1 Suites numériques

CAPACITÉS

- Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite.

Les *fake news* se propagent rapidement sur les réseaux sociaux.

De nombreuses situations de la vie quotidienne peuvent être modélisées à l'aide de suites numériques : évolution d'une population, cours d'une action..., propagation des *fake news* (fausses informations, que ce soit volontaire non). Ainsi, sur les réseaux sociaux, si une personne met sur sa page une information erronée, et que son *post* est partagé seulement trois fois par jour, cela va quand même aller très vite !

Vidéo
Découvrons comment lutter contre les *fake news.*
lienmini.fr/10333-01

Au bout de combien de jours cette fausse information sera-t-elle partagée plus de 1 000 fois le même jour ?

→ Pour le découvrir **Activité 4** p. 13

Pour retrouver les automatismes

Questions Flash

Diaporama

10 diapositives pour retrouver ses automatismes

lienmini.fr/10333-02

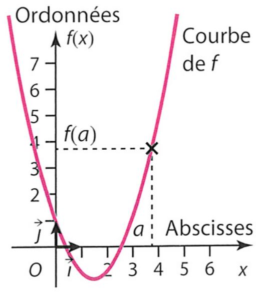
Revoir les acquis de Seconde

1 Fonctions : calcul d'image

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D. Pour tout réel x de D, on peut calculer son image par f, que l'on note $f(x)$. Si on cherche l'image de a par f, on remplace chaque x par a dans l'expression de $f(x)$.

2 Courbe représentative d'une fonction dans un repère du plan

Le plan est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. On appelle courbe représentative de f l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$ avec $x \in D$.
Pour déterminer graphiquement l'image d'un réel a de D, on place a sur l'axe des abscisses et on cherche l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe de f.

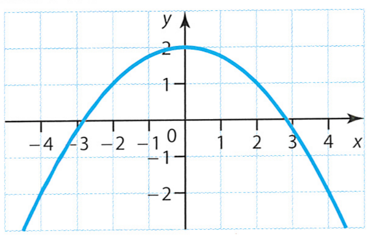


3 Expression littérale

Si a et b sont deux nombres réels : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Vérifier les acquis de Seconde

QCM Pour chacune des questions posées, indiquer la bonne réponse puis justifier.

	a	b	c	d	Aide
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$. L'image de 4 est :	11	5	4	-5	1
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$. L'image de (-1) par f est :	6	4	0	-4	1
3. On considère la fonction f dont la courbe est tracée ci-dessous :  L'image de 4 par f est :	2	5	-2	-5	2
4. On reprend la courbe précédente. Le point de coordonnées $(0\,;2)$ appartient à la courbe signifie que :	2 est un antécédent de 0 par f.	$f(2) = 0$	$f(0) = 2$	0 est l'image de 2 par f.	2
5. Le développement de $(x+1)^2$ est :	x^2+1	$(x-1)^2$	$x^2 - 1^2$	$x^2 + 2x + 1$	3

→ Voir Corrigé p. 294

Activités

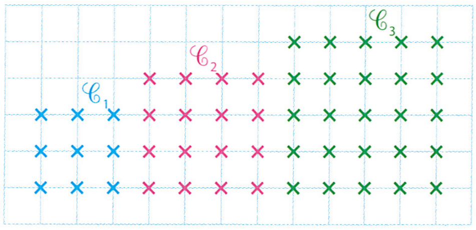
1 Une première suite très carrée

OBJECTIF Découvrir la notion de suite → Cours 1A p. 14

1. Reproduire les figures $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ puis compléter le graphique par les figures $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_5$ construites selon le même procédé.

2. Indiquer pour chaque figure le nombre de points construits.

3. De combien de points aura-t-on besoin si on souhaite poursuivre les figures jusqu'au carré de 10 points de côté ?



2 Une suite particulière : la suite de Syracuse

→ Mémento ALGO p. 270

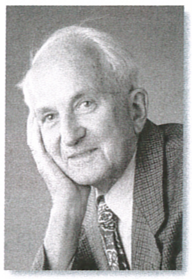
Histoire des mathématiques

OBJECTIF Calculer les premiers termes d'une suite et représenter graphiquement la suite → Cours 2 p. 16

Partie A Suite de Syracuse sur feuille de papier

Dans cette suite, chaque terme se déduit du précédent en appliquant le procédé suivant : si le terme est pair, le suivant s'obtient en le divisant par 2, sinon, le suivant s'obtient en le multipliant par 3 et en ajoutant 1.

On note u_n le nième terme de cette suite de nombres.



Ce problème a été proposé en 1928 par le mathématicien allemand Lothar Collatz.

1. Vérifier que si le premier terme u_1 vaut 120, alors le deuxième terme u_2 vaut 60

2. Calculer les trois termes suivants de cette suite.

3. Faire d'autres essais et calculer les 10 premiers termes des suites en changeant la valeur de u_1. On prendra $u_1 = 3$, puis $u_1 = 4$, $u_1 = 6$ et enfin $u_1 = 10$. Qu'observe-t-on ?

Partie B Suite de Syracuse et algorithme

Voici un algorithme permettant d'obtenir la liste des 10 premiers termes de cette suite.

```
U=120
NB=10

syracuse=[U]


for i in range(NB):
    if U/2==int(U/2):
        U=U/2
    else:
        U=U*3+1
    syracuse.append(U)

print(syracuse)
```

1. Programmer cet algorithme et retrouver les résultats de la Partie A pour $u_1 = 120$.

2. Déterminer, à l'aide de cet algorithme, les 15 premiers termes de la suite pour $u_1 = 13$ et $u_1 = 7$. Constate-t-on la même chose que dans la Partie A ?

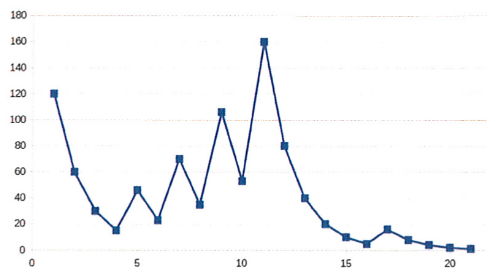
3. Utiliser l'algorithme pour vérifier cette conjecture lorsque $u_1 = 27$.

Partie C Le vol de la suite

1. Calculer les termes de la suite démarrant par 120 à l'aide d'un tableur et de l'instruction ci-contre :

120
=SI(A1/2=ENT(A1/2);A1/2;A1*3+1)

2. Représenter graphiquement cette suite sur tableur.



La représentation graphique des premiers termes de la suite peut faire penser à la chute d'un grêlon qui monte haut avant de retomber (certains parlent d'une feuille emportée par le vent). Il en découle un vocabulaire lié à ces images :

On appelle « **temps de vol** » le nombre de valeurs calculées avant que la suite n'atteigne le nombre 1.

On appelle « **altitude maximale** » la plus grande valeur que peut prendre cette suite.

3. Pour $U_1 = 120$, quelle est le temps de vol ? Quelle est l'altitude maximale ?

4. Chercher les mêmes indications pour une suite démarrant par $U_1 = 117$ puis pour $U_1 = 6\,400$.

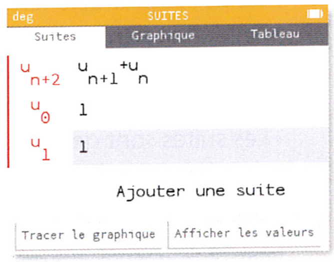
Cette conjecture : quel que soit le 1^er nombre de cette suite, celle-ci atteint toujours 1 puis suit le cycle « 1 ; 4 ; 2 », a été vérifiée en regardant le vol de tous les entiers jusqu'à 5×10^{18}. Personne n'a su la démontrer jusqu'à présent.

3 Suite de Fibonacci • Problème des lapins

Histoire des mathématiques

OBJECTIF Modéliser une situation simple à l'aide de suites → Cours 1 p. 14

Cette suite très célèbre doit son nom au mathématicien Fibonacci ; il imagine dans son traité *Liber Abaci* (1202) la croissance d'une population de lapins. On commence avec un couple de jeunes lapins. Ce couple donne naissance chaque mois, dès son troisième mois d'existence, à un nouveau couple de lapins. Le premier mois, nous avons donc un couple de jeunes lapins ; le second mois, ce couple n'est pas en âge de procréer donc il y a toujours un couple de lapins. Le troisième mois, ce couple donne naissance à un couple de lapins, etc.
Combien y aura-t-il de couples de lapins au bout d'un an ?
La suite de Fibonacci se calcule rapidement : pour obtenir un terme, on ajoute les deux termes précédents. Ainsi, pour la définir, il ne faut pas une mais deux valeurs de départ.



Partie A Premiers termes

La suite de Fibonacci commence ainsi : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8…

1. Calculer les 5 termes suivants de cette suite.
2. Utiliser la calculatrice pour afficher les termes de la suite et vérifier les calculs précédents.
3. Donner la valeur du 20e terme de cette suite.

Partie B Nombre d'or

Notons $U_0 = 1$ et $U_1 = 1$ les deux premiers termes de cette suite.

1. Calculer le rapport U_1 / U_0, puis le rapport U_2/U_1.
2. À l'aide du tableur, calculer les 10 rapports suivants. Que constatez-vous ?
3. Faire une recherche internet sur le **nombre d'Or**.

4 La rumeur

→ Mémento Tableur p. 278

Sciences numériques

OBJECTIF Modéliser une situation simple à l'aide de suites → Cours 1 p. 14

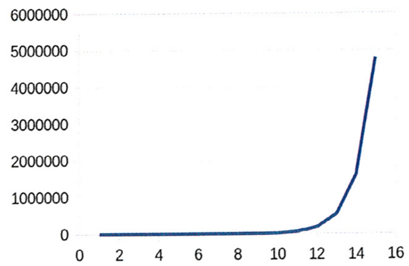
Imaginons qu'une personne décide de lancer une *fake news* sur la page publique de son réseau social préféré le 1er janvier de cette année et que son information fasse le buzz selon le modèle suivant : chaque jour qui passe, l'information est à nouveau partagée 3 fois.
Ainsi, le 1er janvier, il y a 1 partage (celui de l'auteur de la fausse information) ; le 2 janvier, 3 partages ; le 3 janvier, 9 partages (3 fois 3 partages), etc.

1. Combien de partages auront lieu le 4 janvier, le 5 et le 10 janvier ?

	A	B	C
1	Date	n	u_n
2	1er janv	1	1
3	02-janv	2	3
4	03-janv	3	9

À l'aide du tableur, répondre aux questions suivantes :

2. Quelle formule doit-on écrire dans la case C3 pour obtenir, par recopie vers le bas, le nombre de partages des jours suivants ?
3. La rumeur fait le buzz lorsqu'elle est partagée plus de 1 000 fois le même jour. À quelle date cela arrivera-t-il ?
4. À l'aide d'un graphique, représenter sur tableur l'évolution du nombre de nouvelles personnes ayant partagé cette rumeur pour les quinze premiers jours.
5. Combien de personnes auront eu connaissance de cette fausse information en 15 jours ? Est-ce réaliste ? Justifiez votre réponse.



Cours

1 Mode de génération d'une suite numérique

A Définition

DÉFINITION Une **suite numérique u** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout entier naturel n, associe son image $u(n)$ notée aussi u_n.
u_n est le terme de rang n; on lit « u indice n ». On note la suite : (u_n).

REMARQUES
- Une suite est quelques fois donnée, même si cela manque de rigueur, par la liste de ses premiers termes ; exemple : $2 ; 4 ; 6 ; \ldots$
- On définit parfois une suite sur $\mathbb{N}$*. Le premier terme est alors u_1.
- Si u_n est le terme de rang n d'une suite, alors $\boldsymbol{u_{n-1}}$ est son **terme précédent** et $\boldsymbol{u_{n+1}}$ est son **terme suivant**.
- Les suites sont généralement nommées à l'aide des lettres u, v, w,... L'indice est n dans la plupart des cas mais parfois on rencontre p ou m.

EXEMPLE

Rang	0	1	2	3	...	$n-1$	n	$n+1$	...
Terme	v_0	v_1	v_2	v_3	...	v_{n-1}	v_n	v_{n+1}	...

Le quatrième terme de cette suite est v_3 et le premier terme est v_0.

→ Voir Exercice résolu 1

B Suite définie par une formule explicite

DÉFINITION Une suite (u_n) est définie de **manière explicite** si il existe une fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $\boldsymbol{u_n = f(n)}$.

REMARQUE • On peut calculer directement n'importe quel terme de la suite en remplaçant n par la valeur voulue. Il s'agit alors dans ce cas d'un calcul d'image.

EXEMPLE • Pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3n+1$.
On a donc : $u_0 = 3\times 0+1 = 1$; $u_1 = 3\times 1+1 = 4$; ... ; $u_{50} = 3\times 50+1 = 151$.

→ Voir Exercice résolu 2

C Suite définie par une relation de récurrence

DÉFINITION Une suite (u_n) est définie par **récurrence** si elle est définie par la donnée de son **premier terme** et par une relation permettant de calculer **chaque terme à partir du terme précédent** (ou parfois des précédents).

EXEMPLE • Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 5$. Le 1er terme est u_0 et la relation de récurrence est $u_{n+1} = 2u_n + 5$.
$u_1 = 2u_0 + 5 = 2\times 3+5 = 11$, $u_2 = 2u_1 + 5 = 2\times 11+5 = 27$.

REMARQUE • Ce type de définition ne permet pas de calculer rapidement des termes d'indices élevés car chaque terme se calcule à l'aide du précédent.

→ Voir Exercice résolu 2

Notation

L'ensemble noté $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels**. C'est l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.
On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des **entiers naturels non nuls** soit $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$.

Exercice résolu 1 — Modéliser une situation à l'aide d'une suite

Dans chacun des cas suivants, définir une suite pouvant modéliser la situation.

1. Le nombre d'adhérents d'une association sportive s'accroît tous les ans de 25 personnes. Ce phénomène a débuté en 2010 : il y avait alors 4 500 adhérents.

2. La liste des nombres impairs.

Méthode — Pour modéliser une situation à l'aide d'une suite

1. On **donne** un nom à la suite après avoir lu attentivement l'énoncé, en faisant un schéma si la situation s'y prête.
2. On **calcule** les premiers termes à partir des données de l'énoncé.
3. On en **déduit** le mode de génération de la suite (définie par récurrence ou de manière explicite).
4. On **donne** la formule permettant de calculer les termes de la suite.

Solution

1. On note u_n le nombre d'adhérents en $2010+n$, avec n entier naturel. Ainsi :
$u_1 = 4\,500 + 25 = 4\,525$, en 2011, il y a 4 525 adhérents.
$u_2 = 4\,525 + 25 = 4\,550$, en 2012, il y a 4 550 adhérents.
La suite (u_n) peut être définie par récurrence avec $u_0 = 4\,500$ et $u_{n+1} = u_n + 25$ pour tout entier n.

2. La liste des nombres impairs est $\{1\,;3\,;5\,;7\,;\ldots\}$
On note v_n le nombre impair au rang n : $v_0 = 1$, $v_1 = 3\ldots$
On peut définir la suite (v_n) :
- La définition explicite est : $v_n = 2n+1$ pour tout entier n.
- La définition par récurrence est : $v_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = v_n + 2$.

→ Voir Exercices 18 à 21 p. 22

Exercice résolu 2 — Calculer des termes d'une suite définie de manière explicite ou récurrente

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -3n+5$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

Méthode — Pour calculer des termes d'une suite définie de manière explicite

1. On **repère** le rang à partir duquel la suite est définie.
2. On **remplace** n par la valeur qui convient dans l'expression de (u_n).

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$$\begin{cases} u_1 = 1{,}3 \\ u_{n+1} = 2\times u_n - 4 \end{cases}$$
Calculer u_2 puis u_6.

Méthode — Pour calculer des termes d'une suite définie par récurrence

1. On **repère** pour quelles valeurs de n la suite est définie ainsi que la valeur du premier terme.
2. On **repère** que la suite est définie par récurrence puisque l'expression de u_{n+1} dépend de u_n.
3. On **calcule** chacun des termes successifs à partir de son terme précédent et cela jusqu'à obtenir le terme cherché.

Solution

1. Le premier terme est $u_0 = -3\times 0+5 = 5$.
$u_1 = -3\times 1+5 = 2$ $\quad u_2 = -3\times 2+5 = -1$
$u_3 = -3\times 3+5 = -4$ $\quad u_4 = -3\times 4+5 = -7$

2. $u_1 = 1{,}3$ $\quad u_2 = 2\times u_1 - 4 = 2\times 1{,}3 - 4 = -1{,}4$
u_6 se calcule à l'aide du terme précédent qui lui-même se calcule à l'aide du précédent et ainsi de suite…

On doit donc calculer successivement u_3, u_4, u_5 pour calculer u_6.
$u_3 = 2\times u_2 - 4 = 2\times(-1{,}4) - 4 = -6{,}8$
$u_4 = 2\times u_3 - 4 = 2\times(-6{,}8) - 4 = -17{,}6$
$u_5 = 2\times u_4 - 4 = 2\times(-17{,}6) - 4 = -39{,}2$
$u_6 = 2\times u_5 - 4 = 2\times(-39{,}2) - 4 = -82{,}4$

→ Voir Exercices 35 à 43 p. 22

2 Représentation graphique des termes d'une suite

DÉFINITION Dans un repère du plan, une **représentation** des termes de la suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;u_n)$ avec n entier naturel. On obtient un **nuage de points**.

On calcule les premiers termes de la suite soit à la main, soit à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.
On crée ensuite une liste de points à placer dans un repère orthogonal du plan dont les coordonnées seront : $A_0(0\,;u_0)$, $A_1(1\,;u_1)$, $A_3(2\,;u_2)$, …, $A_n(3\,;u_3)$, …
On les place dans le repère afin de créer un nuage de points.

REMARQUE • Il ne s'agit pas de relier les points. La représentation graphique ainsi obtenue est un nuage de points et non une courbe, qui elle, correspond à une fonction définie sur un intervalle.

EXEMPLE 1 • Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par $u_n=-0{,}5n^2+5$.

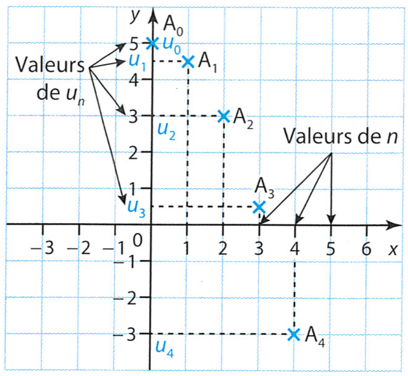
Calcul des premiers termes de la suite

$u_0=-0{,}5\times 0^2+5=0+5=5$
$u_1=-0{,}5\times 1^2+5=-0{,}5+5=4{,}5$
$u_2=-0{,}5\times 2^2+5=-2+5=3$
$u_3=-0{,}5\times 3^2+5=-4{,}5+5=0{,}5$
$u_4=-0{,}5\times 4^2+5=-8+5=-3$

On obtient les points de coordonnées :
$A_0(0\,;5)$
$A_1(1\,;4{,}5)$
$A_2(2\,;3)$
$A_3(3\,;0{,}5)$
$A_4(4\,;-3)$, …

n	u_n
0	5
1	4,5
2	3
3	0,5
4	−3

Représentation du nuage de points correspondant



EXEMPLE 2 • Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=2u_n+1\end{cases}$

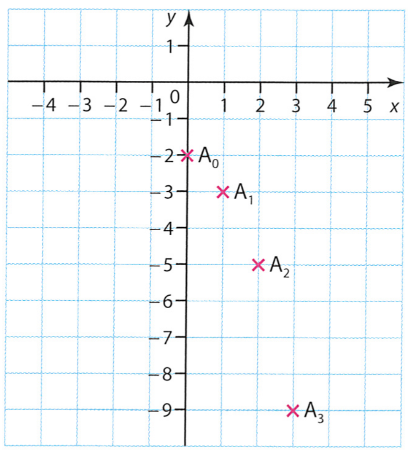
Calcul des premiers termes de la suite

$u_0=-2$
$u_1=2\times u_0+1=2\times(-2)+1=-3$
$u_2=2\times u_1+1=2\times(-3)+1=-5$
$u_3=2\times u_2+1=2\times(-5)+1=-9$

On obtient les points de coordonnées :
$A_0(0\,;-2)$
$A_1(1\,;-3)$
$A_2(2\,;-5)$
$A_3(3\,;-9)$, …

n	u_n
0	−2
1	−3
2	−5
3	−9

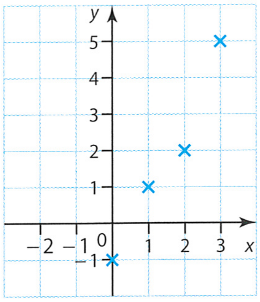
Représentation du nuage de points correspondant



→ Voir Exercice résolu 4

Exercice résolu 3 Déterminer graphiquement des termes d'une suite

On a représenté graphiquement les premiers termes d'une suite (u_n) dans un repère du plan.
Déterminer u_0, u_2 et u_3.



Méthode Pour déterminer graphiquement des termes d'une suite

1. On **repère** l'indice n sur l'axe des abscisses et le point du nuage d'abscisse n.
2. La valeur de u_n est l'ordonnée de ce point. On le **lit** sur l'axe des ordonnées.

Solution

Les points représentés ont pour coordonnées $(n\,;u_n)$. On lit donc : $u_0=-1$, $u_2=2$ et $u_3=5$.

→ Voir Exercices 53 à 54 p. 23

Exercice résolu 4 Représenter graphiquement les termes d'une suite

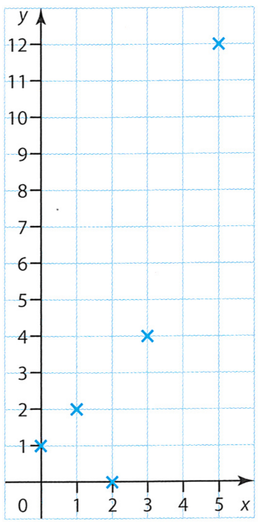
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n non nul par $u_{n+1}=4-2u_n$.
Représenter graphiquement dans un repère du plan les premiers termes de cette suite.

Méthode Pour représenter graphiquement des termes d'une suite

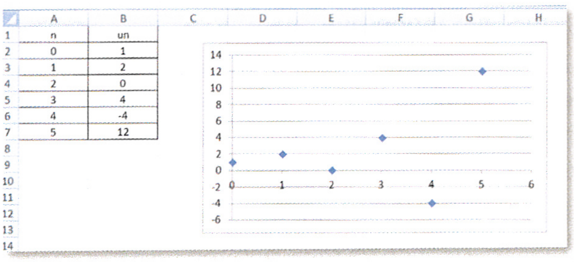
1. On **repère** pour quelles valeurs de n la suite est définie ainsi que la valeur du premier terme.
2. On **repère** que la suite est définie par récurrence puisque dans l'expression u_{n+1} ne dépend que de u_n.
3. On **calcule** les premiers termes.
4. On **place**, dans un repère du plan, les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ obtenus.

Solution

On calcule les premiers termes de la suite :
$u_1=4-2u_0=2$; $u_2=4-2u_1=0$; $u_3=4-2u_2=4$; $u_4=4-2u_3=-4$; $u_5=4-2u_4=12$.
Il s'agit de représenter le nuage de points constitué des points de coordonnées :
$(0\,;1),(1\,;2),(2\,;0),(3\,;4),(4\,;-4),(5\,;12)$.



Remarque 1 • Pour calculer et représenter les 1ers termes, on peut utiliser un tableur : la formule à entrer en B3 est alors : $\boxed{=4\text{-}2\text{*}B2}$; on tire ensuite cette formule vers le bas jusqu'en B7. Puis, en sélectionnant les cellules A2 à B7, en tapant « Insertion », « Nuage de points », on obtient :



Remarque 2 • Pour calculer et représenter les premiers termes, on peut également utiliser la calculatrice (voir Mémento p. 280).

→ Voir Exercices 55 à 60 p. 23

3 Sens de variation d'une suite

A Suite croissante, suite décroissante

DÉFINITION Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Vocabulaire

Lorsque l'inégalité est **stricte**, c'est-à-dire que $u_{n+1} > u_n$ (respectivement $u_{n+1} < u_n$), on dit que la suite est **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**).

REMARQUES

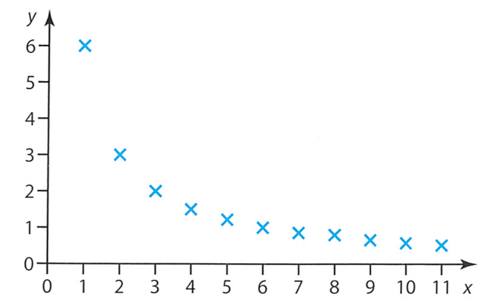
• Certaines suites ne sont ni croissantes, ni décroissantes.
Par exemple, pour la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-3)^n$, on a $u_0 = 1$, $u_1 = -3$, $u_2 = 9$, $u_3 = -27\ldots$ Cette suite n'est ni croissante, ni décroissante puisque deux termes consécutifs sont de signes contraires.

• Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites **monotones**.

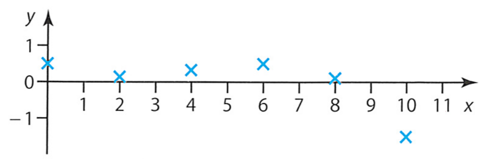
B Lecture graphique du sens de variation d'une suite

À l'aide de la représentation graphique d'une suite, on peut conjecturer le sens de variation de cette suite :
Si $A_0(0\ ;u_0)$, $A_1(1\ ;u_1)$, $A_2(2\ ;u_2)$, …, $A_n(n\ ;u_n)$ sont les points représentant la suite (u_n) et si les ordonnées des points A_0, A_1, A_2, $\ldots A_n$ sont de plus en plus grandes, on peut conjecturer que la suite est **croissante**.
De même, si les ordonnées des points A_0, A_1, A_2, $\ldots A_n$, … sont de plus en plus petites, on peut conjecturer que la suite est **décroissante**.

EXEMPLE • On a représenté ci-contre dans un repère du plan les premiers termes de la suite (u_n). Cette suite **semble** être décroissante.



REMARQUE • Graphiquement, on ne peut qu'émettre une conjecture.
En effet, ce que l'on constate sur les premiers termes ne permet pas de généraliser et de conclure sur les variations de la suite comme le montre le graphique ci-contre.



→ Voir Exercice résolu 5

C Étude du sens de variation d'une suite à l'aide d'un calcul

Pour étudier le sens de variation d'une suite, une méthode consiste à étudier **le signe de $u_{n+1} - u_n$**.
Si cette différence est **positive** pour tout n, la suite (u_n) est **croissante**.
Si cette différence est **négative** pour tout n, la suite (u_n) est **décroissante**.
Sinon, on dit que la suite (u_n) n'est **pas monotone**.

EXEMPLE 1 • On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4 - 3n$. Pour étudier le sens de variation de cette suite, on calcule $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n = 4 - 3(n+1) - (4 - 3n) = 4 - 3n - 3 - 4 + 3n = -3$.
On a $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

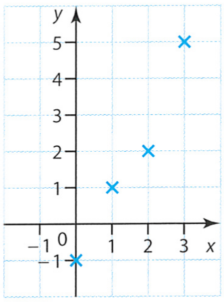
EXEMPLE 2 • On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$. Pour étudier le sens de variation de cette suite, on calcule $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n = 2 + u_n - u_n = 2$. On a $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

→ Voir Exercice résolu 6

Exercice résolu **5**

Exploiter la représentation graphique d'une suite

On a représenté graphiquement dans un repère du plan les premiers termes d'une suite (u_n).
Quel semble être le sens de variation de cette suite ?



Méthode Pour exploiter la représentation graphique d'une suite

❶ Si les **ordonnées** des points $A_0(0\,;u_0)$, $A_1(1\,;u_1)$, $A_2(2\,;u_2)$, …, $A_n(n\,;u_n)$ sont de plus en plus **grandes**, la suite (u_n) est **croissante.**
❷ Si les **ordonnées** des points $A_0(0\,;u_0)$, $A_1(1\,;u_1)$, $A_2(2\,;u_2)$, …, $A_n(n\,;u_n)$ sont de plus en plus **petites**, la suite (u_n) est **décroissante.**

Solution

Les points représentés ont des ordonnées croissantes.
$(0\,;-1)$, $(1\,;1)$, $(2\,;2)$, $(3\,;5)$.
Il semble donc que la suite soit croissante.
Remarque : on emploie le mot « semble » car on ne peut qu'émettre une conjecture.
Ce que l'on constate sur les premiers termes ne permet pas de généraliser et de conclure sur les variations de la suite. Il faut étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour pouvoir l'affirmer.

→ Voir Exercices 65 à 66 p. 24

Exercice résolu **6**

Déterminer le sens de variation d'une suite

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite définie pour tout entier naturel n.

1. $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = -5 + u_n \end{cases}$

2. $v_n = n^2 - 4$

Méthode Pour déterminer le sens de variation d'une suite

❶ On **calcule** la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1}-u_n$.
❷ Si, pour tout entier naturel n, cette différence est **positive**, la suite est (u_n) est **croissante.**
❸ Si, pour tout entier naturel n, cette différence est **négative**, la suite est (u_n) est **décroissante.**

Solution

1. Pour tout entier naturel n, si $u_{n+1} = -5+u_n$ alors $u_{n+1}-u_n = -5$.
Par conséquent, $u_{n+1}-u_n < 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est strictement décroissante.
2. Si $v_n = n^2-4$ alors pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = (n+1)^2 - 4 = n^2+2n+1-4 = n^2+2n-3$
et $v_{n+1}-v_n = n^2+2n-3-(n^2-4) = 2n+1$.
Par conséquent $v_{n+1}-v_n > 0$ car n est un entier naturel (donc positif). On a donc $v_{n+1} > v_n$.
La suite (v_n) est strictement croissante.

→ Voir Exercices 62 à 64 p. 24

L'essentiel

1 Mode de génération d'une suite numérique

Suite définie par une formule explicite : il s'agit d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) par une relation du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Suite définie par une relation de récurrence : il s'agit d'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ (ou partie de $\mathbb{N}$) par la donnée de son premier terme et d'une relation qui lie u_n et u_{n+1}, appelée relation de récurrence.

Pour calculer un terme quelconque, on doit calculer les termes précédents.

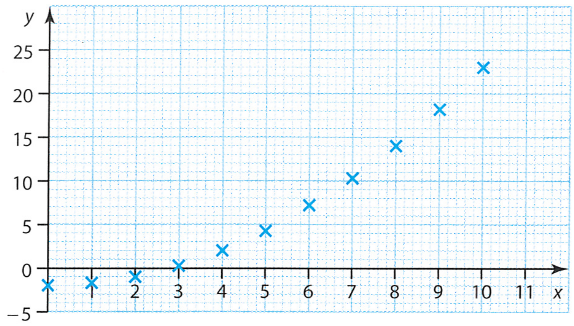
2 Représentation graphique des termes d'une suite (u_n)

Après avoir calculé les premiers termes de la suite (u_n), on place, dans un repère, les points de coordonnées $(n\,;u_n)$ ainsi obtenus. On obtient alors la **représentation graphique** de (u_n).

Par exemple, pour la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}25n^2 - 2$, les premiers termes de la suite sont les suivants. On place dans un repère du plan les points de coordonnées obtenus.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	– 2	– 1,75	– 1	0,25	2	4,25	10,25	– 19,5	14	18,25	23

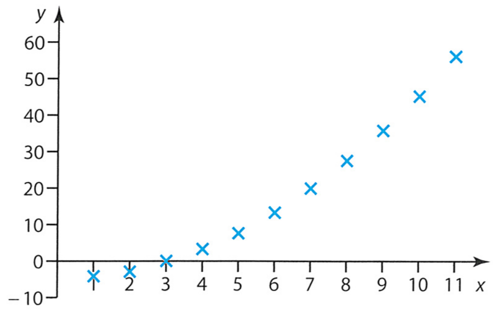
Représentation graphique de u_n



3 Sens de variation d'une suite (u_n)

On peut **conjecturer graphiquement** le **sens de variation** d'une suite (u_n) puis **prouver la conjecture** en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Par exemple, pour la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}25n^2 - 2$, la courbe semble montrer que la suite est croissante :



On calcule $u_{n+1} - u_n$.

On montre ici que $u_{n+1} - u_n > 0$, pour tout entier naturel n, ce qui justifie la conjecture.