu'une balle de tennis, mais moins haut qu'une balle de golf.
Tous ces ballons (ou balles) ont toutefois ce caractère commun : la hauteur des rebonds diminue avec le temps !
Les suites aident à calculer la hauteur entre deux rebonds successifs. Dès lors, on peut se poser la question :

Site
Le rebond au basket
lienmini.fr/10333-06

Au bout de combien de rebonds, une balle donnée ne va plus rebondir ?

→ Pour le découvrir **Activité 2** p. 34

Pour retrouver les automatismes

Revoir les acquis de Seconde

Questions Flash

Diaporama

20 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-07

1 Évolutions

- Soit une grandeur qui évolue d'une valeur initiale V_I à une valeur finale V_F. La variation absolue est le nombre $V_F - V_I$.
- Le taux d'évolution (ou variation relative) est le nombre $t = \dfrac{V_F - V_I}{V_I}$.
Si $t > 0$, s'il s'agit d'une hausse et $t < 0$ pour une baisse.
- Le coefficient multiplicateur de V_I à V_F est le nombre positif CM tel que $V_F = CM \times V_I$.
- $CM = 1 + t$. Si $CM > 1$ alors c'est une augmentation (hausse), sinon c'est une diminution (baisse).
- Si une grandeur subit n évolutions successives de coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \ldots, CM_n$ alors le coefficient multiplicateur global est leur produit : $CM_{\text{glo}} = CM_1 \times CM_2 \times \ldots \times CM_n$.

2 Calculs avec les puissances

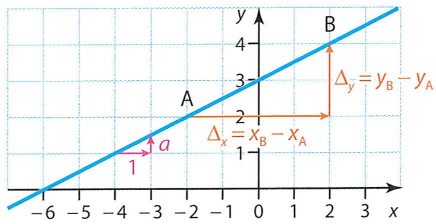
- Soit a un nombre réel et n un entier $\neq 0$: $a^n = a \times a \times \ldots\ldots \times a$. Pour $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Soient a et b deux nombres non nuls et m et n deux entiers : $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

3 Lire le coefficient directeur d'une droite

Le coefficient directeur (ou pente) de la droite est égal à :

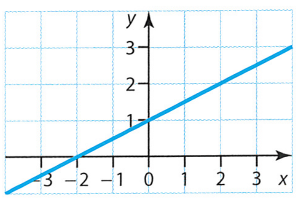
$$a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

où $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points de la droite.



Vérifier les acquis de Seconde

QCM **Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.**

	a	b	c	d	Aide
1. Augmenter une quantité Q de 20 %, revient à multiplier Q par :	0,20	1,20	0,80	1,02	1
2. Lors des soldes, le prix d'un article passe de 65 € à 39 €. Le prix a baissé de :	40 %	67 %	60 %	26 %	1
3. Si une grandeur est multipliée par 0,54 alors elle :	augmente de 54 %	baisse de 46 %	augmente de 5,4 %	baisse de 54 %	1
4. La population d'une ville est de 1 520 habitants. Tous les ans, la population baisse de 10 %. Le nombre d'habitants au bout de 3 ans est (arrondir à l'unité) :	1 064	506	1 108	1 368	2
5. Le coefficient directeur de la droite d est : 	$\dfrac{1}{2}$	-2	2	$\dfrac{-1}{2}$	3

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

1 Appels téléphoniques surtaxés

VIE QUOTIDIENNE

OBJECTIF Découvrir les suites arithmétiques → Cours 1A p. 36

Le prix d'un numéro surtaxé est de 0,80 euro par appel puis de 0,10 euro par minute.

1. Déterminer le prix d'un appel qui dure 1 minute, 2 minutes, 3 minutes.

2. On choisit de modéliser cette situation par une suite (u_n). Ainsi $u_0 = 0{,}8$ et u_n est égal au prix d'un appel de n minutes.

a. Donner les valeurs des 5 premiers termes de la suite.

b. Représenter ces premiers termes sur un graphique.

c. Que remarque-t-on ?

3. Calculer $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, …. Que remarque-t-on ?

4. Le résultat trouvé à la question précédente a-t-il un lien avec le graphique représentant les termes de la suite ?

5. Décrire un procédé pour lire graphiquement ce résultat.

2 Un rebondissement inattendu ! → Mémento NUMWORKS p. 289

PHYSIQUE

OBJECTIF Découvrir les suites géométriques → Cours 2A p. 38

On se propose d'étudier les rebonds d'une balle qui a une telle élasticité qu'à chaque rebond, elle ne perd que 5 % de la hauteur du rebond précédent.
La question que l'on se pose est simple : quand est-ce que la balle ne va plus rebondir ?
Soit H_n la hauteur en cm atteinte par une balle après n rebonds lorsqu'on la laisse tomber d'une hauteur initiale d'un mètre. On a donc $H_0 = 100$.

Partie A Une question de rapport

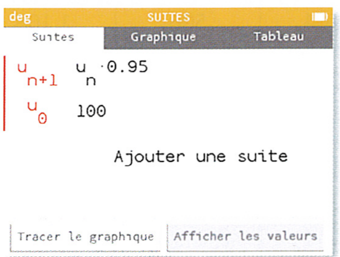
1. Vérifier que $H_1 = 95$ puis calculer H_2, H_3 et H_4.

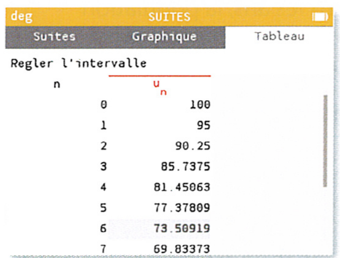
2. Calculer $\frac{H_1}{H_0}, \frac{H_2}{H_1}, \frac{H_3}{H_2}, \frac{H_4}{H_3}$. Que remarque-t-on ? On dira que la suite (H_n) est une suite géométrique.

3. En déduire la valeur de H_5 et de H_6.

Partie B Algorithme

1. À l'aide de la calculatrice, trouver le nombre de rebonds pour que la balle n'atteigne plus qu'une hauteur proche de 51 cm.





2. Avec cette modélisation, peut-on penser que la balle rebondit indéfiniment ?

3. À partir de quelle hauteur pourrions-nous considérer qu'elle ne rebondit plus, au moins pour notre vision ?

3 Des offres bancaires alléchantes

STMG GESTION ET FINANCES

OBJECTIF Déterminer la nature d'une suite → Cours 1 et 2 p. 36, p. 38

Une banque propose à ses clients trois offres commerciales pour des placements.
Offre A : « N'hésitez plus, vous nous confiez votre argent et nous vous proposons chaque année de vous reverser 4 % de votre capital initial ». Dans cette situation, on dit que le placement est à intérêts simples (chaque année, le capital augmente du pourcentage indiqué appliqué au capital de départ uniquement).
Offre B : « Si vous souhaitez investir sur du long terme, nous vous proposons un placement à intérêts composés de 3 % » (chaque année, le capital augmente du pourcentage indiqué).
Offre C : « Pour vous remercier de votre fidélité, vous investissez à un taux de 1,5 % à intérêts composés et nous vous versons une prime de 200 euros chaque année ».
Un client souhaite placer 10 000 euros au 1er janvier 2018.

1. Pour chacune des offres proposées, calculer le montant dont ce client disposera au bout de 1 an puis de 2 ans.

2. Reproduire et compléter le tableau ci-contre :

Année	Offre A	Offre B	Offre C
2018	10 000 €	10 000 €	10 000 €
2019			
2020			

3. Pour tout entier naturel n, on note A_n (respectivement B_n et C_n) le capital acquis au bout de la nième année avec l'offre A (respectivement l'offre B et l'offre C). Ainsi $A_0 = B_0 = C_0 = 10\,000$.
a. Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n. On dit que la suite (A_n) est arithmétique.
b. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n. La suite (B_n) n'est pas une suite arithmétique. C'est une suite géométrique car chacun des termes s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre réel, ici 1,03.
c. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. Montrer que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4 Un premier mois enrichissant

→ Mémento TABLEUR p. 278

STL BIOLOGIE

OBJECTIF Comparer différents types de croissance → Cours 1 et 2 p. 36, p. 38

On sait qu'un bébé prend environ 1 kg dans le premier mois après sa naissance. Sur la feuille de calcul ci-contre, la colonne B représente le poids moyen d'un bébé au cours de sa première année. Il pesait 3 kg à la naissance.

	A	B	C	D
1	Mois	Poids	Modèle A	Modèle B
2	0	3	3	3
3	1	3,98		
4	2	4,79		
5	3	5,49		
6	4	6,11		
7	5	6,66		
8	6	7,17		
9	7	7,63		
10	8	8,06		
11	9	8,46		
12	10	8,84		
13	11	9,2		
14	12	9,55		
15				

Partie A Modèle A, colonne C
On désire modéliser ce poids par une suite arithmétique (A_n) de raison 0,7 et de premier terme 3.

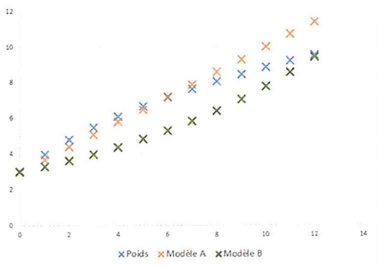
1. Calculer A_1. Quelle formule doit-on entrer dans la case C3 du tableur pour obtenir les différents poids de cette première année directement par recopie vers le bas ?

2. Quel sera le poids du bébé selon ce modèle à 12 mois ?

Partie B Modèle B, colonne D
On désire modéliser cette croissance à l'aide d'une suite géométrique (B_n) de raison 1,1 et de premier terme $B_0 = 3$.

1. Calculer B_1. Calculer les termes de la suite jusqu'au 12e mois du bébé.

2. La raison proposée semble-t-elle cohérente ?



Comparaison : les trois séries de valeurs sont représentées ci-contre.
Lequel des deux modèles A et B vous semble le plus pertinent ? Argumenter votre réponse.

Cours

1 Suites arithmétiques

A Définition

DÉFINITION Une suite est **arithmétique** si chacun de ses termes s'obtient en **ajoutant** un même nombre réel au précédent.
Ce nombre réel est appelé **raison** de la suite arithmétique.
Si (u_n) désigne cette suite et r ce réel alors, pour tout entier naturel n,

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}.$$

Une suite arithmétique est donc définie par la donnée de sa raison et de son premier terme.

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

EXEMPLE • La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = -350 \\ u_{n+1} = u_n + 12 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison 12 et de premier terme $u_0 = -350$.

n	0	1	2	3	…
u_n	-350	$-350+12=-338$	$-338+12=-326$	$-326+12=-314$	…

PROPRIÉTÉ (u_n) est une suite **arithmétique** si et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ **ne dépend pas** de n.

→ Voir Exercices résolus 1 et 2

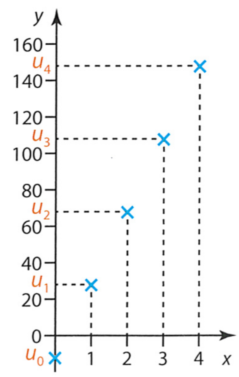
B Sens de variation

PROPRIÉTÉS Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r.
Si $\boldsymbol{r > 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **croissante**.
Si $\boldsymbol{r < 0}$, alors la suite (u_n) est strictement **décroissante**.
Si $\boldsymbol{r = 0}$, la suite (u_n) est **constante** car alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

DÉMONSTRATION • Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$ donc $u_{n+1} - u_n = r$.
Si $r > 0$, alors $u_{n+1} - u_n > 0$ soit $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$, alors $u_{n+1} - u_n < 0$ soit $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

EXEMPLE • On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -12$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = u_n + 40$.
La suite est arithmétique, sa raison est 40. Comme $40 > 0$ la suite (u_n) est strictement croissante. Pour tout entier naturel n, on a : $u_n < u_{n+1}$.

n	u_n
0	-12
1	28
2	68
3	108
4	148



REMARQUE • On parlera souvent de suite **croissante** ou **décroissante**, même si la croissance ou décroissance est stricte.

Vocabulaire

Dans une **suite arithmétique**, tout terme de la suite est égal à la « moyenne arithmétique entre le terme précédent et le terme suivant ». Cette propriété peut se démontrer et explique le choix du mot « **arithmétique** ».

Notation

n entier naturel peut se noter $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

Exercice résolu 1 Calculer des termes d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 17$ et de raison 11.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Avec la calculatrice, calculer le 10^e terme de la suite.

Méthode Pour calculer des termes d'une suite arithmétique

① On calcule les premiers termes en ajoutant la valeur de la raison au terme précédent.

② On utilise la calculatrice qui permet d'obtenir un tableau de valeurs des termes d'une suite pour un rang plus élevé.

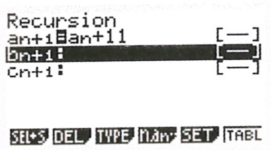
Solution

1. (u_n) est une suite arithmétique, avec $u_0 = 17$ et $r = 11$.
$u_1 = 17 + 11 = 28$; $u_2 = 28 + 11 = 39$ et $u_3 = 39 + 11 = 50$.

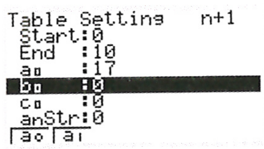
2. $u_{n+1} = u_n + 11$.

3. Avec la calculatrice **Casio Graph 35+E**

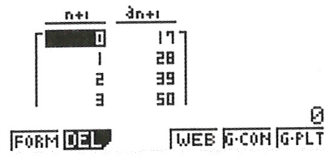
• Dans le Menu RECUR de la calculatrice, la suite est notée (a_n). On entre : $a_{n+1} = a_n + 11$ puis Exe



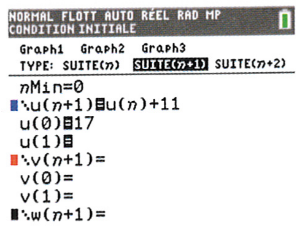
• Dans **SET** (F5), on indique l'indice du 1er et du dernier terme souhaité ainsi que le premier terme de la suite noté a_0.

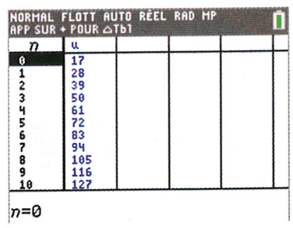


• On obtient les termes de la suite avec TABL (F6).



Avec la calculatrice **TI 83 Premium**, après avoir choisi le mode SUITE, on obtient :





→ Voir **Exercices 17 à 20** p. 44

Exercice résolu 2 Démontrer qu'une suite est arithmétique

Dans chacun des cas suivants, indiquer si la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n, est arithmétique ou non. Si oui, donner sa raison.

1. $u_n = 2n - 3$.

2. $u_n = n^2 - 3$.

Méthode Pour montrer qu'une suite est arithmétique

① On calcule trois termes consécutifs, par exemple u_0, u_1 et u_2.

② Si $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$, on peut penser que la suite est arithmétique et il faut montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est constant.

③ Si $u_1 - u_0 \neq u_2 - 1$, on conclut que la suite n'est pas arithmétique.

Solution

1. $u_0 = 2 \times 0 - 3 = -3$; $u_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$; $u_2 = 2 \times 2 - 3 = 1$.
$u_1 - u_0 = -1 - (-3) = u_2 - u_1 = 1 - (-1) = 2$, il semble que la suite soit arithmétique de raison 2.
Pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2$.
La suite (u_n) est donc bien arithmétique de raison 2.

2. $u_0 = 0^2 - 3 = -3$; $u_1 = 1^2 - 3 = -2$; $u_2 = 2^2 - 3 = 1$
$u_1 - u_0 = -2 - (-3) = 1 \neq u_2 - u_1 = 1 - (-2) = 3$. La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

→ Voir **Exercices 28 à 30** p. 44

2 Suites géométriques

A Définition

DÉFINITION Une suite est **géométrique** lorsque chacun des termes s'obtient en **multipliant** un même nombre réel au terme précédent.
Ce nombre réel est appelé **raison** de la suite géométrique.
Si (v_n) désigne cette suite et q ce réel, on a, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

Une suite géométrique est donc définie par la donnée de sa raison et de son premier terme.

$$\boxed{v_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{v_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{v_2} \longrightarrow \boxed{\dots} \longrightarrow \boxed{v_{n-1}} \xrightarrow{\times q} \boxed{v_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{v_{n+1}}$$

EXEMPLE • La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ v_{n+1} = v_n \times 3 \end{cases}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = -4$.

n	0	1	2	3	...
v_n	-4	$-4 \times 3 = -12$	$-12 \times 3 = -36$	$-36 \times 3 = -108$	...

PROPRIÉTÉ Soit (v_n) une suite dont tous les termes sont non nuls. Si pour tout entier naturel n, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est **constant**, alors (v_n) est une suite **géométrique** de raison égale à cette constante.

→ Voir Exercices résolus 3 et 4

Vocabulaire

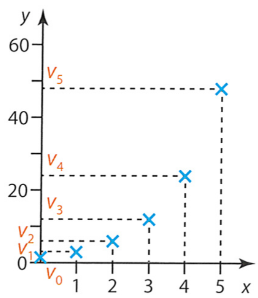
Dans une **suite géométrique**, tout terme de la suite est égal à la « moyenne géométrique entre le terme précédent et le terme suivant ». C'est-à-dire que $v_n = \sqrt{v_{n-1} \times v_{n+1}}$.
Cette propriété peut se démontrer et explique le choix du mot « **géométrique** ».

B Sens de variation

PROPRIÉTÉS Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme strictement positifs.
Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est strictement **croissante**.
Si $q < 1$ alors la suite (v_n) est strictement **décroissante**.
Si $q = 1$ alors la suite (v_n) est constante.

EXEMPLE • Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_0 = 1{,}5$ et $v_{n+1} = 2v_n$.
On remarque que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
Comme $2 > 1$, la suite (v_n) est strictement croissante : pour tout entier naturel n, on a $v_n < v_{n+1}$.

n	u_n
0	1,5
1	3
2	6
3	12
4	24
5	48



Exercice résolu 3 — Calculer des termes d'une suite géométrique ALGO

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison 1,5.

1. Calculer v_1 et v_2.

2. Écrire v_{n+1} en fonction de v_n.

3. On donne l'algorithme ci-contre.
Quelle est la valeur de V à la sortie de cet algorithme ?
À quoi correspond cette valeur pour la suite (v_n) ?

```
N ← 0
V ← 3
Tant que N < 4
   V ← V × 1,5
   N ← N + 1
Fin Tant que
```

Méthode — Pour calculer des termes d'une suite géométrique

1. On **identifie** le 1er terme et la raison de la suite géométrique.
2. On **utilise** la relation $v_{n+1} = q \times v_n$ pour calculer les termes successifs à partir du 1er terme.
3. On **fait fonctionner** l'algorithme pas à pas en suivant les instructions.

Solution

1. (v_n) est une suite géométrique, avec $v_0 = 3$ et $q = 1{,}5$.
$v_1 = 3 \times 1{,}5 = 4{,}5$; $v_2 = 4{,}5 \times 1{,}5 = 6{,}75$.

2. On obtient $v_{n+1} = v_n \times 1{,}5$.

3. On peut présenter les étapes du calcul dans le tableau ci-dessous.
La valeur de V en sortie est 15,1875 ; il s'agit de v_4.

Test		**$0 < 4$: vrai**	**$1 < 4$: vrai**	**$2 < 4$: vrai**	**$3 < 4$: vrai**	**$4 < 4$: faux**
V	3	$3 \times 1{,}5 = 4{,}5$	$4{,}5 \times 1{,}5 = 6{,}75$	$6{,}75 \times 1{,}5 = 10{,}125$	$10{,}125 \times 1{,}5 = 15{,}1875$	
N	0	$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	
Terme	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	

→ Voir Exercices 36 à 38 p. 45

Exercice résolu 4 — Démontrer qu'une suite est géométrique

Dans chacun des cas suivants, indiquer si la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n, est géométrique ou non.
Si oui, donner sa raison.

1. $u_n = 3^n$.

2. $u_n = 20 \times 0{,}5^n - 4$.

Méthode — Pour montrer qu'une suite est géométrique

1. On **calcule** trois termes consécutifs, par exemple u_0, u_1 et u_2 non nuls.
2. Si $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$, on peut **penser** que la suite est géométrique et il faut **montrer** que pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.
3. Si $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$, on **conclut** que la suite n'est pas géométrique.

Solution

1. $u_0 = 3^0 = 1$; $u_1 = 3^1 = 3$; $u_2 = 3^2 = 9$. On a : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1} = 3$, il semble que la suite soit géométrique de raison 3.
Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3 \times 3^n}{3^n} = 3$.
La suite (u_n) est donc bien géométrique de raison 3.

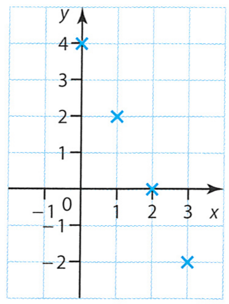
2. $u_0 = 20 \times 0{,}5^0 - 4 = 16$; $u_1 = 20 \times 0{,}5^1 - 4 = 6$;
$u_2 = 20 \times 0{,}5^2 - 4 = 1$.
On a : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{6}$.
La suite (u_n) n'est pas géométrique.

→ Voir Exercices 43 à 44 p. 45

3 Représentations graphiques

A Suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite **arithmétique** de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = -2$. Pour représenter graphiquement (u_n), on calcule les premiers termes de la suite et on place les **points de coordonnées** $(n\,;\,u_n)$ ainsi obtenus.

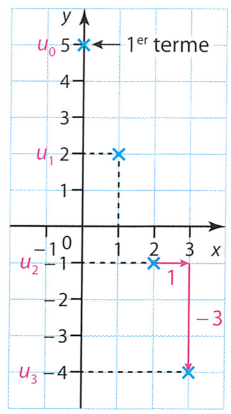


Propriétés Si la représentation graphique d'une suite est un **nuage de points alignés**, alors la suite est **arithmétique**.
Réciproquement, si la suite est **arithmétique**, alors sa représentation graphique est un **nuage de points alignés**.

Remarque • Comme les points sont alignés, on parle de croissance **linéaire**.

Démonstration • Si a est la pente (le coefficient directeur) de la droite qui passe par les points de ce nuage de points, alors on a : $a = \dfrac{(u_{n+1} - u_n)}{(n+1) - n} = u_{n+1} - u_n$; la suite est donc arithmétique et sa raison vaut a.

La **raison** de la suite est ainsi donnée par la **pente** de la droite qui passe par les points du nuage de points.



Point de logique • On dira qu'il y a **équivalence logique** entre les propositions « la suite est arithmétique » et « la représentation graphique de la suite est un nuage de points alignés ». La proposition « la représentation graphique de la suite est un nuage de points alignés » est une **condition nécessaire et suffisante** pour que la suite soit arithmétique.

Exemple • On a représenté sur le graphique ci-contre une suite (u_n) arithmétique de premier terme u_0. $u_0 = 5$ et $u_1 = 2$ donc $r = 2 - 5 = -3$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -3$.

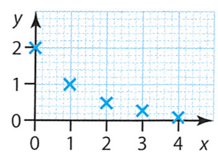
→ Voir Exercice résolu 5

B Suites géométriques

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

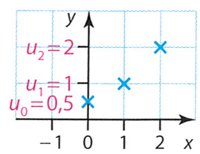
Pour représenter graphiquement (u_n), on calcule les premiers termes de la suite et on place les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ ainsi obtenus.

On parle de « **croissance exponentielle** ».



Exemple • On a représenté ci-contre les premiers termes d'une suite géométrique (u_n).

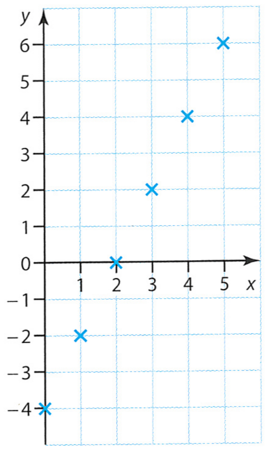
Pour déterminer la raison de (u_n), on lit les valeurs de deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} et la raison est alors égale à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Ici, on lit les valeurs de u_1 et u_2, et on calcule : $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2}{1} = 2$. La suite (u_n) est donc la suite géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}5$ et de raison $q = 2$.



→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu 5 — Exploiter la représentation graphique d'une suite et conjecturer qu'elle est arithmétique

On a représenté ci-contre la suite (u_n). Conjecturer graphiquement que cette suite est arithmétique et déterminer sa raison.



Méthode — Pour exploiter la représentation d'une suite et conjecturer qu'elle est arithmétique

1. Si **tous** les points sont alignés, il s'agit d'une croissance linéaire : la suite (u_n) serait donc arithmétique.
2. On **choisit** deux points consécutifs du nuage de points et on lit leurs ordonnées u_{n+1} et u_n.
3. On **calcule** $u_{n+1} - u_n$. La valeur ainsi obtenue serait la raison de la suite.

Solution

On peut conjecturer qu'il s'agit d'une croissance linéaire puisque les points sont alignés. La suite (u_n) pourrait donc être une suite arithmétique.
Graphiquement, on lit $u_0 = -4$; $u_1 = -2$; $u_2 = 0$; $u_3 = 2$, etc.
La différence entre deux termes consécutifs est à chaque fois égale à 2 (en effet, $u_1 - u_0 = -2 - (-4) = -2 + 4 = 2$ et il en est de même pour $u_2 - u_1$ ou encore $u_3 - u_2$).

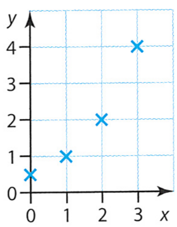
La suite représentée serait donc une suite arithmétique de raison 2.

Remarque : plusieurs points alignés sur une représentation graphique ne suffisent pas pour affirmer que la suite représentée est arithmétique. Mais trois points non alignés suffisent à montrer que la suite n'est pas arithmétique.

→ Voir Exercices 49 à 52 p. 46

Exercice résolu 6 — Exploiter la représentation graphique d'une suite géométrique

On a représenté ci-dessous une suite géométriue (v_n).
À l'aide du graphique, vérifier que la suite est géométrique.
Donner sa raison.



Méthode — Pour exploiter la représentation d'une suite géométrique

1. On **lit** l'ensemble des ordonnées des points représentés.
2. On **calcule** tous les différents quotients $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
3. Si les valeurs des quotients obtenues sont égales, la suite est géométrique et la raison de la suite est alors égale à la valeur commune de ces quotients.

Solution

Par lecture graphique : $v_0 = 0{,}5$; $v_1 = 1$; $v_2 = 2$; $v_3 = 4$.
On a donc : $\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} = 2$.

La suite représentée ici est donc une suite géométrique de raison 2.

→ Voir Exercices 49 à 52 p. 46

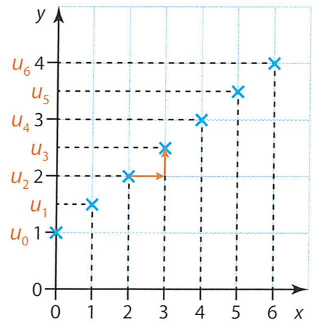
L'essentiel

1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est **arithmétique** lorsque chaque terme s'obtient à partir du précédent en ajoutant une constante r appelée **raison** de la suite. Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

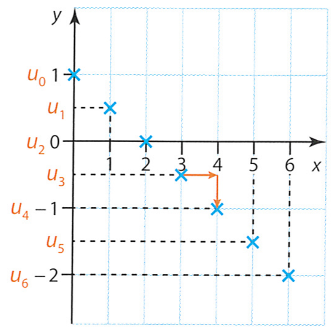
On ajoute la raison à un terme pour obtenir le suivant.

Si $r > 0$ la suite est strictement croissante



$u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots$

Si $r < 0$ la suite est strictement décroissante



$u_0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > u_{n+1} > \ldots$

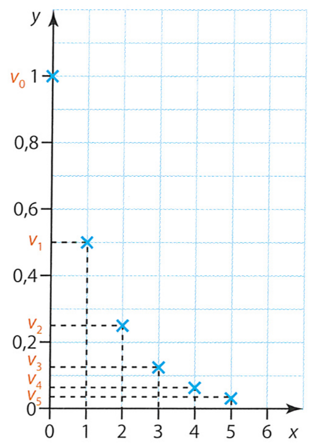
Graphiquement, les points représentant la suite arithmétique sont **alignés** et l'on peut déterminer la raison de la suite en calculant la **différence des ordonnées** de deux points **consécutifs**.

2 Suites géométriques

Une suite (v_n) est **géométrique** lorsque chaque terme s'obtient à partir du précédent en multipliant par un même nombre réel q appelé **raison** de la suite. Pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{v_{n+1} = q \times v_n}$. On multiplie par la raison un terme pour obtenir le suivant.

Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$

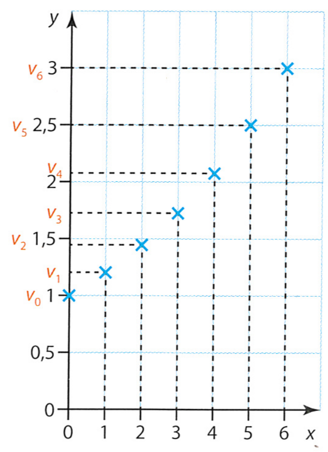
la suite est strictement décroissante



$v_0 > v_1 > v_2 > \ldots > v_n > v_{n+1} > \ldots$

Si $q > 1$ et $u_0 > 0$

la suite est strictement croissante



$v_0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_n < v_{n+1} < \ldots$

Graphiquement, pour vérifier que la suite représentée est une suite géométrique, on lit les **ordonnées** des premiers points, on calcule l'ensemble des **quotients** $\frac{v_1}{v_0}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_2}, \frac{v_4}{v_3}, \frac{v_5}{v_4}\ldots$ On vérifie que l'on obtient toujours la même valeur. Cette valeur est la raison de la suite.